

# 점탄성 제진 요소의 복소동강성계수 산출을 위한 상용유한요소 코드 이용시 복소탄성계수의 정하중 의존성 반영 방법

## Consideration of Static-strain-dependent Dynamic Complex Modulus in Dynamic Stiffness Calculation of Viscoelastic Mount/Bushing by Commercial Finite Element Codes

신 윤 호† · 김 광 준\*

Yun-ho Shin and Kwang-joon Kim

(2005년 11월 25일 접수 ; 2006년 3월 10일 심사완료)

Key Words : Viscoelastic Material(점탄성 재료), Rubber(고무), Dynamic Stiffness(복소동강성계수), Complex Modulus(복소탄성계수), Abaqus(아바쿠스)

### ABSTRACT

Little attention has been paid to static-strain-dependence of dynamic complex modulus of viscoelastic materials in computational analysis so far. Current commercial Finite Element Method(FEM) codes do not take such characteristics into consideration in constitutive equations of viscoelastic materials. Recent experimental observations that static-strain-dependence of dynamic complex modulus of viscoelastic materials, especially filled rubbers, are significant, however, require that solutions somehow are necessary. In this study, a simple technique of using a commercial FEM code, ABAQUS, is introduced, which seems to be far more cost/time saving than development of a new software with such capabilities. A static-strain-dependent correction factor is used to reflect the influence of static-strains in Morman model, which is currently the base of the ABAQUS. The proposed technique is applied to viscoelastic components of rather complicated shape to predict the dynamic stiffness under static-strain and the predictions are compared with experimental results.

### 기 호 설 명

SRF(semi reinforcing furance) :

입자크기 70~90  $\mu\text{m}$  카본블랙

phr(part per hundred rubber) :

천연고무에 대한 첨가제의 무게비

NR(natural rubber) : 천연고무

CB(carbon black) : 충전제

GPF(generalized purpose furnace) :

입자크기 60~70  $\mu\text{m}$  카본블랙

### 1. 서 론

진동절연을 목적으로 장착되는 점탄성 제진 요소는 원료비의 저렴성과 원하는 형상으로서의 가공성이 뛰어나, 산업현장에서 가장 많이 사용되는 절연요소 중 하나이다. 진동원과 기초구조물 사이에 삽입되어 진동을 저감시키는 역할을 하는 점탄성 제진 요소 절연능의 지표 즉, 복소동강성계수가 정확하게 파악된다면 대상물의 진동 절연을 위한 제진 요소 설

† 책임저자; 정회원, 한국과학기술원 기계공학과  
E-mail : shinyh77@kaist.ac.kr  
Tel : (042) 869-3064, Fax : (042) 869-8220  
\* 정회원, 한국과학기술원 기계공학과

계가 더 용이하다. 복소동강성계수를 결정하기 위해 실제로 임의의 형상의 점탄성 재진 요소를 제작하고 실험을 통해 필요한 복소동강성계수를 결정하는 것도 가능하겠지만, 수치해석적 방법을 통해 설계 단계에서 임의 형상의 점탄성 재진 요소의 복소동강성계수를 추출하는 것이 시간과 비용의 측면에서 더 효과적이다.

고무로 대표되는 점탄성 재진 요소들은 대부분 장비의 하중에 의한 정적대변형 하에서 진동에 의한 동적 미소변형을 받는다. 성능개선을 위해 충전제를 첨가하는 대부분의 점탄성 재료의 경우 이러한 정적 변형이 동적 거동에 영향을 준다<sup>(1)</sup>. 수치해석적 방법에 사용되는 기존 점탄성 재료의 구성방정식들은 정적 거동과 동적 거동 특성을 표현하기 위해 물성치를 분리해서 반영하는 것은 가능하지만, 정적 변형이 동적 물성치에 미치는 영향은 반영하지 못하고 있는 실정이다<sup>(2)</sup>. 또한, 이러한 점탄성 재료의 정적 변형의 영향을 반영하는 방법에 대한 연구가 최근 진행되었으나, 각 연구에서 개발한 코드를 사용하므로 상용화된 입출력 모듈을 사용하는 코드에 비해 매우 불편하며, 해석 대상의 복잡성 증가시 해석이 어렵다<sup>(3)</sup>.

이 연구에서는 정적 대변형 하에서 동적 미소변형을 하는 점탄성 재료 요소의 거동을 묘사하기 위해 사용되는 기존 상용유한요소 해석프로그램의 구성방정식을 검토하여, 점탄성 재료 해석시 정적 변형이 동적 거동에 미치는 영향을 상용유한요소해석 프로그램에 적용하는 방법을 논하고자 한다.

## 2. 정적 대변형 영향을 고려하지 않은 점탄성 재료 구성방정식

### 2.1 Morman 구성방정식

ABAQUS 등의 상용유한요소 해석프로그램은 점탄성 재료의 정적 변형 하에서 동적 거동을 표현하기 위해 Morman 구성방정식을 사용한다. Morman 구성방정식은 Coleman과 Noll의 유한 선형 구성방정식(FLV, finite linear viscoelasticity)으로부터 그 기원을 찾을 수 있다<sup>(4)</sup>. Morman은 등방성 물질의 정적인 대변형과 동적 미소변형을 각각 독립적인 변수로 가정하고 그 구성방정식을 제안하였으며, 이는 식 (1)과 같다<sup>(2)</sup>.

$$\Delta\sigma^* = -\Delta P^* \cdot I - \sigma_0 \cdot w^* + w^* \cdot \sigma_0 + (1 + j\omega g^*(\omega))L : \Delta\varepsilon^* \quad (1)$$

$\Delta P^*$ 는 체적변형응력항을,  $w^*$ 는 회전변형항을,  $\sigma_0$ 는 정적응력항을 각각 의미하며,  $L$ 은 정적변형과 정적 물성치로 이루어진 4차텐서항이다.

단순 형상 점탄성 재료 요소에 대하여 비압축성, 단축방향 힘을 가정하고, 1차원 형태의 구성방정식을 식 (1)로부터 유도하면 식 (2)와 같다.

$$\Delta\sigma^* = [(1 + j\omega g^*(\omega))(2c_1(2\lambda^2 + \lambda^{-1}) + 2c_2(\lambda + 2\lambda^{-2}))]\Delta\varepsilon^* \quad (2)$$

여기서,  $c_1, c_2$ 는 Mooney-Rivlin 상수로서, 정적 거동의 영향을 표현하며,  $g^*(\omega)$ 는 정규화된 완화함수(normalized relaxation function)를 주파수 영역에서 나타낸 함수로서 점탄성 재료 동적 거동의 영향을 표현한다.  $\lambda$ 는 초기길이에 대한 변형된 길이의 비를 나타낸다.

### 2.2 Morman 구성방정식에 필요한 정적, 동적 물성치 결정

임의 형상 점탄성 재진 요소의 해석을 위해서는 1차원 단순 형상 시험편에 대해 측정된 복소동강성계수와 식 (2)에 표현된 1차원 형태 구성방정식을 이용하여 해석에 필요한 물성치를 결정하는 과정이 필요하다.

(1) 정적 물성치 결정,  $c_1$  and  $c_2$

점탄성 재료의 정적 변형은 응력완화가 완전히 이루어지고 난 이후의 거동을 의미하는데, 몇 단계의 정적 변형 시험 결과를 정적 대변형의 거동을 표현하는 Mooney-Rivlin 구성방정식, 식 (3)에 곡선 보정하여 결정한다.

$$\frac{F_0}{A_0} \lambda = \sigma_0 = 2c_1(\lambda^2 - \lambda^{-1}) + 2c_2(\lambda - \lambda^{-2}) \quad (3)$$

여기서,  $F_0, A_0$ 는 각각 단순형상 시험편에 가해지는 정적 변형에 대해 측정된 정적 힘의 크기와 초

기 시험편의 단면적을 의미한다.

(2) 동적 물성치 결정,  $1 + j\omega_0 g^*(\omega_0)$

동적 물성치,  $1 + j\omega_0 g^*(\omega_0)$  는 수직변형증분과 수직응력증분의 관계로부터 결정된다. 점탄성 재료의 비압축성을 가정하여, 정적 변형이 없는 상태 ( $\lambda=1$ )에서 임의의 주파수( $\omega_0$ )에 대해 실험으로 측정된 수직변형증분( $\Delta\varepsilon^*$ )과 수직힘증분( $\Delta F^*$ )을 식(4)에 대입하면 동적 물성치가 결정된다.

$$1 + j\omega_0 g^*(\omega_0) = \frac{\Delta F^* / A_0 \Delta\varepsilon^*}{6(c_1 + c_2)} \quad (4)$$

### 2.3 Morman 구성방정식을 이용한 복소동강성 계수 결정

점탄성 재료의 정적 변형 하 동적 거동시 Morman 구성방정식을 이용한 복소동강성계수 결정의 유용성을 살펴보기 위해, 실험을 통해 결정된 정적/동적 물성치를 상용유한요소 해석프로그램, ABAQUS에 적용하여 원기둥형 단순형상 시험편에 대한 복소동강성계수를 추정하였다. 시험에 사용된 시험편은 천연고무에 성능개선을 위해 충전제(GPF, general purpose furnace)를 첨가한 지름/길이가 40/40 mm인 원기둥형 시험편이다. 시험은 점탄성 재료 전용 시험기(INSTRON-8502)를 이용하여 해석과 함께 압축비( $\lambda$ ) 1, 0.95, 0.9, 0.85, 0.8, 0.75, 0.7의 정적 예변형하 10 Hz,  $\Delta\varepsilon^* = 0.5\%$ 의 동적 변형 조건에 대해 수행하였다. 각 정적 예변형의 충분한 완화를 위해 20분의 예변형 후 측정된 정적힘을 이용하여 정적 물성치를 추출하였으며, 예변형이 없는 상태에서 동적변형을 주어 동적 물성치를 추출하였다<sup>(5,6)</sup>. 원기둥형 형상의 복소동강성계수의 해석시 사용된 물성치는 Table 1과 같다. 시험 결과는 시험편 3개에 대한 복소동강성계수를 산술 평균한 것으로 편차가 3%이며, 해석 및 시험 결과는 Fig. 1과 같다.

정적 예변형이 증가할수록 복소동강성계수의 시

Table 1 Material properties for filled rubber

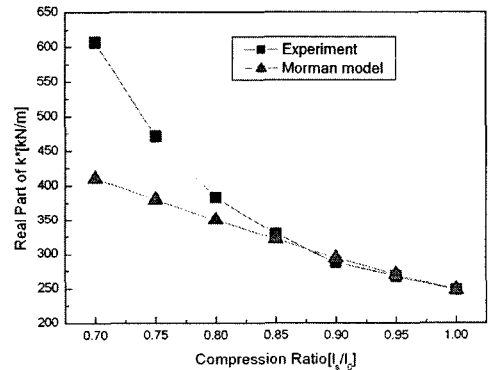
Viscoelastic material	$c_1$ [Mpa]	$c_2$ [Mpa]	$1 + j\omega_0 g^*(\omega_0)$
NR/CB(GPF)5	0.6699	0	$1.635 + j 0.109$

험 및 해석 결과 사이의 오차가 30%까지 증가하는 것을 Fig. 1을 통해 관찰할 수 있는데, 이는 상용유한요소코드에서 사용되는 Morman 구성방정식이 정적인 변형이 동적 거동에 미치는 영향을 반영하지 못하기 때문에 발생하는 것으로 판단된다.

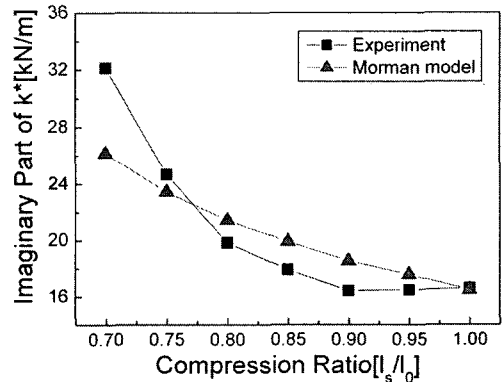
### 3. 정적대변형 영향을 고려한 점탄성 재료 구성방정식

이 연구에서는 정적 대변형이 동적 거동에 미치는 영향을 반영하기 위해 Morman 구성방정식에 아래 식(5)와 같이 정적변형 보정계수( $m^*$ )를 도입하였다.

$$\Delta\sigma^* = -\Delta P^* \cdot I - \sigma_0 \cdot w^* + w^* \cdot \sigma_0 + (1 + j\omega g^*(\omega))m^* L : \Delta\varepsilon^* \quad (5)$$



(a) Real part



(b) Imaginary part

Fig. 1 Complex dynamic stiffness of cylindrical specimen(NR/CB(GPF) 50 phr, 10 Hz, 0.5% dynamic amplitude) by Morman model

정적변형 보정계수( $m^*$ )는 팔면체 전단변형률 (generalized octahedral shear strain,  $\bar{I}_\gamma$ )의 함수로 정의되며, 그 형태는 식 (6)과 같다<sup>(3)</sup>.

$$m^*(\bar{I}_\gamma) = (1 + z_1\bar{I}_\gamma + z_2\bar{I}_\gamma^2)e^{z_\theta\bar{I}_\gamma} \quad (6)$$

$$\bar{I}_\gamma = \frac{1}{6}(2\bar{I}_1^2 - 6\bar{I}_2)^{1/2} \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 = (\lambda_1\lambda_2)^2 + (\lambda_2\lambda_3)^2 + (\lambda_3\lambda_1)^2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

여기서,  $I_1, I_2$ 는 각각 1차, 2차 불변량 (invariant)을 의미하며, 단축방향의 힘에 대한 불변량은 식 (7)과 같다. 식 (6)의  $z_1, z_2, z_\theta$ 는 단순형상 시험편에 대해 정적 예변형 하에서 동적 변형을 주어 측정된 시험 결과를 이용하여 곡선보정을 통해 결정되며, 이를 포함한 1차원 형태의 수정된 Morman 구성방정식은 식 (8)과 같다.

$$\Delta\sigma^* = [(1 + j\omega g^*(\omega))m^*(I_\gamma)(2c_1(2\lambda^2 + \lambda^{-1}) + 2c_2(\lambda + 2\lambda^{-2}))]\Delta\varepsilon^* \quad (8)$$

$$\Delta\sigma^* = \frac{\Delta F^*}{A_0}\lambda + \sigma_0\Delta\varepsilon^* \quad (9)$$

정적 예변형 하에서 동적 변형을 가하는 실험에서 측정된 힘증분과 응력증분간의 관계는 식 (9)와 같이 유도되며, 식 (8)과 (9)를 식 (10)과 같은 형태로 정리하여 정적변형 보정계수를 계산한다.

$$m^*(\lambda, \omega) = \frac{\frac{\Delta F^*}{\Delta\varepsilon^*} \frac{\lambda}{A_0} + [2c_1(\lambda^2 - \lambda^{-1}) + 2c_2(\lambda - \lambda^{-2})]}{(1 + j\omega g^*(\omega))(2c_1(2\lambda^2 + \lambda^{-1}) + 2c_2(\lambda + 2\lambda^{-2}))} \quad (10)$$

$c_1, c_2$  및  $1 + j\omega g^*(\omega)$ 는 Table 1에서 기술된 정적/동적 물성치이며, 추가로 정적 예변형 ( $\lambda = 1.00$ ,

Table 2  $z_1, z_2, z_\theta$  for filled rubber

Viscoelastic material	$z_1$	$z_2$	$z_\theta$
NR/CB(GPF)50	-2.02	13.70	-0.0153

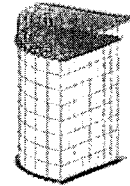
0.95, 0.90, 0.80, 0.75, 0.7)하에서 동적 변형(10 Hz,  $\Delta\varepsilon^* = 0.5\%$ )을 원기둥형 시험편에 가하여 측정된 복소동강성계수를 이용하여 각 예변형 하에서의 정적변형 보정계수를 결정한다. 식 (10)을 통해 결정된 정적변형 보정계수값을 대상으로 식 (6)을 이용하여 곡선보정을 수행하게 되는데, 이를 통해 결정된 계수는 Table 2와 같다.

#### 4. 정적변형 보정계수의 상용유한요소 해석프로그램 (ABAQUS) 적용

##### 4.1 정적변형 보정계수 적용 절차

정적 예변형 영향을 반영하기위한 충전 고무의 복소동강성계수 결정 절차는 4단계로 요약할 수 있으며, 그 과정은 다음과 같다.

Step 1. 상용유한요소 해석프로그램을 이용하여 점탄성 재료 요소를 대상으로 적절한 크기의 요소를 정의한다.



Step 2. 상용유한요소해석 프로그램 (ABAQUS)을 이용하여 점탄성 재료 시험편의 정적 변형 해석을 수행하여 각 요소 별 변형 정보를 결정한다.

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \quad (11)$$

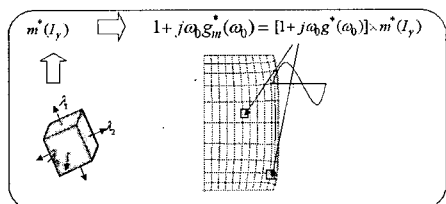
Step 3. 해석 결과인 각 요소의 정적 변형 정보를 이용하여 각 요소의 정적변형 보정계수( $m^*$ )를 계산한다.

$$m^*(I_\gamma) = (1 + z_1I_\gamma + z_2I_\gamma^2)e^{z_\theta I_\gamma}$$

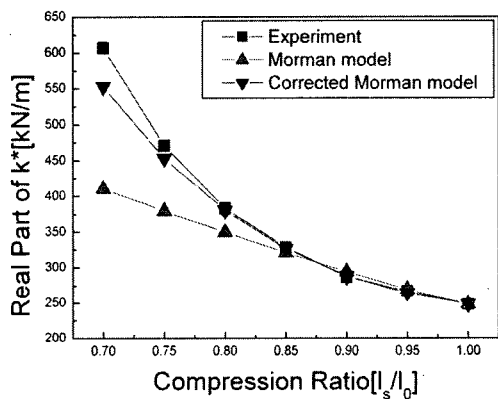
$$\left( \begin{array}{l} I_\gamma = \frac{1}{6}(2I_1^2 - 6I_2)^{1/2} \\ I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 = (\lambda_1\lambda_2)^2 + (\lambda_2\lambda_3)^2 + (\lambda_3\lambda_1)^2 \end{array} \right)$$

$z_1, z_2, z_\theta$ 는 원기둥형 시험편의 압축 실험과 곡선 보정을 통해 결정된 계수이고,  $I_1, I_2$ 는 유한요소 모델의 각 요소별 변형정보를 주축 방향으로 변형시켜 얻은 변형 불변량이다. 이 과정을 거치면, 각 요소에 대한 정적 보정계수( $m^*$ )가 결정된다.

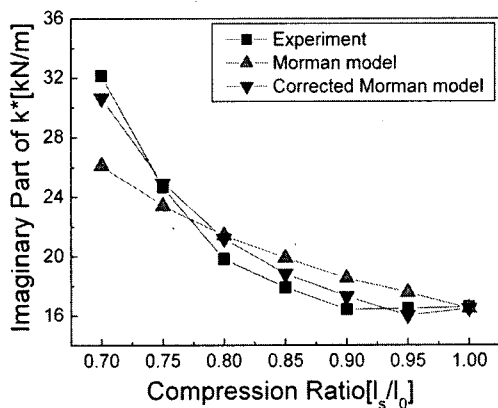
Step 4. Step 3에서 각 요소 별로 결정된 정적변



형 보정계수( $m^*(\lambda, \omega)$ )를 동적 물성치 ( $1 + j\omega g^*(\omega)$ )



(a) Real part



(b) Imaginary part

Fig. 2 Complex dynamic stiffness of cylindrical specimen (NR/CB(GPF) 50 phr, 10 Hz, 0.5 % dynamic amplitude) by Morman and corrected Morman model

와 곱하여 각 요소에 동적 물성치로 적용하고, 이를

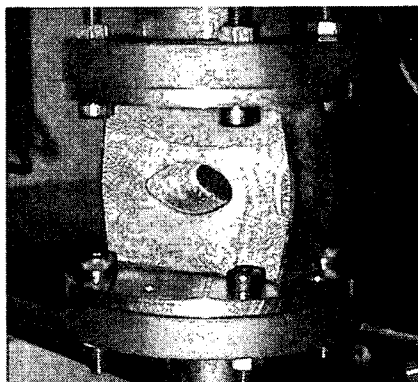
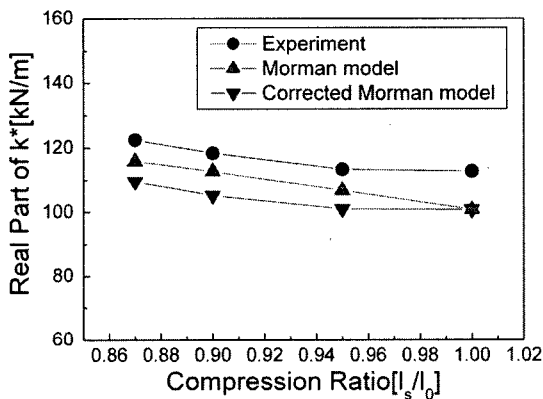
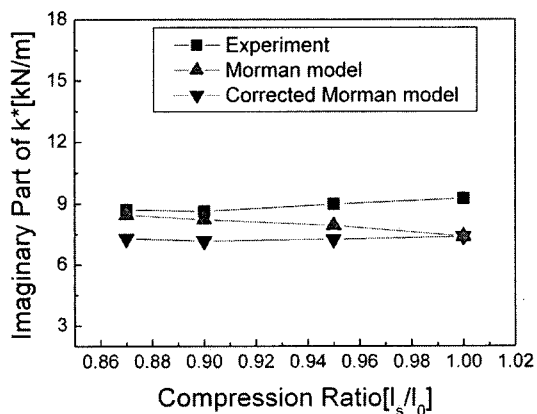


Fig. 3 Viscoelastic component of a rather complicated shape



(a) Real part



(b) Imaginary part

Fig. 4 Complex dynamic stiffness of viscoelastic compont of a rather complicated shape (NR/CB(GPF) 50 phr, 10 Hz, 0.5 % dynamic amplitude)

이용하여 임의의 정적 변형 하에서 일정한 동적 미소변형(10 Hz,  $\Delta\epsilon^* = 0.5\%$ )을 하는 점탄성 제진 요소의 해석을 수행한다.

Fig. 2는 앞서 기술한 절차를 통해 추정된 원기둥형 시험편의 복소동강성계수를 나타낸다. 정적 예변형의 영향을 반영하지 않았을 때의 결과에 비하여 최대오차가 30%에서 8%로 감소하는 것을 관찰할 수 있다.

#### 4.2 복잡한 형상의 점탄성 재료의 복소동강성계수 결정

제안된 절차의 유효성을 검증하기 위하여 Fig. 3과 같이 다소 복잡한 형상을 대상으로 복소동강성계수 추정을 수행하였다. 시험편의 높이/길이/너비는 50/50/20 mm이며, 중앙 구멍의 지름은 20 mm이다.

복잡한 형상 시험편에 대한 시험은 4 단계의 정적 예변형( $\lambda = 1.00, 0.95, 0.90, 0.87$ )하에서 동적 변형( $\Delta\epsilon^* = 0.5\%$ , 10 Hz)을 가하여 복소동강성계수를 측정하였으며, 시험 및 해석 결과는 Fig. 4와 같다.

추정된 복소동강성계수는 시험결과와 10% 정도의 편오차(bias error)는 존재하지만 시험 결과와 경향성이 일치하는 반면, 정적 예변형의 영향을 반영하지 않은 경우 그 경향성도 반영하지 못하는 것을 관찰할 수 있다.

### 5. 복잡한 형상의 복소동강성계수의 편오차 원인의 검토

복잡한 형상 시험편의 복소동강성계수 추정시 발생하는 편오차는 점탄성 재료의 제작 과정에서 발생할 수 있다<sup>(7,8)</sup>. 점탄성 재료의 제작과정 중 배합된 고무 재료를 몰당하는 과정에서 압연기를 거쳐

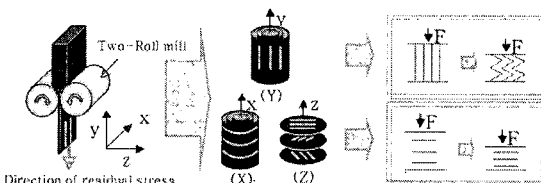
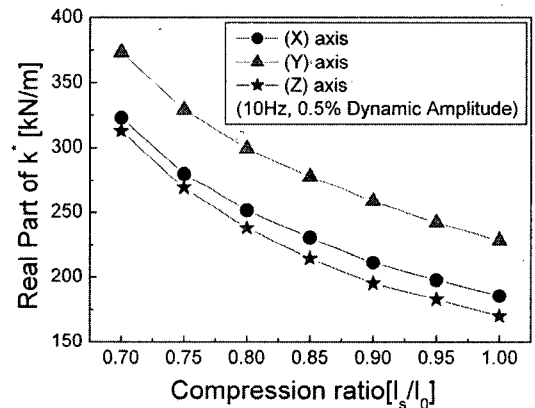


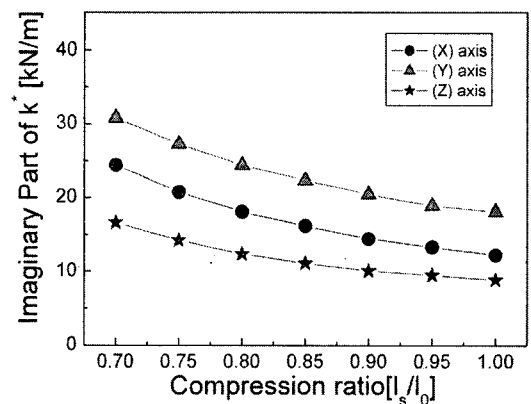
Fig. 5 Three different directions of residual stress in the cylindrical specimen

나온 고무 시트에 잔류응력이 발생하여, 이로 인해 발생된 물성치의 방향성이 오차를 유발할 수 있다. 이를 확인하기 위해 배합된 고무 시트를 각각 3가지 방향(x, y, z)에 대해 말거나 적층하여 Fig. 5와 같이 원기둥형 시험편을 제작하였다. 2장에서 기술한 시험 과정과 동일한 과정을 통해 복소동강성계수를 측정하였으며, 그 차이가 17% 정도 존재함을 Fig. 6을 통해 관찰할 수 있다.

이 연구에서는 점탄성 재료의 제작과정에서 발생하는 물성치의 방향성을 근사적으로 반영하기 위해 Fig. 7과 같이 방향성을 고려하여 복잡한 형상의 시험편을 제작하였으며, 이에 대한 해석 및 시험을 수행하였다. 방향성을 고려하여 제작한 원기둥형 시험편으로부터 측정된 물성치를 복잡한 형상의 해석



(a) Real part



(b) Imaginary part

Fig. 6 Effects of rolling directions on complex dynamic stiffness of cylindrical specimens (NR/CB(SRF) 50 phr, 10 Hz, 0.5% dynamic amplitude)

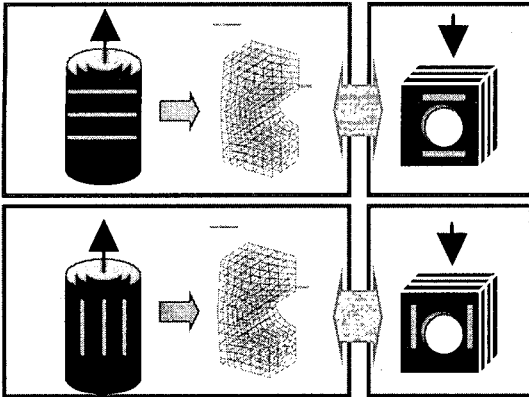


Fig. 7 Analysis and experiment for complex shape specimen considering anisotropy of each specimen

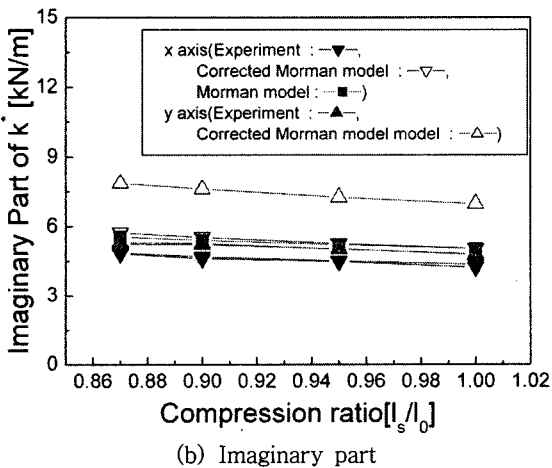
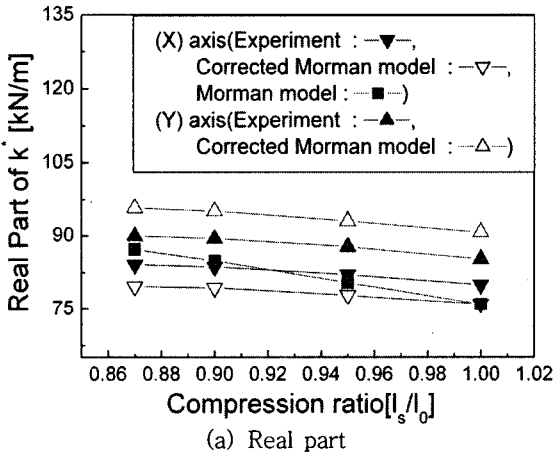


Fig. 8 Complex dynamic stiffness of complex shape specimens (NR/CB(SRF) 50 phr, 10 Hz, 0.5 % dynamic amplitude)

에 등방성 물성치로 적용하고, 복잡한 형상 시험편의 제작 및 시험 또한 방향성을 고려하여 수행하였다. 그 결과 복잡한 형상 시험편의 편차의 오차가 5% 까지 감소함을 Fig. 8을 통해 관찰할 수 있다.

### 6. 결 론

이 연구에서는 기존 상용유한요소해석 프로그램을 이용하면서도 점탄성 재료의 정적 예변형이 동적 거동에 미치는 영향을 고려하여 복소동강성계수를 결정 하기 위한 방법을 제시하였다. 해석 과정은 크게 두 단계로 정적 해석을 통해 정적변형 보정계수를 결정하고, 이를 대상 유한요소 모델의 각 요소별 물성치로 적용하여 동적 해석을 수행하여 복소동강성계수를 결정하였다. 제안된 방법을 검증하기 위해 복잡한 형상의 복소동강성계수 산출에 해석 과정을 적용하였으며, 해석 및 시험 결과 사이의 편차의 오차 원인에 대해서 고찰하였다.

### 후 기

이 연구는 ‘한국과학재단 목적기초연구(R01-2001-000-00393)’ 와 ‘동일고무벨트㈜’ 의 지원으로 수행되었습니다.

### 참 고 문 헌

- (1) Lee, J.-H. and Kim, K.-J. 2001, "Characterization of Complex Modulus of Viscoelastic Materials Subject to Static Compression," *Mechanics of Time-dependent Materials*, Vol. 5, No. 3, pp. 255~271.
- (2) Morman and Negtegaal, 1983, "Finite Element Analysis of Sinusoidal Small-amplitude Vibrations in Deformed Viscoelastic Solids," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 19, No.7, pp. 1079~1103.
- (3) Kim, B.-K. and Youn, S.-K. 2003, "A Viscoelastic Constitutive Model of Rubber under Small Oscillatory Load Superimposed on Large Static Deformation," *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 71, No.11, pp. 748~763.

(4) Coleman and Noll, 1961, "Foundation of Linear Viscoelasticity," Reviews of Modern Physics, Vol. 33, pp. 239~249.

(5) KS M6604-1985, "Testing Method for Rubber Vibration Isolators."

(6) Lee, W.-S., et. al, 2003, "Testing for Identification of Dynamic Properties of Viscoelastic Material Subject to Large Static Deformation,"

Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 13, No. 2, pp. 132~143.

(7) Freakley and Payne, 1978, "Theory and Practice of Engineering with Rubber," Applied science publishers LTD, London.

(8) Mark, Erman and Eirich, 1994, "Science and Technology of Rubber," Academic Press, San Diego.