

### 3절점 혼합유한요소를 이용한 아치의 면내굽힘진동해석 In-Plane Flexural Vibration Analysis of Arches Using Three-Noded Hybrid-Mixed Element

김진곤  
J. G. Kim

**Key Words** : In-Plane Flexural Vibration Analysis(면내굽힘진동해석), Hybrid-Mixed Formulation(혼합정식화), Shear Deformation(전단변형), 3-Noded Curved Beam Element(3절점 곡선보요소)

**Abstract** : Curved beams are more efficient in transfer of loads than straight beams because the transfer is effected by bending, shear and membrane action. The finite element method is a versatile method for solving structural mechanics problems and curved beam problems have been solved using this method by many author. In this study, a new three-noded hybrid-mixed curved beam element is proposed to investigate the in-plane flexural vibration behavior of arches depending on the curvature, aspect ratio and boundary conditions, etc. The proposed element including the effect of shear deformation is based on the Hellinger-Reissner variational principle, and employs the quadratic displacement functions and consistent linear stress functions. The stress parameters are then eliminated from the stationary condition of the variational principle so that the standard stiffness equations are obtained. Several numerical examples confirm the accuracy of the proposed finite element and also show the dynamic behavior of arches with various shapes.

#### 1. 서론

곡선보는 곡률로 인하여 직선 보에 비해 매우 효율적인 하중 지지능력을 가지기 때문에 자동차, 항공기 등 여러 산업분야에서 널리 사용되는 구조요소이다. 또한 곡선보는 셸(shell)과 같은 일반적인 곡선 구조 해석 시 발생하는 문제점을 파악하고 해결하기 위한 전 단계 요소로서 관심의 대상이 되고 있다. 이중곡률에 의한 영향을 제외하면, 곡선보는 셸요소가 가지는 신장-굽힘간 상호작용 그리고 막-전단 강성과잉현상(membrane and shear locking) 등의 중요한 특징들을 대부분 가진다.

이러한 곡선보 해석을 위해 일차변형이론(first deformation theory)에 바탕한 뛰어난 수치거동을 가지는 유한요소의 개발을 위해 지금까지 다양한 변분이론이 적용되어왔다. 이 중 최소 포텐셜 에너지이론(minimum potential energy theory)에 바탕한 변위 모델이 가장 일반적으로 사용되어 왔다.

Ashwell<sup>1)</sup>과 Dawe<sup>2)</sup>가 제안한 Kirchhoff-Love 이론에 바탕한 얇은 곡선보요소는  $C^0$ -연속 접선방향 변위와  $C^1$ -연속 법선방향 변위를 가지는 경우 만족스럽지 못한 결과를 나타내었다. 이후 Noor 등<sup>3)</sup>과 Stolarski 등<sup>4)</sup>은 Mindlin-Reissner 이론에 근거하여 변위장에 대해서  $C^0$ -연속 보간함수를 사용하는 요소들을 제안하였다. 하지만, 이러한 초기 시도들은 보가 아주 얇거나 비신장 굽힘변형 시 강성과잉(locking)현상이 발생하는 문제점을 가진다. 이러한 문제점을 제거하기 위한 최소 포텐셜 에너지이론에 바탕한 대표적 요소들로는 감차/선택적분요소(reduced/selective integration element)<sup>4,5)</sup>와 장일치요소(field-consistent element)<sup>6)</sup> 등이 있다.

이러한 변위모델에 대한 또 다른 대안으로서, Saleeb<sup>7)</sup> 등과 Kim<sup>8,9)</sup> 등은 Hellinger-Reissner 변분이론에 바탕한 혼합요소들을 제안하였다. 본 논문에서는 곡선보의 면내 자유진동해석을 위해 변위장과 이에 대응하는 응력장에 대해 각각 독립적인 적절한 근사함수를 가지는  $C^0$ -연속 3절점 혼합요소를 정식화하였다. 응력매개변수는 변분이론의 정지조건(stationary condition)을 통하여 요소정식화의

접수일 : 2006년 9월 5일, 채택확정 : 2006년 9월 26일  
김진곤(책임저자) : 대구가톨릭대학교 기계자동차공학부  
E-mail : kimjg1@cu.ac.kr Tel. 053-850-2711

최종단계에서 제거함으로써, 일반적인 변위 요소와 크기가 같은 (9x9)의 강성행렬을 유도하였다. 수치 해석을 통하여 정식화된 요소의 신뢰성을 검증하였으며, 다양한 경우의 곡선보 문제에서 곡률, 세장비에 의한 전단변형 효과 및 경계조건 등이 보의 진동 특성에 미치는 영향을 상세하게 살펴보았다.

### 2. 지배방정식

Fig. 1은 두께  $h$ , 곡률반경  $R$ , 길이  $l$ , 넓이  $b$ 를 가지며 총 9개의 변위 자유도를 가지는 3절점 곡선보요소를 보여주고 있다.  $u$ 와  $v$ 는 중립면에서 각각 접선  $x$ 방향과 법선  $y$ 방향 변위를 나타내며,  $\theta$ 는 회전각을 나타내는 변위성분이다.  $N$ ,  $Q$  그리고  $M$ 은 각각  $x$ 방향과  $y$ 방향 합응력(stress resultants) 및 모멘트 성분들을 의미한다. 그림에서 하첨자 1, 2 그리고 3은 각각 변위와 합응력 성분들이 정의되는 절점들을 나타낸다. 곡선보의 두께방향으로 수직 변위가 일정하다고 가정하면, 중립면에서  $y$ 만큼 떨어진 지점에서의 접선과 법선방향의 변위성분들은 다음과 같이 표현된다.

$$U = \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} = Tu \quad (1)$$

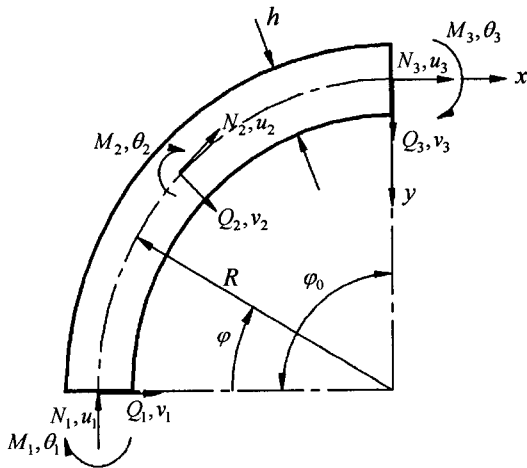


Fig. 1 The geometry of a three-noded curved beam element

셀에 대한 Naghdi와 Reissner의 이론으로부터<sup>7)</sup> 중립면에서  $y$ 만큼 떨어진 지점에서의 수직변형률  $\epsilon$ 과 전단변형률  $\gamma$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\epsilon = \frac{\epsilon_0 - y\kappa}{1 - y/R} \approx \left(1 + \frac{y}{R} + \frac{y^2}{R^2}\right)(\epsilon_0 - y\kappa) \quad (2a)$$

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{1 - y/R} \approx \left(1 + \frac{y}{R} + \frac{y^2}{R^2}\right)\gamma_0 \quad (2b)$$

여기서, 중립면에서의 변위-변형률관계식은

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_0 \\ \gamma_0 \\ \kappa \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{Rd\varphi} & -\frac{1}{R} & 0 \\ \frac{1}{R} & \frac{d}{Rd\varphi} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{d}{Rd\varphi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (3)$$

여기서,  $\varphi$ 는 circumferential angle을 나타내며, 위 식을 축약된 행렬기호로 표시하면 다음과 같다.

$$\epsilon = \Delta u \quad (4)$$

면내변형을 가지는 보에서 길이방향과 전단에 대한 응력-변형률관계들은  $\sigma = E\epsilon$ 과  $\tau = kG\gamma$ 이며, 여기서  $E$ 와  $G$ 는 각각 탄성계수와 전단계수이며  $k$ 는 전단보정계수(shear correction factor)이다. 곡선보에서 곡률반경 대비 두께가 작다고 가정하면 (즉,  $(y/R)^2 \ll 1$ ), 보의 단면에 대한 적분을 통하여 합응력(stress resultants)을 다음과 같이 근사적으로 구할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} N \\ V \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA + \frac{EI}{R^2} & 0 & -\frac{EI}{R} \\ 0 & kGA & 0 \\ -\frac{EI}{R} & 0 & EI \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_0 \\ \gamma_0 \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad (5)$$

위 식을 행렬형태로 표시하면

$$\sigma = C\epsilon \quad (6)$$

여기서,  $A$ 와  $I$ 는 각각 단면의 면적과 2차 관성모멘트를 나타내며, 재료의 컴플라이언스 행렬은  $S = C^{-1}$ 이다.

### 3. 혼합유한요소정식화

곡선보의 자유진동문제에서, 외력에 의한 일이 없는 경우 Hamilton의 원리는 다음과 같다.

$$\delta H_R = \delta \int_{t_0}^{t_1} (T - \Pi_R) dt = 0 \quad (7)$$

여기서, 보의 운동에너지  $T$ 와 Hellinger-Reissner 변분이론의 복함수(functional)  $\Pi_R$ 은 다음과 같이 표현된다.<sup>10)</sup>

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \dot{U}^T \dot{U} dx = \frac{1}{2} \int_0^l \dot{u}^T \Omega \dot{u} dx \quad (8a)$$

$$\Pi_R = \int_0^l (\sigma^T \epsilon - \frac{1}{2} \sigma^T S \sigma) b dx \quad (8b)$$

여기서,

$$\Omega = \begin{bmatrix} \rho A & 0 & 0 \\ 0 & \rho A & 0 \\ 0 & 0 & \rho I \end{bmatrix} \quad (9)$$

위 식들에서, dot는 시간  $t$ 에 대한 미분을 의미하며  $\rho$ 는 밀도(mass density)를 나타낸다. 유한요소정식화과정에서, 공간과 시간에 대한 함수인 변위  $u = \{u, v, \theta\}^T$ 와 합응력  $\sigma = \{N, V, M\}^T$ 을 각각 독립적으로 다음과 같이 근사화시킨다.

$$u = Dd \quad (10a)$$

$$\sigma = P\beta \quad (10b)$$

여기서,  $D$ 과  $P$ 는 각각 변위와 합응력에 대한 보간함수 행렬을 나타내며,  $d$ 와  $\beta$ 는 각각 절점에서의 변위성분과 응력매개변수들을 나타낸다. 변위와 응력에 대한 적절한 보간함수 선정에 대해서는 다음 절에서 자세하게 설명하고자 한다. 식 (8)과 (10)을 식 (7)에 대입하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$H_R = \beta^T G d - \frac{1}{2} \beta^T H \beta - \frac{1}{2} \omega^2 d^T M d \quad (11)$$

여기서,  $\omega$ 는 보의 고유진동수를 나타내며

$$H = \int_c P^T S P dx \quad (12a)$$

$$G = \int_c P^T \Delta D dx \quad (12b)$$

$$M = \int_c D^T \Lambda D dx \quad (12c)$$

식 (11)에 대해서  $d$ 와  $\beta$ 에 대해서 각각 정지조건(stationary condition)을 적용한 후, 응력매개변수  $\beta$ 를 변위성분  $d$ 로 치환하면 다음과 같은 요소방정식을 최종적으로 얻을 수 있다.

$$[K - \omega^2 M] \cdot d = 0 \quad (13)$$

여기서, 요소의 강성행렬  $K$ 는

$$K = G^T H^{-1} G. \quad (14)$$

#### 4. 보간함수

아치의 진동해석을 위한 3절점 혼합유한요소의 정식화를 위해서 식 (10a)의 변위장에 대해서 다음과 같은 Lagrange 보간함수로 근사화시킨다..

$$u = \sum_{i=1}^3 N_i u_i; \nu = \sum_{i=1}^3 N_i \nu_i; \theta = \sum_{i=1}^3 N_i \theta_i \quad (15)$$

여기서,

$$N_1 = \xi(\xi - 1)/2 \quad (16a)$$

$$N_2 = (1 - \xi^2) \quad (16b)$$

$$N_3 = \xi(1 + \xi)/2 \quad (16c)$$

여기서,  $\xi = 2\varphi/\varphi_0 = 2x/l$  ( $-1 \leq \xi \leq 1$ )이며,  $d = \{u_i, v_i, \theta_i\}_{i=1,2,3}$ 는 각 절점에서 정의되는 변위에 대한 자유도성분들이다.

다음으로, 변위에 대응하는 적절한 응력매개변수를 선정하기 위해서 보가 아주 얇아지고 직선에 가까워지는(즉,  $R \rightarrow \infty$ ) 전단변형이 없는 굽힘거동의 경우와 곡선보의 길이 대 두께비가 충분히 커짐에 따라 인장변형률의 기여분이 감소하는 비신장 굽힘거동과 같은 극한거동들을 고려한다. 이 때 각각 전단변형률과 인장변형률이 감소하면서 다음과 같이 0에 수렴하게 된다.

$$\gamma_0 = \frac{2dv}{ld\xi} - \theta \rightarrow 0 \quad (17a)$$

$$\epsilon_0 = \frac{2du}{ld\xi} - \frac{v}{R} \rightarrow 0 \quad (17b)$$

위의 두 식에서, 유한차분식의 형태로 표현되는 각각 3개의 조건식을 얻을 수 있는데, 이 중 다음과

같은 조건들을 각각 얻을 수 있다.

$$\frac{\theta_1 - 2\theta_2 + \theta_3}{2} \rightarrow 0 \quad (18a)$$

$$\frac{v_1 - 2v_2 + v_3}{2R} \rightarrow 0 \quad (18b)$$

위 식들을 상당하는 미분식으로 표현하면

$$\frac{l^2}{2} \theta_{,xx} \rightarrow 0 \quad (19a)$$

$$\frac{l^2}{2R} v_{,xx} \rightarrow 0 \quad (19b)$$

이다. 이 조건들은 적절하지 못한 2차 보간함수를 사용함으로써 생기는 불필요한 가성구속조건 (spurious constraint)으로서, 강성과잉현상을 일으키는 원인으로 알려져 있다.<sup>6,11)</sup> 이러한 가성구속조건을 없애기 위해서, 변형률에 대응하는 식 (10b)의 합응력들에 대해서 다음과 같은 1차 함수를 유한요소정식화에 사용하였다.

$$N = \beta_1 + \beta_2 \xi + \beta_3 \xi^2 \quad (20a)$$

$$V = \beta_4 + \beta_5 \xi + \beta_6 \xi^2 \quad (20b)$$

$$M = \beta_7 + \beta_8 \xi + \beta_9 \xi^2. \quad (20c)$$

여기서,  $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_9\}^T$ 는 응력매개변수 (stress parameters)를 나타낸다.

### 5. 수치 예제

#### 5.1 Cantilever circular arch

본 논문에서 제안된 요소의 수치적 성능을 살펴보기 위해서, 먼저 Fig. 2에 있는 cantilever arch를 해석하였다. Fig. 3은 2개의 요소만을 사용하여 두께와 각도를 변화시킬 때 1차 고유진동수 결과를 보여주고 있다. 1차 고유진동수는 20개의 요소를 사용하여 구한 값으로 무차원시켰다. 해석결과 각도가 커질수록 오차가 약간 증가하지만, 모든 경우 두께가 아주 얇은 경우에도 강성과잉현상이 발생하지 않음을 알 수 있다.

Fig. 4-6은  $\alpha R/r_1 = 10$ 이고  $h_1/h_2$ 가 각각 0.5와 1일 때 고유진동수 계수  $C_i = \sqrt{\rho A_1 / EI_1} \omega_i (\alpha R)^2$  값의 각도에 따른 변화를

보여주고 있다. 여기서  $r_1$ 은 고정단에서 단면의 회전 반경(radius of gyration)으로  $r_1 = \sqrt{I/A}$ 으로 정의된다. 해석결과는 10개의 요소를 사용하여 구하였으며, 그림으로부터 Leung과<sup>12)</sup> Rossi의<sup>13)</sup> 해석결과와 비교적 잘 일치함을 확인할 수 있다. 모든 경우  $h_1/h_2 = 0.5$ 일 때  $h_1/h_2 = 1$ 일 때보다 구조물의 중량을 25% 정도 감소시키면서도 1차 고유진동수를 약 9% 정도 증가시키는 dynamic stiffening effect를 가짐을 알 수 있다.

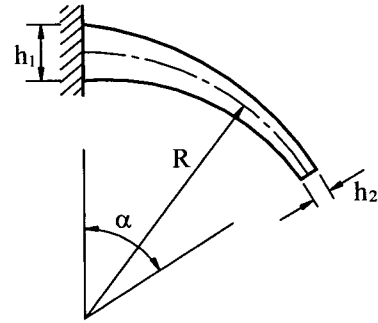


Fig. 2 A tapered cantilever arch

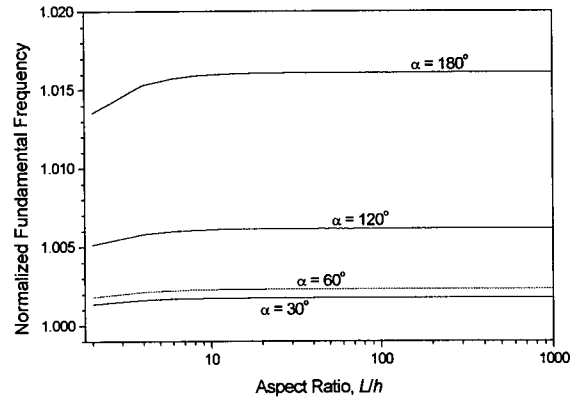


Fig. 3 Locking studies for a cantilever circular arch for the fundamental frequency computed by two present elements ( $h_1/h_2 = 1$ )

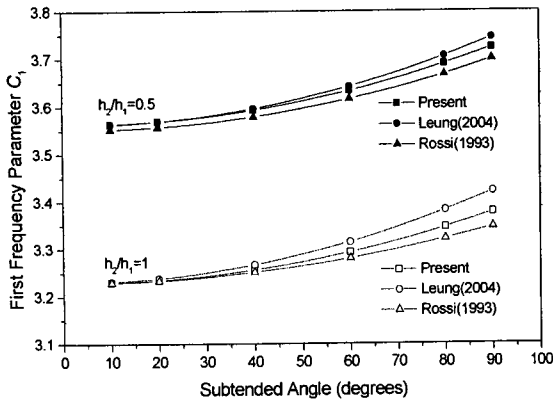


Fig. 4 The first frequency parameter  $C_1$  for tapered cantilever arches( $\alpha R/r_1 = 10$ )

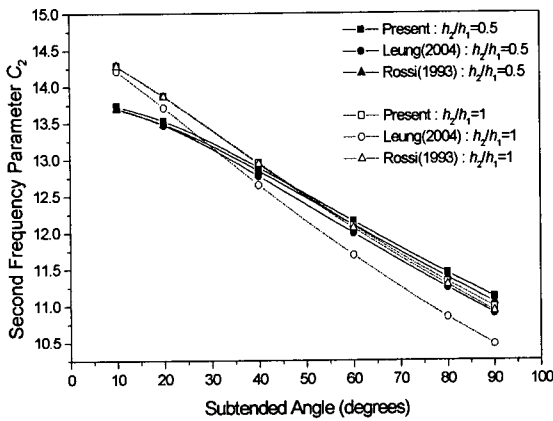


Fig. 5 The second frequency parameter  $C_2$  for tapered cantilever arches( $\alpha R/r_1 = 10$ )

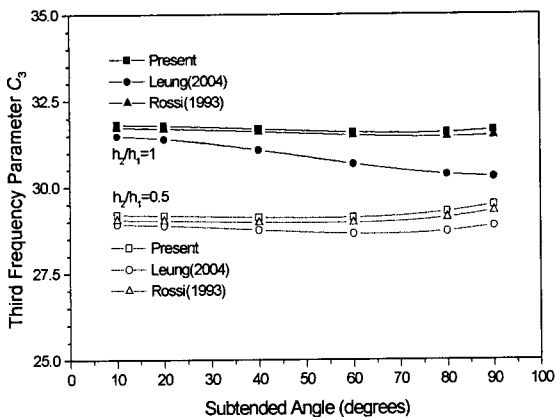


Fig. 6 The third frequency parameter  $C_3$  for tapered cantilever arches( $\alpha R/r_1 = 10$ )

### 5.2 힌지된 아치

Fig. 7은 양단이 힌지된 곡선보를 보여주고 있다. 곡률반경을 고정하였을 때, 곡선보의 각도변화가 고

유진동수에 미치는 영향을 살펴보기 위해서  $\alpha$ 를 10도부터 350도까지 변화시키면서 해석하였다. 해석을 위해서  $R = 304.8\text{mm}$ ,  $h = 6.35\text{mm}$ ,  $A = 100.84\text{mm}^2$ ,  $I = 338.73\text{mm}^4$ ,  $E = 209.6\text{GPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 7.85 \times 10^{-6}\text{kg/mm}^3$ ,  $k = 0.8497$  등의 값들이 사용되었다.<sup>12,14)</sup> Fig. 8은 본 논문에서 제안된 요소를 2개 및 5개로 분할하여 해석한 결과와 Leung과<sup>12)</sup> Heppler의<sup>14)</sup> 결과와 비교한 그림으로 제안된 요소가 참고문헌의 결과와 잘 일치하고 있음을 다시 한 번 확인할 수 있다. 또한, 곡률이 일정한 경우 각도를 변화시킬 때 약 100도까지 1차 고유진동수가 비교적 큰 폭으로 감소함을 알 수 있다.

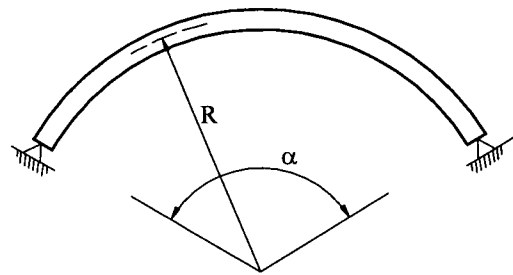


Fig. 7 Hinged-hinged circular arch

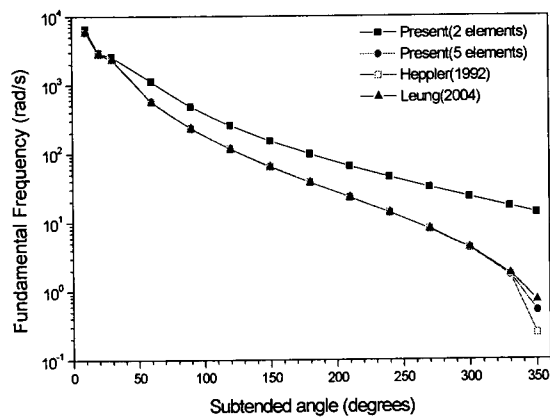


Fig. 8 The fundamental frequency values of hinged-hinged circular arches for various subtended angle (rad/s)

### 5.3 곡률 및 경계조건에 따른 특성

Fig. 9와 10은 10개의 요소를 사용하여 계산한 아치의 양단의 지지조건과 곡률변화에 따른 1차 및 2차 고유진동수 값들의 변화를 보여주고 있다. 아치

의 길이  $L$ 을 508mm로 고정시키고 각도  $\alpha$ 를 변화시키면서 해석하였으며,  $h = 6.35\text{mm}$ ,  $A = 100.84\text{mm}^2$ ,  $I = 338.73\text{mm}^4$ ,  $E = 209.6\text{GPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 7.85 \times 10^{-6}\text{kg/mm}^3$ ,  $k = 0.8497$  등의 값들이 사용되었다. 해석을 위해 clamped-clamped(CC), clamped-hinged(CH), hinged-hinged(HH) 그리고 clamped-free(CF)의 4 가지 경계조건을 고려하였다.

해석결과로부터 양단이 고정된 경우 1차 고유진동수는 약 20도까지 2차 고유진동수는 약 40도까지 굽힘강성에 의해 값이 급격하게 증가함을 알 수 있다. CC, CH, HH 그리고 CF 순으로 고유진동수가 커졌으며, CF의 경우는 2차 고유진동수는 1차 고유진동수와 달리 각도가 커질수록 감소하는 경향을 보이고 있다.

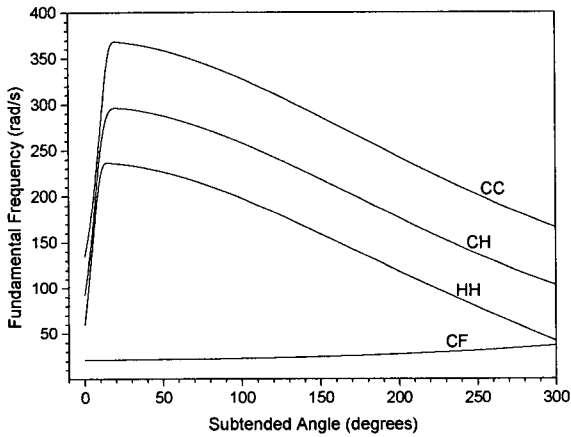


Fig. 9 The effect of curvature and boundary condition on the fundamental frequency for arches with a fixed length

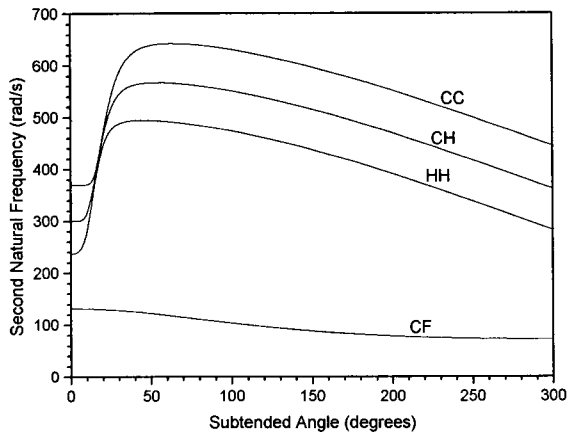


Fig. 10 The effect of curvature and boundary condition on the second natural frequency

for arches with a fixed length

## 6. 결 론

본 논문에서는 곡선보의 진동해석을 수행할 수 있는 3절점 혼합유한요소를 정식화하였으며, 제안된 요소를 이용하여 다양한 조건에 대하여 곡선보의 진동특성을 해석하였다. 제안된 요소는 변위장과 응력장에 대해서 각각 독립적으로 보간함수를 가정하고 전단변형률을 고려한 3절점 곡선보요소로서, 진동해석에서 강성과잉과 같은 수치적 문제점없이 정확한 해석결과를 얻을 수 있음을 확인할 수 있었다. 그리고, 아치의 경계조건, 곡률 및 형상 등이 진동특성에 미치는 영향을 자세하게 살펴보았다.

참고 문헌

1. D.G. Ashwell, A.B. Sabir, 1971, "Limitations of certain curved finite elements to circular arches", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 13, pp. 133-139
2. D.J. Dawe, 1974, "Numerical studies using circular arch finite elements", *Computers & Structures*, Vol. 4, pp. 729-740
3. A.K. Noor, J.M. Peters, 1981, "Mixed models and reduced/selective integration displacement models for nonlinear analysis of curved beams", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 17, pp. 615-631
4. H. Stolarski, T. Belytschko, 1982, "Membrane locking and reduced integration for curved beams", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 49, pp. 172-176
5. G. Prathap, G.R. Bhashyam, 1982, "Reduced integration and shear flexible beam element", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 18, pp. 195-210
6. G. Prathap, C. Ramesh Babu, 1986, "An isoparametric quadratic thick curved beam element", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, pp. 1583-1600
7. A.F. Saleeb, T.Y. Chang, 1987, "On the hybrid-mixed formulation  $C^0$  curved beam elements", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 60, pp. 95-121
8. J.G. Kim, Y.Y. Kim, 1998, "A new higher-order hybrid-mixed curved beam element", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 43, pp. 925-940
9. 김진곤, 박용국, 2006, "곡선보의 자유진동해석을 위한 고차 혼합요소", *한국전산구조공학회 논문집 제 19권 제 2호*, pp. 151-160
10. K. Washizu, 1982, "Variational methods in elasticity and plasticity", Pergamon press, Oxford.
11. 민옥기, 김용우, 유동규, 1990, "곡선보의 강성 과잉현상과 고유치에 관한 연구", *대한기계학회 논문집 A권 제 14권 제 2호*, pp. 310-323
12. A.Y.T. Leung, Bin Zhu, 2004, "Fourier p elements for curved beam vibrations", *Thin-Walled Structures*, Vol. 42, pp. 39-528
13. R.E. Rossi, P.A.A. Laura, 1993, "Dynamic stiffening of an arch clamped at one end and free at the other", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 160, pp. 190-192
14. G.R. Heppler, 1992, "An element for studying the vibration of unrestrained curved Timoshenko beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 158, pp. 387-40