한국학교수학회논문집 제 9 권, 제 1 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 9, Number 1, 105-120, March 2006

특별보충과정 학생들의 문제해결수행에 대한 사례연구

고상숙[1] · 이상희[2]

제 7차 교육과정은 각 단계의 내용을 제대로 이해하지 못하는 학생들에게 특별보충과정을 이수하게 하고 있으나 체계적인 교육이 뒷받침이 되지 않아 수학부진아는 갈수록 증가하고 있는 추세이다. 특히 연립방정식의 경우는 실생활과 관련이 없이 단순한 문제풀이로만 배우고 있어 학생들의 문제해결력에 부정적인 영향을 미치고 있다. Schoenfeld는 Polya의 문제해결과정을 좀 더 세부적으로 분류 조사하여 문제해결에 필요한 주요 지식과 행동을 묘사하였다. 본 연구는 Schoenfeld의 주장을 바탕으로 문제해결 수행과정을 조사하기위해 2명의 학생을 대상으로 17차시로 단계별로 구성한 연구지도안을 중심으로 학생의 자원, 발견술, 통제, 신념체제를 조사하였다. 자원에서 학생은 정의에 의한 지식과 기초지식이 부족하거나 어려움에 부딪힐 때는 직관적인 지식의 활용비율이 높은 성향을 보였으나 연구가 진행됨에 따라 알고리즘 절차를 실행하기 위한 능력, 발전적이 형태인 일상적인 절차에 대한 사용비율이 높아졌고 발견술, 통제, 신념체계 영역에서도 급진적인 변화를 나타내었다.

주요용어 : 교육과정, 대수 학습, 문제해결, 발견술, 직관

Ⅰ. 서론

제 7차 교육과정은 단계형 수준별 학습 교육과정으로, 해당 단계의 내용을 제대로 이해하지 못하는 학생들에게 특별보충과정을 이수하게 하여 학습의 결손을 막게 함으로써 기본 과정을 충실하게 이수하도록 하고 있다. 수학의 경우는 연계성이 타 과목보다 강하여 하위 단계에서 학습 결손이 있거나 학업 성취가 제대로 이루어지지 않았다면 상위 단계에서의 학습을 기대하기 어려움에도 불구하고, 대부분의 교과서의 수학내용이 실생활과 관련이 없이 단순히 문제풀이로만 배우고 있어 학생들의 문제해결력에 부정적 영향을 미치고 있다. 특히, 실생활과 관련하여 수학의 대수적 처리와 관계성에 대한 이해를 요하는 연립방정식 단원은 기초실력이 부족한 학생들에게 체계적인 수업구성이 수반되지 않는다면 수학부진아를 더욱 증가시킬 것으로 사료된다.

문제해결력과 관련하여 Schoenfeld(1985)는 Polya(1957)의 문제해결과정과 전략을 좀 더 세부적으로 분류·조사함으로써 구체적인 문제해결과정과 문제해결행동의 기본요소를 소개하였다. Schoenfeld의 문제해결전략은 본 연구에서 학생들이 수학 학습에 능동적으로 참여

1) 단국대학교 (sangch@dankook.ac.kr)
2) 단국대학교 대학원 (sh2ouse@hanmani.net)

하도록 유도하고자 함은 물론 문제해결과정을 강조한 수업형태로의 변화를 이끌 수 있을 것이다. 그 방법은 Schoenfeld의 문제해결 전략에 따라 분석, 계획, 탐구, 실행, 검증의 순서적인 단계를 적절하게 사용하여 교사가 발문을 효율적으로 이행하고 학생이 상호작용하거나 스스로 자신에게 질문하고 전략을 적절한 때에 사용하면서 답을 찾아가는 수업을 만들 수 있게 하는 것이며, 개개인의 자원, 발견술, 통제, 신념체계에 따라 동일한 수업에서 어떤 반응을 이끌어 내고 발전할 수 있는지를 알아보고자 한다. 그러므로 본 연구에서는 연립방정식에 어려움을 느끼고 있는 특별보충과정의 학생들을 위해 Schoenfeld의 문제해결 이론에 따라 첫째, 학생들이 수업에서 어떠한 자원을 활용하고, 발견술의 과정을 추적했을 때 어떠한 양상을 얻을 수 있고, 통제는 어떠한 유형으로 이루어지며, 신념체제에서 문제해결을 위한 어떤 가설들이 사용되는지를 임상상담 기법을 통해 조사하였다.

II. 이론적 배경

1. Schoenfeld 문제해결의 요소

Schoenfeld(1985)는 수학 학습이 문화적인 현상과 인지적인 현상을 동시에 포함하는 것으로, 그 둘은 분리 수 없는 것이라고 믿으며, 수학 교실은 문화적인 환경으로서 일상적인 실천과 문화 의식에 의해 영속되는 수학의 성격과 목적에 관한 신념과 가치가 존재하는 곳이기도 하다고 주장했다. 그는 그것이 의도된 것이건 아니건 간에 '수학이 실제로 무엇에 대한 것인가'에 대한 학생의 느낌은 학교 수학문화 즉, 학생이 수학적 사실과 절차를 학습하는 환경에 의해 조형되며, 그 느낌은 배운 수학을 어떻게 이용하는가를 결정하게 된다고 생각한 것이다. 이는 상점에 있는 도구를 사용하는 방법을 아는 것이 기술자로 만드는 것이 아니라 그 기술과 관련된 식견을 개발하고 도구를 다루는 법을 발달시키고 그 도구들을 목적을 이루는데 사용할 수 있어야 한다는 것을 의미한다.

Schoenfeld에 따르면 문제 해결 과정은 분석, 탐구, 실행, 검증의 순서로 이루어지고, 발견술은 문제의 분석과 이해, 해결의 계획, 점진적으로 어려운 문제의 해결, 풀이와 확인의 순서로 진행된다. 그리고 Schoenfeld(1985, p. 110)의 문제해결 전략(Problem solving strategy)은 <그림 Ⅱ-1>의 형태를 따른다.

즉, 이와 같은 단계를 따르게 된다.

1. 분석단계
   (1) 가능하면 그림을 그려라.
   (2) 특수한 경우를 조사하여라.
      1) 실례를 들어라
      2) 가능성 있는 범위를 조사하여라.
      3) 정수인 매개변수를 1,2,3... 순서대로 놓고 귀납적인 방법을 찾아라.
   (3) 대칭성을 쓰거나 또는 일반성을 잃지 않고, 문제를 간단히 만들어라.

2-1. 설계단계

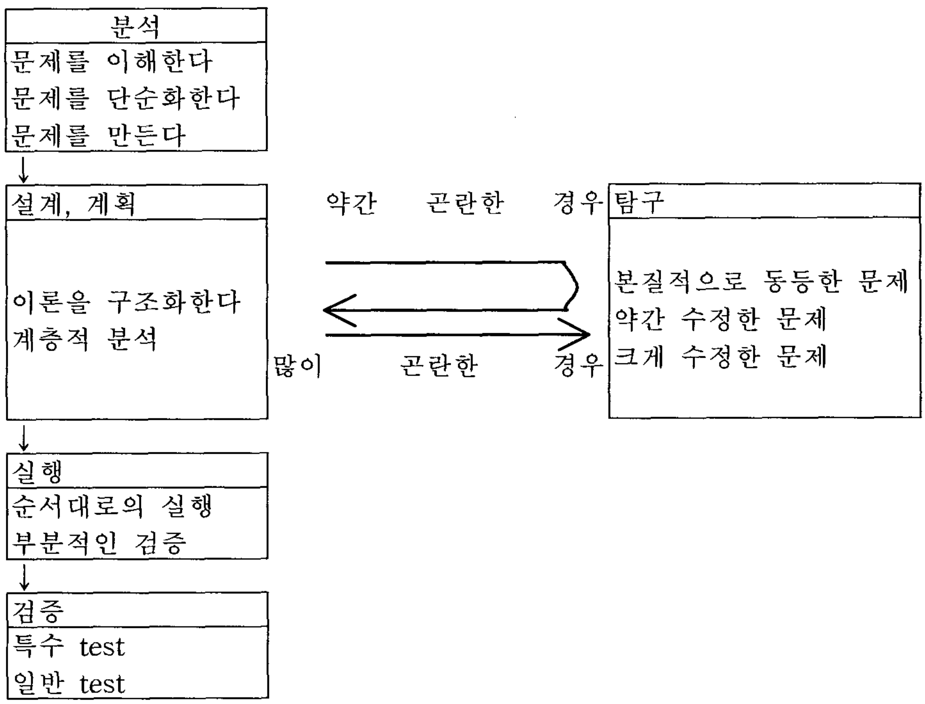
(1) 위계적으로 해결을 계획하라.

(2) 해결의 각 단계에서 무엇을 하려고 하는지, 왜 하고 있는지, 그리고 그 결과를 가지고 무엇을 하려고 하는지에 대해 설명할 수 있게 하라.

2-2. 탐구단계

(1) 여러 가지 동등한 문제들을 생각해 보아라.
  1) 조건을 동등한 것으로 바꾸어 보아라.
  2) 문제의 요소들을 여러 방법으로 결합해 보아라.
  3) 보조요소를 도입하여라.
  4) 문제들을 재구성하여라.

(2) 주어진 문제를 약간 수정한 문제를 생각하여라.
  1) 하위목표들을 세우고 그 것들을 달성하도록 해 보아라.
  2) 조건을 완화시킨 다음에 다시 그 조건을 부과해 보아라.
  3) 문제를 분해한 다음에 그 각 부분의 경우에 대해 알아보아라.



<그림 Ⅱ-1> Schoenfeld 문제-해결 전략의 도식적 개요

(3) 주어진 문제를 크게 수정한 문제를 생각하여라.
  1) 덜 복잡한(변수가 더 적은) 비슷한 문제를 알아보아라.
  2) 나머지 것들은 고정시킨 채 하나의 변수나 조건의 역할을 보아라.

3) 형태, 조건, 결론 등이 비슷한 문제를 생각해 보아라; 결과와 방법 모두를 탐구 해 보아라.

3. 실행단계
   (1) 순서대로의 실행
   (2) 부분적인 검증

4. 검증단계
   (1) 다음과 같은 특수한 test를 하여라; 자료는 모두 쓰고 있는가? 합리적인 어림계산을 하고 있는가? 대칭, 차원분석, 척도 등에도 성립하는가?
   (2) 다음과 같은 일반적인 test를 하여라; 다른 방법으로도 해결이 되는가? 이미 알려져 있는 사실로 변형되는가? 무엇인가 알고 있는 것을 만들 수 있는가?

Schoenfeld는 위 모델에서 탐구단계를 특히 중요시하며, Schoenfeld의 설계와 탐구 단계는 Polya의 계획을 세우는 단계와 같은 영역이며, 탐구 단계가 Polya의 문제해결 중심 단계라고 말할 수 있다. Schoenfeld는 Polya와 달리 일반적 전략의 중요성을 인식하고 있으며, 학생들의 인지적 특성을 대단히 강조하고 있으며 정의적 특성의 전 단계인 신념의 체제 도 중요시하고 있다. 그러나, Schoenfeld는 학생의 인지적인 특성에 치우쳐서 교사의 역할이나 문제 해결의 구체적인 방법은 상세하게 제시하지 않았다.

Schoenfeld는 문제의 이해나 풀이를 용이하게 하는 기술이나 제안을 단계별로 제시하고 있는데 그것은 아래와 같다.

1. 그림 또는 다이어그램 그리기
2. 특수한 경우 조사
   (1) 특정한 값 대입
   (2) 극단적인 경우 조사
   (3) 정수 변수에 의한 귀납유형조사
3. 단순화
   (1) 대칭성 탐구
   (2) "일반성을 잃지 않고" 간단히
4. 동치인 문제 탐구
   (1) 조건의 대치
   (2) 요소의 재결합
   (3) 문제의 재형성
5. 문제의 변형
   (1) 문제의 골력을 유지하면서 변형: 하위 목표설정, 여러 경우로 나누어 조사
   (2) 문제의 골격을 변화시키면서 변형: 조건이나 변수의 수를 줄여 탐구, 특정한 한 문자나 조건만 변화시켜 탐구

Schoenfeld는 수학 문제해결 수행의 적절한 특성화에 필요한 지식과 행동을 자원, 발견술, 통제 그리고 신념 체계의 4가지 범주로 나누어 제시하였다. 첫 번째 요소는 자원으로, 문제에 관련 있을 수 있는 개인에 의해 소유된 수학적 지식을 말하며, 구체적으로 영역에 관한

직관과 비형식적 지식, 사실, 알고리즘적 과정, “기계적인” 비알고리즘적 과정, 영역에서 학습하기 위해 합의된 공식에 관한 이해(명제적 지식) 등을 의미한다. 두 번째는 발견술로, 익숙하지 않거나 비표준적인 문제에서 진전을 이루기 위한 전략과 기교를 말하고, 효율적인 문제해결을 위한 공식, 그림그리기; 적절한 표기를 도입하기, 관련된 문제를 탐구하기, 문제를 다시 만들기; 거꾸로 풀기, 과정을 검사하고 확인하기 등을 포함한다. 세 번째는 통제력으로, 자원과 전략의 선택과 실행에 관한 전반적인 결정을 말하고, 또한, 통제력에는 계획하기, 모니터링과 평가, 의사결정, 의식적인 메타인지 행위 등이 있다. 네 번째, 신념체계로, 개인의 “수학적 세계관”을 뜻하며, 개인에 관한, 환경에 관한, 토픽에 관한, 수학에 관한 개인 행동의 일단의 결정을 포함한다.

마지막으로 Scheonfeld(1985)는 통제력과 관련하여 메타인지를 정의하였는데, 메타인지를 ‘자신의 사고에 대하여 마음속으로 음미하며, 사고를 관리하며, 재조직하는 것’이라 정의하였다. 그가 메타인지를 강조하게 된 것은 학습과 문제 해결 과정에서 반성적 사고가 중요하다는 것을 인식하게 되었기 때문이었고, ‘성공적인 결과의 결핍은 문제해결에서의 경영적인 정신활동을 경시해 온 수학 교육계의 연구 경향에서 비롯된 현상’이라고 생각했다.

2. Polya의 이론과 문제해결

Polya는 문제 해결의 정의를 “문제 해결 방법이 알려지지 않는 상태에서 방법을 찾는 것이며, 어려움으로부터 길을 찾는 것이며, 장애를 돌아가는 방법을 찾는 것이며, 즉각적으로 획득할 수 없는 바람직한 목표에 도달하는 길이다” 하고 하였다. 그리고 주어진 문제를 해결할 때에는 선지식만으로는 어려운 경우가 많으므로, 학생들이 스스로 사고하도록 가르치는 것이 교육의 주된 목표라 하였으며 교사는 학생들이 전달된 지식을 사용할 수 있는 능력을 길러 줄 수 있는 방향을 모색해야 함을 주장하였다. Polya는 ‘발생 상태 그대로의 수학’ 즉 발명되고 있는 수학의 교육적 중요성을 강조하고 있으며, 수학이 무엇인가를 기술함에 있어서 내용보다는 그 사고 과정에 초점을 맞추면서 과정적 측면을 강조하고 있다.

발견술(heuristics)이란 아주 분명하게 규정되어 있지는 않은 논리학, 혹은 철학, 심리학에 속하며 흔히 대략적으로 서술되어 있을 뿐 상세하게 제시되어 있지 않은 연구 분야의 명칭으로, 20세기 중반에 들어와 거의 잊혀져 가던 발견술을 교육적 측면에서 부흥시킨 수학 교육자가 바로 Polya이다. 그는 발견 발명의 ‘방법’과 규칙 곧, 발견술에 대한 연구와 수학하는 자신의 사고 과정에 대한 분석을 바탕으로 문제를 해결하는 수학자의 전형적인 사고활동을 야기시키는 대화법 즉 질문과 권고 형태로 구성된 발견술을 연구 개발하여 이를 체계적으로 서술・구사해 가면서 문제를 해결하도록 함으로써 학생들에게 수학하는 사고 활동을 경험시키고자 하였다.

Polya는 “how to solve it?”에서 문제 해결하는 일반적인 단계에 대한 제안을 하고 있다. 문제 이해 단계, 계획 수립 단계, 계획 수행 단계, 반성의 단계의 문제 해결 4단계가 그것이며 각 단계에 나오는 발문과 권고는 Polya의 발견술의 핵을 구성하고 있다. 그의 발견술에는 그림 그리기, 표 만들기, 예상과 확인(추측과 점검), 규칙성 찾기, 유추하기, 방정식 세우기, 거꾸로 풀기(분석), 귀납법과 수학적 귀납법, 문제의 변형, 단순화, 특수화, 일반화, 분해와 재합성, 정의로 되돌아가기, 보조 요소 도입하기 등이 있으며 이러한 일반적 전략 외에도 구체적으로 사용될 수 있는 자료의 목록 만들기, 자료를 조직하고 분류하기, 비교하기, 앞으

로 진행하기, 거꾸로 진행하기, 연합하기, 가능한 선택을 제거하기, 관련된 간단한 문제 찾기, 답을 평가하기, 연산 (operation) 사용하기, 알고리즘 사용하기, 구체적 모델 선정하기와 같은 여러 가지 전술적 방안들이 있다.

3. 학습부진아

이상노(1971)에 따르면 학습부진아는 여러 가지 원인으로 인하여 학습에 장애를 받아 교과내용을 학습하는데 있어 그 성적이 다른 학생에 비해 뒤떨어진 학생을 일컫기도 하고 정상적인 지능을 가지고 있으면서도 능력이나 기타 환경적, 성격적 원인 등으로 인하여 학습 능률이 오르지 않고 학업성적도 그 능력수준에 미치지 못하는 아동을 말하기도 하며 어떠한 이유로 학업성적이 낮거나 학업수행의 속도가 늦은 학생이라고 말할 수 있다. 따라서 학습부진아의 판정은 학력검사에서 실제 학력검사의 결과가 낮은 학생(underachiever)와 학습속도가 느린 학생(slow learner)라는 용어로 사용된다. 이에 비하여 학습지진아는 지능도 떨어지고 학력수준도 떨어지는 학생을 의미하는 것으로 차이점을 갖는다(최순옥, 2004).

수학학습부진아의 지도는 최순옥(2004)에 의하면 다음과 같은 지도법이 요구된다고 하였다. 첫째, 선수학습의 요소를 추출하여 지도하여야 한다. 수학은 연계성이 엄격한 교과이므로 선수학습에 대한 복습을 통해 이해를 높일 수 있다. 둘째, 적절한 안내를 제공하여야 한다. 학습이 부진한 학생일수록 수준에 맞는 암시나 힌트를 제공함으로써 학습자로 하여금 성공감을 느낄 수 있도록 해야 한다. 이로부터 수학과목이 공부 잘하는 학생만의 전유물이 아님을 알게 되고 따라서 수학에 대한 흥미를 얻을 수 있다. 셋째, 수학부진아는 정상학습 진도의 속도를 따르지 못하므로 단계적인 훈련이 필요하다. 각 단계에 따라서 1~2분 내에 해결할 수 있게 도와주는 것이 중요하다. 넷째, 반복과 연습을 통해 기억을 확고히 하고 일반화하는 능력을 기른다. 다섯째, 자기 자신이 문제를 해결하고 동료학생의 문제해결을 도와주는 과정을 통해 학습의 흥미, 자신감을 개발할 수 있다.

III. 연구방법

본 연구의 목적은 문제해결력의 효과를 조사하는데 초점을 두기보다는 학생이 문제해결 수행과정에서 나타난 특징을 조사하여 파악하는 것이기 때문에 임상상담을 통한 질적 연구방법을 사용하여 비슷한 변인을 가진 A, B학생의 17차시에 걸친 사례연구를 하였으며, 학생 수준에 맞는 사후 설문지를 통해 학생의 행동 변화도 관찰하였다. 과정은 특별보충과정의 학생 특성상 자원 보강을 위해 일차방정식, 일차방정식의 활용, 연립방정식, 연립방정식의 활용으로 단계적으로 진행하였고, 문제는 Schoenfeld의 이론을 바탕으로 연립방정식 지도 수업에서 학생들의 자원, 발견술, 통제, 신념 등이 파악 가능하고, 필수적이라 사려 되는 문제를 채택했다. 사례연구 부분에서는 학생들의 연구문제와 관련하여 17차시 수업활동 후 학생들은 어떠한 발달과정을 보였으며 이것이 Schoenfeld이론의 어떠한 부분과 관련 있는가를 정리하여 연구결과를 살펴보았다.

사례연구를 위한 연구의 내용과 차시의 구성은 아래의 <표 V-1>와 같다.

<표 V-1> 연구 내용과 차시 구성

단계	차시	교과서 내용	Schoenfeld의 문제해결에 필요한 주요 지식과 행동	Schoenfeld의 문제해결전략 기술과 관련하여 수행한 내용
1단계	1	문자를 사용한 식, 식의 값	자원	부호계산에 유의하여 문제분석 단계에서의 수학적 기본지식을 알게 한다.
	2	일차식의 뜻, 일차식의 계산	자원	분수계산을 염두하여 문제분석 단계에서의 수학적 기본지식을 알게 한다.
	3	방정식과 그 해, 등식의 성질	자원	문제를 수학적 식으로 변환할 수 있는 능력과 정수인 매개변수를 순서대로 놓고 귀납적인 방법을 신장시킨다.
	4	일차방정식의 풀이, 복잡한 일차방정식	자원	적절한 소수계산을 하게 하고, 조건을 완화시킨 다음에 통분계산을 하게 한다.
2단계	5	생활 속의 일차방정식	발견술, 통제	"적절한 표기를 도입하기(그림 그리기)", "계획하기"를 통한 전략을 세울 수 있게 한다.
	6	생활 속의 일차방정식	발견술, 통제	각 단계에서 무엇을 하려고 하는지, 왜 하고 있는지, 그 결과를 가지고 무엇을 하려고 하는지에 대해 설명할 수 있게 한다.
	7	생활 속의 일차방정식 (활동지)	통제	"의식적인 메타인지 행위"의 유무와 "방정식 세우기" 과정의 단계적 수행 여부를 관찰한다.
3단계	8	지수법칙, 다항식의 계산, 등식의 변형	자원	명제적 지식과 관련하여 문제를 문석하고, 덜 복잡한 비슷한 문제를 통해 기본지식을 알게 한다.
	9	미지수가 2개인 일차방정식, 연립방정식의 해	자원	보조요소(좌표평면)와 실례를 제시하고 문제의 요소들을 적절하게 결합한다.
	10	연립방정식의 풀이	자원	대입법, 가감법을 통하여 변수의 단순화를 적절한 방법으로 시행해 연립방정식을 풀 수 있게 한다.
	11	연립방정식의 풀이 (활동지)	발견술	문제부분을 파악한 수 전략을 세워 식을 만들고 비슷한 문제를 떠올려 해를 구하게 한다.
4단계	12	연립방정식의 활용	발견술	위계적으로 해결을 계획하고, 문제를 분해한 다음에 그 각 부분의 경우에 대해 알아보게 한다.
	13	연립방정식의 활용	통제	비슷한 문제와 관련된 문제를 탐구해보고 식세우기를 한 후 순서대로 시행하면서 그 과정에서의 통제를 살펴본다.
	14	연립방정식의 활용	통제	비슷한 문제를 탐구하여 그림 그리기를 통한 계획을 실시하고 중간에 부분적인 검증을 하면서 문제를 해결한다.
	15	연립방정식의 활용	통제	실례를 들어 문제풀이를 계획하게 하고, 효과적인

				검증의 절차를 갖게 한다.
	16	연립방정식의 활용	자원, 신념체제	식의 계산을 염두하여 문제분석을 하고 쉬운 문제의 경우, 조건만 적당하게 변화시켜 최종적으로 개인이 어떠한 결과를 얻는지 살펴본다.
	17	연립방정식의 활용	통제, 신념체제	어려운 문제를 접했을 때 문제를 분해하고 재결합하는 능력을 보고, 그 과정에서 토픽과 개인적 신념은 어떻게 작용했는지 살펴본다.

본 연구를 위한 17차시의 연구지도안은 Schoenfeld의 문제해결 주요 지식과 행동을 바탕으로 학생이 특별보충과정에 있음을 고려하여 최순옥(2004)이 제시한 지도방법을 따르고자 하였다. 세부적인 단계를 구성하여 선수학습과 본시 학습을 연결하였고, 힌트나 암시를 위해 실례를 많이 사용하였으며 문제해결에 소요되는 시간을 제한두기보단 문제해결의 실마리를 위해 구할 수 있게 반복과 연습의 시간도 할애하였다. 또한 동료학생과 자유로운 토론을 통한 학습이 가능하였기로 이러한 문제해결 과정을 통해 학생은 학습에 대한 흥미, 자신감을 개발할 수 있을 것으로 사료되었다.

Ⅳ. 연구결과

사례연구를 통한 연구의 결과는 다음과 같다. 첫째, 학생들이 어떤 자원을 활용하는지 각 단계별로 살펴보고자 한다. 특별보충과정의 학생들은 문제해결과정에서 비교적 자원에 미흡한 면이 많으므로 연구 초반에는 사실들과 정의들에 대한 지식의 활용 비율이 높았으며 기초 지식이 많이 부족하거나 어려운 문제에 봉착했을 경우에는 직관적인 지식의 활용 비율이 높은 경향이 있었다. 그러나 차시가 진행됨에 따라 알고리즘의 절차를 실행하기 위한 능력, 발전한 형태인 일상적인 절차에 대한 친숙성을 활용하는 비율이 높아지는 것을 확인할 수 있었다. 이는 그동안의 학습을 통한 자원의 보강이 어느 정도 이루어졌고 학생들이 그동안 활용하지 못했던 자원들을 활용할 수 있는 수학적 능력의 신장을 가지게 되었다는 것을 짐작할 수 있다.

학생들이 어떤 자원을 활용하는지 다음과 같은 <표 V-2>를 통해 정리 해볼 수 있다.

둘째, 단계별로 발견술의 과정을 추적해 보면 어떠한 양상을 얻을 수 있는지 살펴본 결과, 특별보충과정의 학생들에게 많은 발견술 중에서도 교사가 어려운 문제를 쉬운 문제를 해결함으로써 학생들을 이해시켰을 때 원활한 도움을 준 사실을 확인할 수 있었다. 이는 학생들이 가진 자원의 부족과도 관련이 있으며 부족한 자원을 채우기 위한 교사의 체계적인 지도로 나타난 결과이다. 특히 발견술은 상호 의사소통의 과정에서 자연스럽게 단계가 진행 될수록 점차적으로 발전하였고, 문제분석 과정에서 어려움을 느꼈을 때는 두 학생 모두 "그림 그리기"나 비형식적 도식을 통해 문제이해의 과정을 거쳤다. 그러나 연구 후반에는 어려운 문제를 접했을 경우 두 학생이 협동하여 동치인 조건으로 바꾸어 연립방정식을 푼다든지, 전략이 좌절되었을 때 원하는 것과 관련된 문제를 협동하여 재조사한다든지 등의 발견술을 사용하는 모습을 보였다.

위에서 기술한 내용을 다음 <표 V-3>와 같이 요약해 볼 수 있다.

<표 V-2> 학생들의 자원 활용 능력[3]

단계	활동	자원 활용 능력
1	1차시 B1	사실들과 정의들에 대한 지식
2	6차시 B1 7차시 A1, B3, A5	사실들과 정의들에 대한 지식 알고리즘의 절차를 실행하기 위한 능력
3	8차시 A2 9차시 A2, B3	사실과 정의들에 대한 지식 다양한 관련 능력의 소유
4	12차시 B2 13차시 T2-A1 14차시 A1-(끝)	문제 영역에 관한 각 개인의 형식적이고 직관적인 지식 알고리즘 절차를 실행하기 위한 능력 일상적인 절차에 대한 친숙성
설문지	문항 1번	일상적인 절차에 대한 친숙성

<표V-3> 발견술의 양상

단계	활동	발견술의 양상
1	2차시 (B4)-(끝) 4차시 A2 4차시 T5	동치인 조건으로 주어진 것을 바꾸어 같은 방식으로 풀었다. 표준적인 절차를 먼저 생각한다. 더 쉬운 문제를 해결한다.
2	5차시 T7-A8 6차시 B1-T6	실패의 원인을 수정하여 다시 조사한다. 전략이 좌절되었을 때 원하는 것과 관련된 문제를 다시 조사한다.
3	8차시 T1 9차시 T1 10차시 T3 10차시 A3	더 어려운 문제를 해결한다. 더 쉬운 문제를 해결한다. 더 쉬운 문제를 해결한다. 표준적인 절차를 먼저 생각한다.
4	12차시 B2 13차시 (T2)-(A2) 14차시 (A1)-(끝) 15차시 T6-A5 17차시 T2-T4	더 편리한 표기나 다른 관점, 논리적으로 동치인 형식을 이용하여 문제를 재형식화한다. 실패의 원인을 수정하여 다시 조사한다. 실패의 원인을 수정하여 다시 조사한다. 전략이 좌절되었을 때 원하는 것과 관련된 문제를 다시 조사한다. 실패의 원인을 수정하여 다시 조사한다.
설문지	문항 17번(A, B) 문항 18번 (B)	"그림 그리기"를 통한 표준적인 절차를 먼저 생각한다. 더 편리한 표기나 다른 관점, 논리적으로 동치인 형식을 이용하여 문제를 재형식화한다.

3) 이상희(2005). 연립방정식에서 특별보충과정 학생들의 문제해결전략에 대한 사례연구, 석사학위논문, 단국대학교 교육대학원 참조. 공간상의 이유로 프로토콜을 본문에 싣지 못하였다. 단, 표의 연구 활동에서 대화 사이에 기술되어 있는 부분은 -로 표시하고, 대화가 아닌 문장으로 서술되어 있는 부분은 ( )로 표시하여 이해를 돕는다.

셋째, 학생들의 통제력은 어떤 유형으로 이루어지는지 살펴보면, 7-가 단계의 일차방정식 학습 시에는 잘못된 통제로 문제해결에 실패하거나 신념체계로 인해 실패의 원인을 파악했음에도 불구하고 재 시도를 하지 않아 문제해결에 실패한 경우가 다분했고, 특히 실생활과 관련한 활용문제 등에서는 의욕상실과 막연한 목적추구로 인해 많은 시간을 허비했으며, 긍정적 결과를 얻지 못해 사실상 통제가 학습자에게 도움을 주지 못하는 상황이 많았다. 물론 난이도가 낮은 문제나 상호작용을 통해 올바른 해결을 도출한 경우는 통제가 해결에 많은 기여를 하기도 했으며, 교사의 경우는 장기기억에 의존하여 통제없이 문제를 해결할 수 있는 능력을 갖추고 있어 이를 바탕으로 학습자가 올바른 통제를 하지 못하거나 직접 개입이 필요할 시 도움이 될만한 발문이나 자원의 제공 등의 노력으로 적극적인 안내자 역할을 함으로써 학생들의 통제에 기여했다. 위의 내용을 다음 <표 V-4>와 같이 요약해 볼 수 있다.

<표 V-4> 통제력의 유형

차시별 활동	통제력의 유형
3차시 (T1)-B1	유형 1. 잘못된 통제는 실패에 기여한다.
9차시 (A1)-(T3)	유형 2. 통제는 재난을 피하게 하지만, 사실상 도움이 되지 않는다.
15차시 (T6)-A5	유형 3. 통제는 해결에의 긍정적인 힘이다.
5차시 T7 6차시 T9 17차시 T2	유형 4. 통제가 필요 없다.

그리고, 발견술들이 일차적으로 주입이 되면 학습자는 몇몇 주요한 통제결정에 직면하게 되는데 12차시를 통해 알아보면 아래와 같은 패턴을 발견할 수 있었다.

P: 80원짜리 사과와 150원짜리 배를 섞어서 18개를 사고 2,000원을 지불하였다. 사과와 배는 각각 몇 개씩 샀는가?

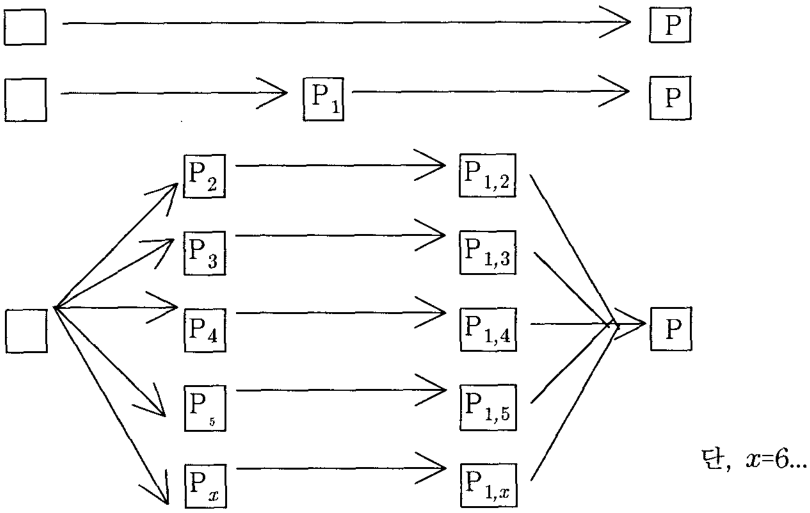
P_1: 총 18개를 사고, 사과 80원, 배 150원일 때 2,000원으로 살 수 있는 각각의 개수는?

P_2: <구입: 사과+배, 사과 80원, 배 150원, 18개 구입, 가진 돈: 2,000원>을 이용해 특성대로 분류하고 2개의 식을 만드시오.

P_3: <구입: 사과+배, 사과 80원, 배 150원, 18개 구입, 가진 돈: 2,000원>을 이용해 연립방정식을 세우시오.

처음에 주어진 문제를 P, 수정된 문제를 P_1, 동일한 주제영역으로부터 유래하고 공정한 하위목표들을 P_2, P_3라 할 때 P에 대한 통제결정을 분석해 보면 이 문제에 대한 통제결정은 의외로 매우 간단하다는 것을 알 수 있다. 예를 들어 일단 어떤 문제 P_i를 풀기로 선택했다면, 해법의 순서에 관해서는 거의 선택의 여지가 없게 된다. 즉 P의 해법은 P_1의 해법에 의존하고, 그것은 문제 P_i의 해법에 의존하게 되는데 문제들의 대부분은 P_i, P_1, P의 순서로 작용한다.

위의 내용을 <그림 V-1>을 통해 알아보고, 통제결정의 경로를 정리해 보자.



<그림 V-1> 통제결정의 경로

넷째, 신념체계에서 문제해결을 위한 어떤 가설들이 사용되는지 예를 통해 살펴보고자 한다. Schoenfeld(1985)에 따르면 문제해결 과정에서 학생들은 경험주의자가 된 것처럼 매우 일관된 수행을 하게 된다. 공리를 통해 특징을 파악하고 규칙에 따라 가설을 설정하는 것이다.

(1) 신념체계를 살펴보기 위한 16, 17차시에서 볼 수 있는 공통적인 공리는 다음과 같다.

공리 1. 문제 분석 단계에서 문제해결에 관한 직관을 얻는다.
문제이해가 정확하면 그 것으로부터 유용한 정보를 발견할 가능성이 높다.
공리 2. 해답을 얻기 위해 가설을 만들고 그 것의 순위를 매기는 것은 두 가지 요소 즉 직관적인 이해가능성, 문제에서의 특정 물리적 특징의 지각적 현저성에 의해 조절된다.
공리 3. 개연성 있는 가설은 순차적으로 시험된다.
공리 4. 가설검증은 완전히 경험적이다.
구한 답은 직접 대입 해 봄으로써 검증할 수 있다.

(2) 16, 17차시 문제에서 다음과 같은 지각적 특징(F)을 관찰할 수 있다.

F1. 16차시에서는 처음 비율의 합과 비율을 바꾼 것의 합이 나타나 있고, 17차시에서는 학생 수와 비율이 나타나 있다.
F2. 미지수가 2개이므로 두 개의 식을 통해 연립방정식을 만들 수 있다.

(3) 학생들은 파악한 특징들을 통해 아래와 같은 기본 규칙(R)들을 만들게 된다.

R1. 학생들이 문제를 통해 인식한 여러 특징들은 해답이 될만한 일련의 후보 군들을 결정한다.
R2. 문제 이해의 과정에서 학생들이 상상한 개략적 가설들이 후보 군의 개연성과 순위를 결정한다.
R3. 파악한 특징을 제대로 파악하지 못한 경우 다른 특징을 통해 대체하여 새로운 조건을 만든다.
R4. 처음의 가설이 반대가 아니라면, 후에 다른 가설들을 종합해서 얻은 가설은 후보 가설 군에서 가장 낮은 순위에 있게 된다.

(4) 이와 같은 규칙 아래 가설이 설정된다. 16, 17차시를 통해 알아본 가설은 다음과 같다.

1) 16차시의 내용을 살펴보면 A, B는 적절한 가설을 만들고 이를 조합하여 가설적인 해답을 만들어냈지만 B의 경우 H1.에서 2할=$\frac{2}{100}$로 잘못 설정하여 일차적 문제해결을 위한 시도에서 실패하였고 H4.부분부터 A의 도움으로 가설을 수정하여 문제해결에 가설적인 해답을 가지게 된다. 이는 처음의 가설이 잘못 세워져 문제 전체에 영향을 끼친 예이며 16차시의 내용을 통해 잘못 세워진 가설이라도 적절한 통제에 수정이 가능하다는 사실을 짐작하게 한다.

2) 17차시에서 A는 H6에서 비율인 -8을 기술하지 않아 문제해결에 실패한다. H6의 경우 8명이 줄었으므로 H6. 금년의 전체 학생 수 감소 비율 = -8로 가설을 세워야 하며 H7.의 경우도 $\begin{cases} x+y=1000 \\ -\frac{8}{100}x+\frac{10}{100}y=-8 \end{cases}$ 이 되어야 하기 때문이다. B는 H4.의 가설에서 남학생이 8% 줄었다는 것을 작년의 남학생 수에서 -8%로 계산하고, H5.의 가설에서도 작년의 여학생 수에 +10%로 계산하였으며, H6.에서는 A와 같이 금년의 전체 학생 수의 감소 비율을 992로 생각하고 말았다. 물론 H7.도 잘못된 가설이며 이는 H4-H6의 잘못된 가설에서 비롯되었다.

16, 17차시에서 볼 수 있는 가설의 예를 아래의 <표 Ⅴ-5>에서 확인해 볼 수 있다.

<표 Ⅴ-5> 신념체계에서의 가설의 예

차시	학생	가설(H)
16	A	H1. 2할=$\frac{2}{10}$ H2. A의 2할=$\frac{2}{10}$A, B의 3할=$\frac{3}{10}$B H3. (H1+H2) A의 2할과 3할의 합은 7⇒ $\frac{2}{10}$A+$\frac{3}{10}$B=7 H4. (H1+H2+H3) 비율을 바꾸어 합하면 처음 합보다 1이 많아진다.⇒ $\frac{3}{10}$A+$\frac{2}{10}$

		B=7+1
	B	H1. 2할= $\frac{2}{100}$ H2. A의 2할= $\frac{2}{100}$ A, B의 3할= $\frac{3}{100}$ B H3. (H1+H2) A의 2할과 3할의 합은 7⇒ $\frac{2}{100}$ A+ $\frac{3}{100}$ B=7 (수정 거침) H4. (H1+H2+H3) 비율을 바꾸어 합하면 처음 합보다 1이 많아진다.⇒ $\frac{3}{10}$ A+ $\frac{2}{10}$ B=7+1
17	A	H1. 작년 남학생의 수: x H2. 작년 여학생의 수: y H3. 작년 전체 학생 수: 1000 H4. 금년의 남학생 수 감소비율: $-\frac{8}{100}x$ H5. 금년의 여학생 수 증가 비율: $+\frac{10}{100}y$ H6. 금년의 전체 학생 수 감소 비율: 992 (H1+...+H6) H7. $\begin{cases} x+y=1000 \\ -\frac{8}{100}x+\frac{10}{100}y=992 \end{cases}$
	B	H1. 작년 남학생의 수: x H2. 작년 여학생의 수: y H3. 작년 전체 학생 수: 1000 H4. 금년의 남학생 수 감소비율: $x-8\%$ H5. 금년의 여학생 수 증가 비율: $y+10\%$ H6. 금년의 전체 학생 수 감소 비율: 992 (H1+...+H6) H7. $\begin{cases} x+y=1000 \\ (x-8)+(y+10)=992 \end{cases}$

학생들은 비형식적인 자원을 많이 가지고 있으며 자신들의 잠정적인 추측을 정확한 것으로 받아들여 연립방정식을 세우는 과정에서 옳은 해답으로 인지하고 말았다. 이를 통해 인지할 수 있는 점은, 가설이 각각의 가설의 조합으로 다른 가설을 만들게 되고 만약 앞 선 가설이 잘못되었다면 뒤따라오는 가설도 잘못될 수 있고, 이런 경우는 통제에 따라 빠른 수정이 필요하며, 상호작용을 통한 동료학생의 도움이나 스스로의 메타인지를 통해 가설을 수정해야 한다는 것이다. 그러나 가설은 메타인지와 기본적인 자원 등 복합적인 상태에서 암묵적으로 이루어지는 경우가 많아 파악하기가 대단히 쉽지 않으므로 평소 학습태도와 자원의 보강을 통해 학습자 스스로 긍정적인 신념을 가질 수 있도록 도와주고 가설을 제대로 세우고 있는지 면밀히 관찰하는 것이 필요하다.

V. 결론

Schoenfeld가 주장하는 문제해결 수행 과정은 결과 도출이 아니라 원활한 통제 작용과 올바른 신념을 가지고 '수학을 한다는 것'에 대한 의미 찾기의 과정이다. 특히 연립방정식에서의 Schoenfeld의 이론은 사례연구를 통해서도 알 수 있듯이 교사, 학생이 적절하게 상호작용하면서 수학적 문제해결 실행의 특성화에 필요한 지식과 행동 등을 통하여 문제해결력 향상, 수학적 흥미 부여 등에 큰 도움을 주었다. 즉 자원의 증가와 효율적인 발견술의 사용 등은 특별보충과정의 수업에서 점차적으로 긍정적인 효과를 보였고, 통제와 신념체계와 같은 장시간이 소요되는 심리적인 작용 역시 학생들의 수업 후 느낀 점을 통해 어느 정도 만족할 만한 결과를 얻을 수 있었다. 그러나 신념체계와 관련하여 기존의 부정적인 수학적 세계관을 가진 학생은 심리적 발달의 정도가 쉽게 파악되지 않고 변화하기도 힘들기 때문에 아직 신념체계가 부정적으로 고정되지 않는 학생이라 파악되면 미리 예방할 수 있도록 다양한 연구의 필요성이 제기된다.

특별보충과정의 수업은 아직 단단하게 그 기초가 다져져있지 않다. 시행 년이 짧은 이유와 주변인의 관심 부족, 학생 개인의 수치심 등으로 제대로 시행되지 못하기 때문이다. 특히 학습의욕과 자신감을 상실하여 학교생활에 부적응한 학생들은 특별보충과정에 다수 포함되어 있으면서도 소극적인 자세로 일관해 더 나은 방향으로의 교육을 어렵게 하고 있고, 교사 스스로도 교수자료, 시간 부족 등을 이유로 부진한 학생을 제대로 지도하지 못해서 여러 가지 아쉬움을 남기고 있다. 수학내용 중에서 연립방정식의 지도부분도 아직 미진한 상태이다. 따라서 이러한 학생들의 학습 부진을 해결하기 위해서는 특별보충과정을 담당하는 전문교사가 일반학생과는 다른 시각으로 수준에 맞는 학습 지도안을 마련하여 자기주도적인 학습 능력을 신장시켜 성취감을 갖게 하고, 활발한 탐구활동이 이루어질 수 있도록 배려해 수학에 대한 흥미와 자신감을 길러주게 하는 뒷받침이 필요하다.

이 연구의 결론으로부터 다음과 같은 시사점을 갖는다.

첫째, Schoenfeld가 학생들의 인지적 행동을 강조한 것에 비해 본 연구는 연립방정식을 효과적으로 지도하기 위하여 실제 학생들에 대한 연구로 앞으로 행해질 수 있는 많은 연구의 하나가 될 것이다. 다른 수준의 학생 집단뿐만 아니라 다른 영역의 수학에서도 학생의 문제해결과정이 심도 있게 이루어져야 할 필요를 낳는다.

둘째, 본 연구를 통해 특별보충과정에서 연립방정식지도는 자원에서의 많은 도움이 요구되므로 자원을 이용할 수 있는 적절한 발문을 연구하여 긍정적인 자극을 통해 자원을 효과적으로 활용할 수 있는 기회를 제공해야 한다. 따라서 선수학습과 본 학습과의 연결이 필요하고, 학생들에게 다양한 경험의 기회를 제공해야 하며, 학생이 상황에 따라 스스로 발문을 만들면서 이에 답하는 습관이 형성될 수 있도록 행해져야 한다는 것을 알 수 있다.

셋째, 긍정적인 수학적 세계관을 심어질 수 있도록 흥미 있는 수업진행과 쉽고 적절한 예설명 등이 필요하며, 특별보충과정의 학생들은 어려운 문제 상황에 봉착한 경우 빠른 포기로 문제해결에 실패할 수 있으므로 교사는 학습자의 문제에 대한 집중력 증가와 끈기를 기를 수 있는 방법을 다각도로 연구하고 검토해야 한다.

넷째, 효과적인 특별보충과정의 수업을 위해 수학교과의 학습을 방해하는 수학 기피 요인을 교사가 능숙하게 파악함으로써 학생들의 수학 부적응 상황을 합리적으로 진단할 수 있는

방안을 마련하는 것이 매우 중요하다. 특히 특별보충과정의 학생들은 다양한 수학 기피 요인을 가질 것이므로 교사의 열린 마음과 학생을 이해하려는 인내와 사랑이 필요하다.

다섯째, 특별보충과정은 일반 수업에 비해 다른 방식의 관심, 접근, 노력이 필요하므로 적절한 능력을 가진 교사 양성을 위해 연수를 통한 자격증 취득이 고려되었으면 한다. 일정한 시간의 교육, 체계적인 프로그램, 특별보충교육의 심리, 학습 자료 개발 등의 연수가 교사에게 주어지고 이러한 과정을 통해 전문가가 된다면 각 학교에서의 특별보충과정 수업에 도움이 될 것이다.

참고문헌

이상희(2005). 연립방정식에서 특별보충과정 학생들의 문제해결전략에 대한 사례연구, 석사학위논문, 단국대학교 교육대학원.

장영희(2001). 중학교 수학교육에서 문제해결 전략 및 지도에 관한 분석적 연구, 석사학위논문, 순천향대학교 교육대학원.

최순옥(2004). 협동학습을 통한 수학부진아 특별보충 지도방안, 석사학위논문, 서울시립대학교 교육대학원.

Polya, G. (1957). How to solve it. New York: Doubleday Anchor Books.

Schonfeld, A. H. (1985). Mathematical Problem Solving. 대한수학교육학회, 2002년도 제36회 동계 집중세미나 자료. Orlando, Florida: Academic Press Inc.

고상숙 · 이상희

A case study on the mathematical problem solving performance of simultaneous equations for the students from a remedial course

Ko, Sang Sook[4] · Lee, Sang Hui[5]

Abstract

The Seventh Curriculum makes sure that those students who don't have a proper understanding of contents required at a certain stage take a remedial course. But a trend contrary to the intention is formed since there is no systematic education for such a course and thus more students get to fall into the group of low achievement. In particular, solving a simultaneous equation in a rote way without understanding influences negatively students' achievement. Schoenfeld introduced the basic elements of one's own mathematical problem solving process and behavior, referred to Polya's. Employing Schoenfeld's strategy, this study aimed to induce students' active participation in math classes, as well as to focus on a mathematical problem solving process during the study. Two students were selected from a remedial course at 00 Middle School and administered with a qualitative case study method over 17 lessons, each of which lasted for 30 minutes. In the beginning, they used such knowledge as facts and definitions a lot. There was a tendency of their resorting to intuitive knowledge more when they lacked basic knowledge or met with a difficult question. As the lessons were given, however, they improved their ability to implement algorithm procedures and used more familiar ones with the developed common procedures in the area of resources.

Key Words : Curriculum, Learning algebra, Problem solving, Heuristics, Intuition

4) Dankook university (sangch@dankook.ac.kr)
5) Graduate school of Dankook university (sh2ouse@hanmani.net)