韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 20집 제1호, 2006. 2. 33-59

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 20 No 1, Feb. 2006. 33-59

개방형 문제 해결과정에서 수학 영재아와 수학 우수아의 행동특성 분석[1)]

신 인 선 (한국교원대학교)
김 시 명 (대전과학고등학교)

본 연구는 과학고등학교의 구성원인 수학 영재아와 수학 우수아의 개방형 문제 해결과정에서 나타나는 행동특성을 살펴봄으로써 과학고등학교의 설립취지인 영재교육의 의미를 되새기고, 학교 교육의 본질적 기능인 학습자의 수준에 맞는 '의미 있는 학습'이 이들에게도 실현될 수 있는 연구의 토대를 마련하고자 한다.

연구를 위하여 과학고등학교 1학년 학생 중 3단계 판별절차를 거쳐 연구대상 학생 8명(수학 영재아 4명, 수학 우수아 4명)을 선발하였으며, 문헌연구를 통하여 마련한 틀에 의하여 두 그룹 학생의 행동특성을 분석하였다.

이렇게 실시한 연구의 결론은 (1) 과학고등학교 학생들의 구성을 우수 동질집단으로만 볼 것이 아니라, 수학적 행동특성 전 분야에서 우수성을 나타내는 수학 영재아와 수학 교과 학습능력이 우수한 수학 우수아로 나누어져 있음을 인정해야 한다. (2) 과학고등학교의 구성원인 수학 영재아와 수학 우수아 두 그룹 사이의 행동 특성 차이를 이해하고, 과학고등학교 교육과정이 일반계 고등학교와 동일한 교육과정에 대한 속진·심화 학습의 형태로 운영되어서는 안 되며, 영재교육기관으로서 이들의 특성에 알맞은 창의성 신장을 위해 수업이 이루어져야 하겠다.

이러한 연구 결과를 바탕으로 수학 영재아들이 보통의 수학 우수아들과 동일한 교육에 의해 보편화되는 일을 줄이고 학교교육의 본질적 기능인 학습자에게 '의미 있는 학습'을 유발할 수 있는 지원방안을 모색할 필요가 있겠다.

I. 서 론

A. 연구의 필요성과 목적

21세기는 고도의 지식기반 사회이며 정보화 시대에서 고도의 정보가치를 실현하고 새로운 기술과 이론을 창출해 낼 수 있는 고급 두뇌의 양성은 국가의 운명과 직결된 문제이다. 이러한 인식 하에 세계 각국은 수학 및 과학 영재들의 발굴과 교육을 위한 국가적인 차원의 시스템을 구축하고 있다.

---

1) 이 논문은 한국교원대학교 2003년도 기성회계 학술연구비 지원을 받아 수행하였음.
* ZDM 분류 : C44
* MSC2000 분류 : 97C30
* 주제어 : 수학 영재아, 행동특성,

우리나라의 경우도 수학 및 과학 분야의 고급두뇌 양성의 중요성을 인식하고 1983년에 최초로 과학고등학교를 설립한 이래 현재 전국에 1개의 과학영재학교와 17개의 과학고등학교를 설립 운영하고 있다. 또, 2000년 1월 28일 공포된 영재교육진흥법에 따라 각 지역교육청에서는 엄격한 절차를 거친 극소수의 영재아를 대상으로 하는 영재학교와 영재학급, 영재교육원이 설립되어 운영되고 있다.

과학고등학교는 수학 및 과학 분야의 영재교육을 위하여 설립, 운영되고 있는 특수목적 고등학교이다. 이러한 취지에서 설립된 과학고등학교 입학생들의 수학 및 과학 분야 학습 능력에 대해 살펴보면, 중학교 1학년 시절 학교에서 실시하는 수학·과학 영재학교, 2학년 시절 지역교육청 주관으로 실시하는 수학·과학 영재학급, 3학년 시절 시·도 교육청(또는 교육과학연구원)에서 주관하는 수학·과학 영재교육원을 수료한 후 입학하여 자신의 수학·과학적 재능을 발휘하고 있는 수학·과학 영재 학생(이하 수학부분 수학 영재아)들로 구성되어 있기도 하지만, 중학교(9학년)까지의 정규 교육과정을 충실히 이행하여 수학·과학 교과 및 외국어 영역의 성적이 우수한, 즉 내신 성적이 좋은 학생(이하 수학부분 수학 우수아)들로 구성되어 있다. 3개년(2003~2005)간 과학고등학교 신입생 선발과정에 참여하고, 수학교과 수업을 해 본 경험으로 미루어 입학 전 영재교육 경험에서 차이를 나타내는 위 두 그룹 학생들은 교과활동 및 행동특성에서 차이를 나타나고 있음을 느낄 수 있었다.

Sternberg(2000)에 따르면, 전문성(expertise)이란 이미 발달이 완성된(developed) 종착점이 아니라, 끊임없는 발달의 과정 중(developing)에 있는 것으로 보아야 하며, 따라서 뛰어난 재능을 지닌 사람은 그러한 전문성을 계속적으로 발달시킬 필요가 있다. 만일, 계속적인 발달이 이루어지지 않는다면, 그들은 더 이상 영재로 판별되지 않거나, '한 때의 영재(has-beens)'로 인정될 뿐이다. 그는 어린 시절 영재로 판별된 사람이 성인이 되어서도 진정한 영재로 인정받기 위해서는 '영역(domain)'에 대한 외현적 지식과 '분야(field)'에 대한 암묵적 지식을 모두 획득, 저장, 활용하여야 한다고 제시하였다(김민강, 2003).[2)]

그렇다면 과학고등학교가 영재교육기관으로 그 취지를 살리기 위해서는 영재성 발달을 위해 끊임없이 노력하여야 하나 현재 과학고등학교의 수학 교과 수업은 속진·심화학습 위주로 운영되어지고 있다. 교과활동 및 행동특성의 차이를 보이고 있는 수학영재아와 수학우수아가 과학고등학교 교육과정 운영에 맞추어진 교과 교육목표에 따라 동일한 수업을 듣고 있는 것이다. 제7차 교육과정에서 수준별 교육과정을 도입함으로써 교육의 학습개인차 문제를 교육과정 차별화 정책에 의해 완화하려는 연구가 활발히 이루어지고 있다. 과학고등학교 학생들의 집단을 우수 동질집단이라고는 하지만 수학교육에 있어 학습 및 학습활동의 개인차가 나타나는 수학영재아와 수학우수아의 구분에 대한 연구도 활발히 이루어져야 한다는 생각이다. 본 연구는 이러한 취지의 일환으로 수학영재아와 수학우수아의 수학 창의성 측정 및 발달에 효과적인 개방형 문제의 해결과정을 통해 이들의 행동특성을 살펴보고자 한다. 이는 국가발전의 기반이 되는 영재의 육성을 위한 교육기관으로서 과학고등학교의 설립취지에 맞는 학생선발이 이루어지고, 학교 교육의 본질적 기능인 학습자의 수준에 맞는 '의미 있는 학

2) 김민강(2003), p.12

습'이 이들에게도 실현될 수 있는 연구의 토대를 마련해 줄 것으로 기대된다.

B. 연구문제

본 연구는 수학 영재아와 수학 우수아들의 개방형 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 행동특성을 기존에 개발된 수학 영재 행동 특성 설문지를 참고로 분석틀을 만들어 이 두 집단을 비교·분석하는 것이며, 이를 위하여 '개방형 문제 해결과정에서 나타나는 수학 영재아와 수학 우수아의 행동특성은 어떠한가?'라는 연구 문제를 설정하였다.

C. 용어의 정의

1. 수학 영재아와 수학 우수아

(1) 수학 영재아 : 과학고등학교의 1학년 학생 중 다음에 해당하는 학생을 수학 영재아라 한다.

(가) 수학영재교육원을 수료한 학생 및 수학교과 학업성취도가 40%이내인 학생(10명 선발)

(나) 3월 실시한 종합능력검사(한국가이던스) 중 지능지수가 상위15% 이내이거나 7월 실시한 수학 창의력 검사지(한국교육과정평가원)에 의한 검사결과 그 능력이 우수한 학생(7명 선발)

(다) 고난도의 수학적 창의력을 필요로 하는 문제를 제공하여 특별한 재능을 나타내는 학생을 수학교과 담당 교사와 협의에 의해 선발(4명 선발)

(2) 수학 우수아 : 과학고등학교의 1학년 학생 중 다음에 해당하는 학생을 수학 우수아라 한다.

(가) 수학 영재아에 해당되지 않는 학생(10명 선발)

(나) 과학고등학교 입학전형에서 제출한 중학교 생활기록부의 수학 성적이 상위 5% 이내인 학생(7명 선발)

(다) 1학년 중 실시한 수학 관련교과(수학 10-나, 수학Ⅰ) 성적이 모두 상위 60% 이내인 학생(4명 선발)

2. 개방형 문제

개방형 문제에 대하여 여러 가지로 정의하고 있는데, 본 연구에서는 다음과 같은 문제를 개방형 문제라 한다.

(1) 출발 상황, 곧 문제의 제시는 비교적 명확하게 되어 있지만, 종착 상황, 곧 정답이 여러 가지인 문제

(2) 학생들이 접근 방식이나 정답 등을 선택하는 권한을 행사할 수 있는 문제

(3) 학생들이 고차원적인 사고력을 발휘하고 그것을 드러낼 수 있는 문제

(4) 학생들이 정답을 찾아가는 과정에서 다양한 사고를 할 수 있는 문제

3. 행동 특성

수학 영재의 특성에 대한 대부분의 연구들에서 행동 특성을 인지적인 사고 기능과 정의적인 특성으로 나누어 정리하였으며, 본 논문에서는 수학 영재 행동 특성을 황동주(2005)의 분류를 따라 다음 7개 영역[3)]으로 나누어 알아보고자 한다.

(1) 일반적인 수학정신 능력(GMA) : 계산속도, 속도와 능숙한 과정, 수에 대한 관심 및 감각, 수학에 소질, 이해력, 적용 능력, 기억력, 흥미, 타고난 수학적 소질과 적성, 수식이나 기호로 조직하고 표현, 다양한 풀이 전략, 추론 능력

(2) 수학적 능력(MA) : 문제 설정, 추상화 능력, 사고의 전환, 일반화 능력, 상상력, 유연성, 정보수집과 조직화 능력, 논리적인 정확성, 자료의 소화 능력, 독창성, 자료의 표현 능력

(3) 정보수집과 처리능력(POMI) : 오류에 대한 비판 능력, 전체와 핵심, 패턴과 관계를 파악, 정보를 구별하는 능력, 효과적인 문제 풀이, 정보수집, 계산결과 정확성, 언어적 표현력

(4) 수학과 연결성(MC) : 나의 생활 수학과 관련, 수학이라는 렌즈를 통해 세상을 봄, 수학의 연결성에 관심, 도전적인 수학 퍼즐, 게임, 지속적으로 수학을 공부하고 싶은 마음, 주변에 수학적 상황에 민감

(5) 과제 집착력(TC) : 문제에 대한 끈기와 집착성, 호기심, 문제 집중력, 수학에 대한 자신감, 애매모호함에 대한 참을 성 도전적인 문제 갈망

(6) 의사소통 능력(CA) : 대가와 같은 질문, 아이디어의 표현 능력, 언어 전달 능력, 언어 전달 능력, 자기가 확신하는 것에 대한 신념과 고집

(7) 독립심(I) : 반복을 싫어함, 전이, 파지하는 능력, What if 전략

D. 연구의 제한점

1. 소수의 특성이 전체 학생들에게 일반화할 수 없다.

수학 영재아와 수학 우수아의 창의적 행동특성 분석하기 위한 질적 사례연구로서 결과를 일반화하기보다는 학생들의 행동특성을 분석한 자료를 제공하는 데 그 목적이 있다. 즉, 학생들의 개방형 문제 해결과정에서 나타나는 행동특성을 분석하기 위해서는 학생 수준에 적합한 개방형 문항이 개발 적용되어야 하며, 장기적인 관찰을 필요로 한다. 그러나 본 연구에서는 기존의 개방형 문항을 참고로 만들어진 문항을 적용하였으며 단기간의 관찰을 통해 나타난 행동특성을 살펴보았기에 문제해결과정에 나타나는 행동특성을 모두 밝혔다고 보기 어려우며, 학생의 개인차가 많이 나는 연구이기에 일반적으로 적용된다고 보기 어렵다. 단지 수학영재아와 수학우수아의 개방형 문제해결과정에 타나나는 행동특성의 차이의 일면을 보여주는 것으로 의미를 축소하였다.

---

3) 황동주(2005), pp.32-39

2. 문항의 개수가 적다

본 연구에 사용한 개방형 문항은 7개의 과제로 이루어져 있다. 개방형 문제의 유형으로는 관계나 법칙을 찾아내는 문제, 분류하는 분제, 수량화 문제, 역문제, 조건불비의 문제, 구성활동적 문제 등이 있으나 모든 유형의 문제를 만들어 적용하지 못하였으며, 제한된 시간에 영재아와 우수아의 창의적 문제해결의 행동특성을 분석하기 위해서 좀 더 다양한 개방형 문항을 적용해 보지 못한 것이 제한점이다.

3. 유사한 문제를 풀어본 경험이 있을 수 있다.

본 연구에서 의도한 바는 학생들에게 전혀 새로운 영역의 수학적 과제를 제시하여 해결하게 함으로써 두 집단 간의 문제해결에서 나타나는 행동특성을 분석하고자 하였으나 선행학습이 되어 있는 아이들은 수학적 접근에 있어서 좀 더 수월했을 수도 있고, 또 이러한 선행학습이 창의적인 발견을 방해하는 요소가 되어 독특한 아이디어를 내는데 장애가 되었을 수도 있다.

4. 문제해결 과정에서의 행동특성에 대해서만 살펴보았다.

수학 영재아와 수학 우수아가 가지는 행동특성은 일상의 모든 상황에서 살펴볼 수 있으나 본 연구에서는 개방형 문제의 해결과정에 나타나는 두 집단 사이의 행동특성에 대해서 살펴보기 때문에 모든 행동특성을 대표한다고 하기 어렵다는 것이 제한점이다.

5. 개방형 문제에 대한 평가기준이 애매하다.

개방형 문제는 그 평가기준이 애매할 수 있고, 교사의 가치관에 다라 그 기준이 바뀔 수도 있다. 왜냐하면 인간의 유창성, 융통성, 독창성 등의 성향 자체가 매우 추상적인 영역이기 때문이다.

Ⅱ. 문헌검토

A. 수학 영재 판별

수학 영재를 판별하는 과정은 실제로 수학 영재성을 갖춘 학생이 잘못된 선발 절차로 인하여 선발되지 못하여 개인적, 사회적, 국가적으로 손실을 미칠 수 있다. 김홍원 외(1996)는 수학 영재를 판별할 때 지켜야 할 몇 가지 원칙을 제시하고 있다.

첫째, 수학 영재성이 나타나는 다양한 측면을 평가하여야 한다. 수학 영재성은 지적 능력, 정의적 태도, 행동, 산출물의 여러 측면에서 나타나므로 수학 영재를 판별할 때는 가양한 검사도구와 방법을 활용하여야 한다.

둘째, 수학 영재의 판별은 다양한 방법으로 그리고 계속적으로 이루어져야 한다. 몇 개의 검사를

동시에 실시하여 판별하는 일회적인 판별절차를 통하여 수학 영재를 바르게 판별할 수 없으므로, 추천, 검사 실시, 영재 교육 프로그램에의 배치, 수행과정의 관찰 · 평가와 같은 장기간의 지속적인 검사와 평가를 통해서 바르게 판별하여야 한다.

셋째, 가급적 조기에 수학영재를 판별하여야 한다. 외부의 적절한 자극과 도움을 받지 못하면 재능이 쉽게 사라질 수도 있기 때문에 어렸을 때부터 수학 영역에서 뛰어난 능력을 보이는 아동들을 조기에 발견하여 적절한 교육을 제공하여야 한다.

넷째, 학생들의 수학 영재성을 정확하게 변별하기 위해서는 충분히 수준 높은 검사를 활용해야 한다. 우수한 학생들만을 모은 과학고등학교에서도 그 수준 차이가 매우 크듯이 영재라고 해서 비슷한 능력을 지니고 있는 것은 아니다.

다섯째, 판별대상에 따라 적합한 방법을 사용해야 하는바, 학생의 연령, 신체적 · 정신적 특성에 따라 적합한 방법과 검사 도구를 활용해야 한다.

여섯째, 수학 영재의 판별은 배타성보다 포괄성의 철학을 바탕으로 이루어져야 한다. 영재 판별은 영재성이 없는 학생들을 제외한다는 배타성의 철학이 아니라, 학생의 특성을 발견하여 가능한 한 프로그램에 참여시킨다는 포괄성의 철학을 바탕으로 해야 한다.

일곱째, 영재 판별과정과 교육프로그램 간에는 체계적인 연계가 이루어져야 한다. 영재 판별에서 수지된 자료는 일회적인 규정이나 명명을 위해서가 아니라 누적적으로 보관, 활용하면서 모든 학생이 참여하는 교육활동의 개선을 위한 자료로 활용되어져야 한다.

영재 판별 절차에 관한 이론으로는 선별, 선발, 변별의 3단계를 거쳐야 한다는 폭스(Fox)의 판별절차, 렌줄리(Renzulli)의 판별 절차, 조석희의 판별절차, 서정표의 판별절차 등이 있는데, 이 글에서는 김홍원 외(1996)의 3단계 판별 절차인 <그림 1>을 소개하기로 한다.

선별(screening) (1차 판별)	선발(selection) (2차 판별)	변별(differentiation) (3차 판별)
① 교사의 관찰 ② 지능지수 ③ 수학학업 성취도 ④ 10-15%정도 선발	① 수학창의적 문제해결력 검사 ② 수학 행동특성검사지 ③ 기타 표준화된 검사 ④ 5%정도 선발	① 고난도의 문제제공 ② 특수교육 프로그램제공 ③ 특수한 학생은 별도의 지도를 받게 함
손쉽게 얻을 수 있는 정보나 자료를 활용	여러 가지 표준화된 검사나 특별한 검사	프로그램을 실시하면서 판별

<그림1> 수학 영재 판별 절차

B. 수학적 능력과 행동 특성

수학적 능력과 행동 특성을 황동주(2005)의 논문에서는 일반적인 수학 정신 능력(General Mathematical mental ability), 수학적 능력(Mathematical ability), 정보수집과 처리 능력(Processing and Obtaining Mathematical information), 의사소통능력(Communication Ability), 과제 집착력(Task Commitment), 독립성(Independence), 수학과 연결성(Mathematical Connect)으로 7가지 특성으로 분류하였다.

1. 일반적인 수학정신 능력

(1) 이해와 적용

수학 영재 학생들은 우수한 기억력, 언어 이해력과 올바른 수학적 언어사용이 가능하며, 상징, 수, 공식에 대한 수학적 기억력과 문제 해결의 원리, 방법, 증명과 해법에 대한 일반적 기억능력을 가진다. 그들은 또한 수학적 아이디어를 매우 빨리 이해하기 위한 대단한 능력을 가지고 있다. 수학적 개념을 빠르고 깊은 이해를 하고, 빨리 쉽게 배우며, 적용하는 것이 빠르다. 친숙하지 않은 상황을 수학적 개념으로 전이하고 적용시키는 능력을 가지고 있다.

(2) 추론능력

수학 영재들은 복잡한 형태의 추론 기술과 분석적이고 연역적이며 효과적인 귀납적인 추론 능력을 가지고 있으며, 이러한 추론 능력은 수학에서 높은 사고 능력과 관련이 있다. Krutetskii(1976)는 수학적 추론의 간략화와 단축된 구조를 이용한 사고 능력뿐만 아니라 수학적 추론의 가역성뿐 아니라 정신적(암산) 과정의 신속함과 자유로운 재구성까지 말하고 있다.

(3) 속도와 능숙한 과정

수학 영재들은 수에 대한 관심, 감각과 계산 능력을 가지고 있으며, 수학 계산이 빠르다. 또한 수학적 대상, 관계 그리고 연ㄱ산에 대한 신속하게 정보를 처리할 수 있는 능력을 가지며, 지루한 계산은 피하고 사고의 속도와 능숙한 과정을 통하여 문제해결에서 새로운 방법이나 다양한 풀이전략을 사용한다.

(4) 흥미와 소질

수학 영재들은 새롭고 흥미 있는 수학에 항상 동기가 높고 과제의 완성 정도가 높으며 자주 개인적인 목표의 성취를 추구한다. 그들은 타고난 수학적 소질과 적성을 가지며 그러한 흥미와 소질을 통하여 수학 학습을 추구하는 능력을 가지고 있다. 수학 영재는 자기 자신에 대한 확고한 신념과 고집이 매우 강하며 수학에 대한 자신감을 가지고 있고 어렵고 복잡한 문제를 고집하는 능력을 통하여 매우 도전적인 과제를 수행하기 원한다. 일반적으로 성공할 수 있다는 믿음을 가지고 있고 이러한 믿음은 그들 자신의 수학적으로 성공하는데 매우 중요한 역할을 한다. 수학 영재는 수치적 정보에 대한 강한 호기심과 특출한 지각력을 가지고 있으며 수학과 과학에 높은 흥미를 가지고 있다. 이러한 흥미와 수학적 성취는 수학 영재를 선별하는데 이용된다. 그리고 대부분의 연구에서 볼 수 있듯이 수학 영재아들은 높은 성취를 보인다. 그러나 이러한 높은 성취가 수학 영재라는 보장은 없다. 또한 표준화된 성취검사는 수학에서 영재 학생들을 판별할 수 없다. 이러한 이유는 표준화된 성취검사는 매우 낮은 수준에 집중되어 있기 때문이다.

2. 수학적 능력

(1) 직관적 통찰 능력

수학 영재는 주어진 정보나 조건들 사이의 관계나 구조의 본직적인 핵심을 직감적으로 파악해 내며, 문제 해결의 결정적 단서를 순간적으로 떠오르게 하는 직관적 통찰 능력을 가지고 있으며 오래된 인문학자는 수학의 지식 구조와 수학의 내재적 가치를 매우 중요한 수학 이데올로기로 보고 있다. 이러한 능력은 수학자들이 연구를 하는데 매우 중요한 능력 중의 하나이다.

(2) 정보의 조직화 능력

수학 영재들은 주어진 문제에서 필요한 정보를 수집하고, 문제해결의 전략을 사용할 수 있도록 이를 분류하고 조직하는 능력이 매우 중요하다. 이러한 능력은 수학문제에서 관련된 정보와 관련되지 않은 정보를 구별하는 능력으로부터 문제해결에서 관련된 개념정보를 이끌어 내는 능력과 형식적 인식, 조절과 조작 능력을 가지고 있으며 정보(자료)를 구성하고 체계화하는 정보의 조직화 능력을 가지고 있다.

(3) 추상화 능력

수학 영재들은 패턴과 사고의 추상화를 찾는 높은 능력, 추상적 사고 능력과 시각적 추상화 관련 능력을 가지고 있으며 수와 공간적 관계에 대한 논리적이고 상징적인 사고능력을 가지고 있다.

(4) 시각화/공간화 능력

시각화/공간화 능력은 주어진 공간적 정보를 머릿속에서 가시화하여 그려볼 수 있는 능력으로 많은 학자들이 수학 영재의 행동 특성이라 말하고 있다. 수학 영재는 시각화/공간화 능력인 추상적인 수학적 관계를 시각화 능력, 문제의 공간적 상상을 창조할 수 있는 공간화 능력과 공간적 방향 능력을 가지고 있다.

(5) 일반화/적용 능력

수학 영재들은 새로운 내용으로 생각이 전이되고 친숙하지 않은 상황을 수학적 개념으로 전이하는 능력과 새로운 상황에 적용 및 전이하는 능력이 빠르다. 그리고 수학적 대상, 관계 그리고 연산에 대한 신속하고 광범위하게 일반화하는 일반화 능력과 일반화를 이해하는 능력이 매우 빠르다.

(6) 수학 창의성(Mathematical Creativity)

창의성은 영재성을 규정짓는 가장 핵심적인 요인이며 수학 창의성과 흥미는 수학 영재의 특성을 측정하는 좋은 도구이다. 수학 창의성에서 중요한 요인 중의 하나는 고정된 사고를 극복 능력이다. 이러한 고정화 극복 능력은 수학적인 사고 과정의 전환으로부터 얻을 수 있다. 수학 영재의 특성으로 정신적(암산) 과정의 유연성과 수학적 활동에서 지적 처리과정의 유연성과 가역성이 강조되고 있으며 판에 박힌 형태보다는 유연하고 창조적으로 수학적 문제를 생각하고 해결하는 능력과 해답 추구 과정의 일관성과 융통성이 강조되고 있다. Greens(1990)는 자료를 다루는 유연성과 독창적인 해석을 수학 영재의 특성으로 보고 있으며 창의성의 하위요소인 민감성, 상상력과 융통성뿐만 아니라 독창적이고 깊은 아이디어를 산출한다.

3. 정보수집과 처리 능력

수학 영재는 수학적 제재의 형식화된 인식 능력, 문제의 형식적인 구조를 이해하는 능력인 수학 정보 수집 능력과 수학적 정보에 대한 강한 호기심을 통하여 전체와 핵심, 패턴과 관계를 파악하는 능력을 갖는다. 그들은 문제해결에서 관련된 개념 정보를 이끌어 내는 능력과 수학 계산 결과가 정확하다.

수학 영재는 하나의 문제를 해결하기 위하여 다양한 방법을 찾는 능력과 효과적인 문제해결 전략을 사용하고 개발하며 해의 명확성, 단순성, 경제성, 합리성 추구에 대한 노력을 추구한다. 수학 문제에서 관련된 정보와 관련되지 않은 정보를 구별하고 오류에 대한 비판 능력과 형식적 인식, 조절, 조작 능력을 가진다.

4. 의사소통능력

수학에 대해 그리고 수학을 통한 의사소통 하는 능력은 매우 강조되고 있다. 이러한 것은 수학 영재에게도 마찬가지로 중요하다. 수학 영재들은 보다 좋은 수학적 언어사용 능력과 올바른 수학적 언어사용이 가능하며 엄밀한 의사소통을 좋아한다. 수학 영재는 지식의 구성, 아이디어의 의사소통과 논의에 대하여 확신을 가지고 있으며, 수학적 대상, 연산에 대한 신속함과 다른 기호를 사용하는 능력뿐만 아니라 자료를 구성하는 능력, 정보를 표현하는 능력, 수학적 개념, 과정과 해를 언어적으로 잘 표현하는 능력 등을 가지고 있다.

5. 과제 집착력

수학 영재는 과제 집착력, 동기, 호기심과 집중력을 가진다. 그들은 변화를 읽을 수 있으며 문제에 집중하고 초점을 맞춘다. 문제 해결과정에서의 힘과 인내력을 가지고 문제를 풀이하는 것을 기꺼이 열심히 하고 활동력과 지속성을 유지하며 수학을 배우려는 것을 추구한다. 또한 수학 연구에 완고하고 성실하다. 그들은 퍼즐과 논리문제와 같은 어려운 문제를 해결하는 것을 좋아하고 문제를 매우 끈질기게 추구하고 집중을 유지하며 집중의 길이가 길다.

6. 독립성

수학 영재의 행동 특성에서 인지적인 측면도 중요하지만 정의적인 측면도 매우 중요하다. NCTM(2000)은 수학적 능력에서 정의적인 능력 중에서 수량적 정보와 공간적 정보를 찾고 평가하며 이용하려는 성향을 강조하고 있다. 이러한 수학적인 성향은 수학 영재의 특성 중에 하나이다. 이러한 수학적 성향은 반복적으로 연습하는 수학에 지루해 하고 변화를 즐긴다. 그들은 교사의 간섭을 덜 받고 매우 독립적이다.

7. 수학과 연결성

NCTM(2000)은 학생들이 수학적 아이디어를 연결할 때 수학을 더 깊게 이해한다고 하고 있다. 수

학의 연결성은 다른 주제와 관련된 수학 내용과 수학적 주제에 따라서 풍부한 상호작용을 할 수 있다. 이러한 것들은 영재 학생에게도 매우 필요하다. 수학 영재는 하나의 구조에서 다른 구조로 하나의 전략으로부터 다른 전략으로 쉽게 연결하고 수학적으로 학습한 내용을 사회적 상황, 다른 교과 내용들에 적용하는 능력을 가지고 있다. 그들은 흥미와 소질은 모든 생활이 수학과 관련이 있고 다른 영역(컴퓨터, 공학, 과학 등)에도 관심을 가지고 수학이라는 렌즈를 통하여 세상을 볼 수 있다고 생각한다.

C. 개방형 문제

1. 개방형 문제

(1) 개방형 문제의 정의

기존의 전통적인 방식을 개고 확산적이고 창의적인 사고를 자극할 수 있는 새로운 유형의 문제가 필요한데 그것이 바로 개방형 문제이다. 개방형 문제는 단답형 문항과는 구별하여 특정한 해답이 정해져 있는 것이 아니라 학생들의 창의력과 상상력 속에서 무궁무진한 해답이 나올 수 있는 것들이다. 수학적으로 개방되어 있는 문제는 수학적 접근 방법에 대해 열려 있으며, 제시한 문제에 대해 논리적이고 설득력 있게 생각을 전개해 나간다면 그 해결책은 인정되는 것이다. 개방형 문제는 결과가 미리 정해지지 않은 즉, 접근 방법과 해가 다양한 형태로 나올 수 있는 문제를 말하며, Lowen은 정의적인 문제라 하였고, 류시구(1995)는 다양한 해결방법이 있는 '탐구형 문제', 이용길(1998)은 다양한 해답이 존재한다는 의미에서 '다답형 문제'라고 하였다.

Thompson(1998)에 따르면 개방형 문제는 다양한 전략을 사용하여 다양한 결과에 이르는 것을 하용하고, 어떤 수학적 능력을 가진 학생들이고 자신의 수학적 능력을 발휘할 수 있는 기회를 제공하며, 학생들의 사고를 자극하고 확산시키며 도전감을 줄뿐더러 독자적인 해결전략을 사용함으로써 자주적이고 창의적으로 문제를 해결할 수 있는 기회를 제공하고, 수학적 추론능력과 의사소통가지도 평가할 수 있게 하는 문제라고 하였다.

문제의 유형은 여러 가지 방법으로 분류될 수 있다. 한국교육개발원(1989)은 현실적으로 문제해결력의 학습지도에 유용하게 적용될 수 있도록 문제의 유형을 다음과 같이 분류하였다.

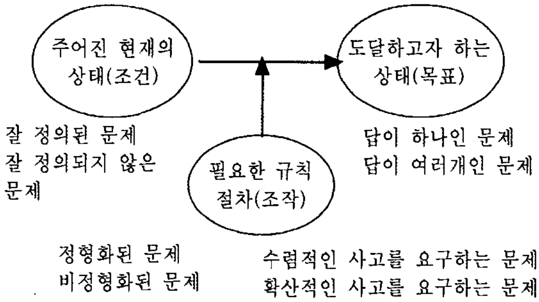
첫째, 정형 문제(routine problem) : 이미 제시된 일반적인 알고리즘을 회상하고, 그 변수에 특별한 수치를 대입함으로써 해결될 수 있는 연습문제 또는 이미 알려진 정형적인 해법에 따라 해결할 수 있는 연습 문제 등 소위 교과서적인 문제를 말한다.

둘째, 비정형 문제(non-routine problem) : 문제를 해결하는 알고리즘이나 답을 얻는 방법을 모르며, 문제해결 전략의 사용이나 공식화되지 않은 독자적인 해결방법의 사용을 요구하는 진정한 의미의 문제를 말한다.

셋째, 실생활 문제 : 취급되는 소재가 아동의 실생활에서 얻어지는 것으로써 그 해결 방안은 정형

적, 비정형적 방안을 모두 포함한다.

송상헌(1998)은 문제를 구성하는 요인을 주어진 현재의 상태(조건)와 원하는 또는 도달하고자 하는 상태(목표), 그리고 어떤 한 상태에서 다른 상태로 가는데 필요한 규칙 또는 절차(조작)로 보았다. 따라서 문제의 종류를 문제가 제시된 형태나 유형, 요구하는 사고 형태나 과정, 목표 상태인 해법의 결과에 따라, 다시 말하면 위의 세 가지 요인의 특성에 따라 <그림 2>과 같이 분류할 수 있다고 한다.



<그림2> 특성에 따른 문제의 종류

Lowen(1995)은 문제를 전통적인 문제와 창의적인 문제로 구별하였는데 창의적인 문제는 여러 가지 다양한 전략을 사용하여 해결될 수 있고, 최종적인 답이 유일하지 않은 것을 말한다.(정민주, 재인용) 완결된 문제가 있어서 그것을 아동들에게 제시하고, 여러 가지 방법으로 풀어서 결국 하나의 정답을 이끌어 낼 수 있는 문제를 닫힌 문제라 하였고, 완결된 하나의 주어진 문제에 대하여 여러 가지의 바른 답이 있는 경우를 우리는 개방형 문제 또는 다답형 문제라고 하게 된다. 이것은 정답과 하나의 법칙만을 고수하던 기존의 고정관념에 경종을 울리는 문제이며, 학생들의 평가수단으로써 기존의 지필검사가 평가할 수 없던 다면적 차원을 평가 할 수 있다는 면 외에 학생들에게 새로운 문제 상황을 제공해 보다 창의적으로 사고 할 수 있도록 도와 줄 수 있다고 본다.

(2) 개방형 문제의 유형

개방형 문제는 坪田耕三(1993)에 의해서 몇 가지 유형으로 나누어 졌다. 관계나 법칙을 찾아내는 문제, 분류하는 문제, 수량화 문제, 역(逆)문제, 조건불비(條件不備)의 문제, 구성활동적(構成活動的) 문제가 그것인 데 각 문제의 내용은 다음과 같다.

(가) 관계나 법칙을 찾아내는 문제

예컨대, 곱셈 구구단표를 보여주고, "이 표에서 나타나는 규칙을 되도록 많이 찾아보아라."와 같은 발문으로 대표될 수 있으며, 대체로 수량 사이의 함수 관계가 내재하도록 만들어진 문제이다. 수학과의 전 영역에 걸쳐 사용할 수 있는 문제이며, 이와 같은 문제를 통하여 보다 나은 방법을 찾으려는 태도를 토대로 하여 귀납적인 생각의 기초를 닦을 수 있는 좋은 기회를 제공할 수 있다.

(나) 분류하는 문제

동일 범주에 속하는 다른 구체적인 예를 많이 열거하고 그 가운데서 하나의 대상을 지정하여 그것과 같은 특징을 갖는 것들을 찾아보게 하는 문제로서, 이 경우 그 특징을 파악하는 관점이 다양할수록 많은 해가 도출될 수 있다. 이와 같은 문제는 도형영역에서 자주 사용할 수 있는 문제로서, 아동들에게 다양한 관점을 수정·발전시킬 수 있는 경험을 시킴으로써, 새로운 것을 찾으려는 태도를 형성할 수 있다. 집합의 개념이나 도형의 성질을 담는 문제일 수 도 있고 명제나 알고리즘에서도 분류의 문제를 다룰 수 있다. 보는 사람의 관점에 따라 답안이 많아 질 수 있으며, 이때 제시한 답안에 대해 관점이 독특할 경우 그것에 대한 충분한 설명이 있어서 해답을 읽는 사람을 이해시키는 것이 중요하다.

(다) 수량화 문제

정도의 차가 나타나는 구체적인 준 수학적 장면을 제시하고, 그 정도의 차이를 수량화하는 방법을 탐구하도록 하는 것으로서, “순위를 결정하는 다양하게 생각해 보아라.”와 같은 발문으로 대표될 수 있으며, 수로서 나타내는 방법이나 기준을 다양하게 정해가는 문제이다. 각각의 방법에 있어서 장·단점을 부각시켜 그것을 수정하는 등의 활동을 해 나가도록 하는 경우가 한층 효과적이다.

(라) 역(逆)문제

조건과 결론 부분을 거꾸로 구성하여 답이 유일하게 설정되지 않도록 짜여진 문제이다. 이와 같은 문제는 주로 수나 연산영역에서 효과적으로 사용할 수 있으며, 학생들의 생각의 폭을 더욱 더 확장시킬 수 있고, 학생들의 수준을 충분히 고려함으로써 적극적이고 발전적으로 수학 학습에 참여함과 동시에 다음 학습으로 연계시킬 수 있는 효과가 있다.

예 : 석이 아버지는 석이 어머니보다 2살이 많고 석이네 큰아버지보다는 2살 적다. 석이 아버지, 어머니, 큰아버지의 나이를 합하면 177세라고 한다. 석이네 아버지, 어머니, 큰아버지의 나이를 구할 수 있는 다양한 방법을 제시해 보시오.

(마) 조건불비(條件不備)의 문제

대부분 통상적인 문제와 거의 차이가 없어 보이지만, 답을 생각할 때는 주어질 수 있는 가능한 조건을 다양하게 들춰내어 각 경우마다의 답을 찾아야 하는 문제로서 예컨대, “약 5000이라는 수는 원래 어떤 수였던가?”라는 문제가 이에 해당된다. 여기에 답하는 경우에는 5000이 어떤 자리가지의 어림수인가, 반올림이나 올림, 버림 등 어떤 어림수 처리를 하느냐에 다라 다른 답을 하지 않으면 안 된다. 결국, 그 부족한 조건을 스스로 찾아서 챙겨야 하기 때문에 다양성이 보장되는 문제라 할 수 있다. 조건의 부족에 따라 부정, 불능의 문제가 될 수도 있겠지만 부정, 불능의 문제도 자연스러운 형태로의 발전으로써 나타날 수 있다고 판단되며, 아동들의 발전적인 생각을 기르는 데는 효과가 있다. 또한, 문제를 의문의 안목으로 볼 수 있는 기회가 제공됨으로써 문제를 보는 시각이 다각화될 수 있다.

(바) 구성활동적(構成活動的) 문제

실제로 아동으로 하여금 어떤 것을 만들어 보게 하는 활동으로서, 입체의 전개도를 가지고 각자 자유롭게 면을 잘라서 어떤 입체를 구성해 보도록 하는 활동이나, 기하판 위에 주어진 길이를 한 변으로 하는 이등변삼각형의 구성 활동들이 이에 해당된다. 아동 각자가 자기 나름대로 활동하여 학습목표에 타당하게 접근하도록 구성하게 하는 것은 수학교육의 미래지향적인 측명에서 매우 중요하다. 이러한 측면에서 볼 대, 이와 같은 문제는 매우 바람직하다.

2. 수학 영재 교육과 개방형 문제

NRC G/T(1993, 1994)는 수학 영재를 판별하는 방법으로 관찰, 질문에 대한 학생의 반응, 학생 산출물의 검사를 들면서, 기존의 사지선다형이나 단답형의 문제들은 학생들의 사고 능력에 관한 정보를 거의 알려주지 못하기 때문에, 한 가지 이상의 답을 요구하는 개방형 문제를 가지고 수학분야에서의 창의적 사고 능력과 표현 능력을 측정해야 한다고 주장하였다.

개방형 문제의 취지는 학생들에게 문제해결의 방법과 답을 열어 놓음으로써 서로의 생각을 비판하기도 하고 다른 답안에 대한 가능성을 계속적으로 탐구하도록 하는 기회가 주어지기 때문에 수학에 대한 흥미와 동기가 갖추어지고, 사고하고 창조하는 데에 대한 즐거움을 누릴 수 있는 아이들이라면 누구나 다 활동적으로 개방형 문제를 활용하는 수업에 임할 수 있을 것이다. 개방형 문제가 영재교육에 더욱 절실한 이유는 다양한 수학적 욕구와 다방면에서 개인적인 능력을 가지고 있는 아이들로 하여금 좀 더 구체적으로 자신의 사고를 알 수 있는 기회를 주고, 독창적인 아이디어를 발현함으로써 자신의 잠재력을 발견하도록 하는데 있다.

수학적 능력이나 학습에 대한 평가가 어려운 것은 사실이나 그렇다고 해서 평가의 초점을 단순히 지식의 습득이나 이해에만 두어서는 안 될 것이다. 그렇게 되면 진정한 수학적 능력을 가진 아이들은 사장 될 것이고 이것은 개인적으로도 사회적으로도 크나큰 손실이기 때문이다. 단순한 지식의 습득 자체도 힘들어 하는 아이나 반복적인 활동에서 흥미를 찾는 아이들도 있다. 새로운 사실에 대한 탐구보다는 기존의 것을 그대로 답습하는 데에 더욱 안정감을 느끼는 아이들도 있다. 그러나 지금까지의 연구물들이 밝혀온 영재성이나 영재들이 갖는 정서적 특징을 갖는 아이들은 지존의 전통적인 문제에 길들여질 경우 오히려 큰 손실만 가져오게 될 것이다. 개방형 문제는 무엇보다 영재아들에게 더 필요한 수업의 형식과 내용이며, 이들을 정확하게 평가할 수 있는 가장 합리적인 방법이라고 할 수 있다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

A. 연구 대상

본 연구는 대전시 유성구에 있는 과학고등학교 1학년 학생을 대상으로 4월에서 8월까지 예비 관찰을 통하여 수학 영재아 4명과 수학 우수아 4명을 선발하였다. 연구 문제인 개방형 문제 해결 과정에 나타나는 수학 영재아와 수학 우수아의 행동특성을 분석하기 위해서는 무엇보다 연구 대상을 선발하는 것이 중요한데 과학고등학교에 입학을 하기 위해서는 중학교 수학 및 과학교과에 대한 성적이 우수하여야 하므로 과학고등학교에 재학중인 학생은 수학 우수아의 범주에 속하는 것으로 하였으며, 수학 영재아는 다음과 같은 3단계 절차에 의하여 선발하였다.

(1) 1차 판별 : 교사의 관찰, 중학교 시절 영재교육원 이수 여부, 수학교과 학업 성취도

(2) 2차 판별 : 지능 지수(IQ), 수학 창의적 문제 해결력 검사

(3) 3차 판별 : 전문가(수학교과 지도 교사)와 협의에 의한 선정

위 절차에 의하여 선발된 학생의 특징을 정리하면 <그림 3>, <그림 4>와 같다.

이름 (가명)	학업성취도 (수학교과)	IQ	영재교육 이수여부	특 징
A 군	30-40%	150	이수 (수학)	수학에 대한 뛰어난 이해력과 풍부한 어휘력을 가지고 있으며, 특히 예술적 재능이 훌륭함, 학업성취도에 비해 IQ가 매우 높음
B 군	5%이내	128	이수 (수학)	수학적인 활동을 즐거워하며, 호기심이 많은 편임, 학업성취도가 매우 높음
C 군	10-20%	132	이수 (수학)	충동적이고 감정적으로 새로운 방법에 의한 풀이를 즐기는 편임, 학업성취도와 IQ가 모두 높은 편
D 군	5-10%	128	이수 (수학)	기초지식이 뛰어나며 집중력이 뛰어나 과제 해결능력이 뛰어남, 학업성취도는 높으며 IQ는 보통

<그림3> 판별된 수학 영재아의 특징

이름 (가명)	학업성취도 (수학교과)	IQ	영재교육 이수여부	특 징
가 군	20-30%	116	이수 (과학)	말을 별로 하지 않고 소극적이다. 수학적 문제를 해결하는 데 있어서 지속성을 나타냄, 학업성취도는 높으며 IQ는 조금 낮은 편임
나 군	50-60%	121	미이수	자신의 주장을 논리있게 펼칠 수 있으며 자발적으로 계획을 실행하는 능력을 지님, 학업성취도는 낮으며 IQ는 보통임
다 군	10-20%	123	이수 (과학)	지적 능력에 대한 욕심이 많으며, 모든 일에 적극적인 자세로 임함, 학업성취도는 높으며 IQ는 보통임
라 군	30-40%	127	미이수	끈기가 부족하기는 하나 지식의 습득이 빠른 편으로 능률적인 편임, 학업성취도와 IQ가 모두 보통임

<그림4> 판별된 수학 우수아의 특징

B. 연구 설계

개방형 문제의 개발 영역은 교육과정과 연계하여 고등학교 1, 2학년 교과학습 주제와 관련된 문제로 7차시 분량의 개방형 문제 해결과정 지도안을 개발하였으며, 개방형 문제 해결과정 수업은 1주일에 3~4차시씩(행사활동 시간(화요일 16시~18시), 탐구동아리 활동 시간(금요일 19시~21시)) 2주간(2005년 9월 8일~9월 18일) 수업을 실시하였으며 실험참여 학생들이 부담을 가지지 않는 수업이 되도록 한다.

학습 방법은 개별 학습과 소집단 협력학습을 적절히 활용하며, 자유로운 학습 분위기를 만들어 주어진 개방형 문제 해결을 위한 의사소통이 원활히 이루어지도록 하며, 수업을 실시하는 교사는 수업시간에 문제 해결을 위한 안내자 역할 수행하도록 하였다.

개방형 문제 해결과정에서 나타나는 수학 영재아와 수학 우수아의 행동 특성 분석을 위한 수업관찰 틀(체크 리스트 형식)은 전문가와 상의하여 제작하였으며, 행동 특성 분석 틀을 수학 영재아와 수학 우수아 개인별 및 그룹별로 작성하였으며, 이렇게 작성된 반응 분석 틀은 문제 해결과정에 보이는 행동 특성 분석과 학생 면담자료 등을 참고로 두 집단 사이의 개방형 문제 해결과정에서의 행동특성을 비교 분석하였다

C. 개방형 문제 개발

1. 개방형 문제의 개발

학생들의 수학적 사고를 육성하기 위해, 학생들이 자유롭게 사고하도록 하는 것 즉, 그들 자신의 수학적 사고방법을 사용하게 하는 것은 매우 중요하다. 이것이 개방형 문제 해결의 핵심이다. 개방형 문제의 해결은 학생들을 그 중심에 위치하게 하고, 그들이 수학을 행하고 수학적으로 사고하게 한다. 따라서 수학 지도를 위해 개방형 문제 중심의 수업을 하는 것은 학생들의 수학적 사고력을 계발하고, 수학에 대한 교사와 학생의 신념을 변화시킬 수 있다. 특히, 수학적 잠재력을 가진 학생들에게는 그들의 창의적인 능력을 훈련하고, 다른 학생들과 그들의 통찰을 공유할 기회를 제공한다.

본 연구에서는 Becker와 Shimada(개방형 교수법, 구광조 외 3인 역)와 신현용, 김원경, 신인선, 한인기(영재교육에서 창의성 신장을 위한 수학 수업 모형, 1998)가 개발한 문제를 참고로 하여 7개 과제[4)]를 개발하였다. 난이도는 고등학교 1, 2학년 수준에 맞게 조정하였다.

2. 개방형 문제의 분류

본 연구에 사용된 개방형 문제의 분류는 두 가지로 구분하였다. 첫째, 개방형 문제를 坪田耕三(1993)에 의하여 여섯 가지 분류로 나누고 있다. 즉, 관계나 법칙을 찾아내는 문제, 분류하는 문제,

4) 7개의 과제를 <부록>에 첨부하였다.

수량화 문제, 역(逆)문제, 조건불비(條件不備)의 문제, 구성활동적(構成活動的) 문제로 분류하였다. 둘째, 학습 방법에 의한 분류로 개별 학습 과제와 소집단 협동학습 과제로 분류하였다.

모든 개방형 문제를 명확하게 분류하기는 어렵지만 본 연구에 투입된 개방형 문제는 <그림 5>와 같이 나누었다.

문항	주 제	분 류1	분 류2 (학습)	교육과정
과제1	공간지각력 기르기	분류하는 문제	개별, 소집단	도형
과제2	수학적 내용의 문장완성	구성활동적 문제	개별	집합과 명제
과제3	도형의 성질 찾기	관계나 법칙을 찾아내는 문제	개별	도형, 삼각함수
과제4	함수의 성질 찾기	관계나 법칙을 찾아내는 문제	개별	함수
과제5	논리적 분석 문제	구성활동적 문제, 관계나 법칙을 찾아내는 문제	개별	수와 식
과제6	다양한 연산의 활용	구성활동적 문제	소집단	수와 식
과제7	패턴, 규칙 찾기	관계나 법칙을 찾아내는 문제	소집단	이항정리, 규칙

<그림 5> 개방형 문제의 분류

D. 행동특성 분석 틀

본 연구에서는 황동주(2005)의 수학 영재 행동 특성 설문지 개발에 관한 연구를 토대로 개방형 문제 해결에 나타난 행동특성을 (1) 일반적인 수학 정신 능력 (2) 수학적 능력 (3) 정보수집과 처리 능력 (4) 수학적 성향(수학과 연결성, 과제 집착력, 의사소통능력, 독립성) 네 가지로 분류하여 분석하였다. 자세한 분류는 <그림 6>과 같다.

분 류		내 용
일반적인 수학 정신 능력(GMA)		계산 속도, 수에 대한 관심과 감각, 이해력, 적용능력, 기억력, 수식이나 기호로 조직하고 표현, 추론 능력, 다양한 풀이 전략
수학적 능력(MA)		사고의 전환, 일반화 능력, 논리적인 정확성, 독창성, 자료의 표현 능력
정보수집과 처리능력(POMI)		오류에 대한 비판 능력, 전체와 핵심, 패턴과 관계를 파악, 효과적인 문제 풀이, 계산 결과의 정확성, 언어적 표현력
수학적 성향	수학과 연결성(MC)	수학이라는 렌즈를 통해 세상을 봄, 도전적인 수학 퍼즐, 게임, 주변에 수학적 상황에 민감
	과제 집착력(TC)	호기심, 문제에 대한 끈기와 집착성, 수학에 대한 자신감, 애매모호함에 대한 참을성, 도전적인 문제 갈망
	의사소통능력(CA)	아이디어의 표현 능력, 자기가 확신하는 것에 대한 신념과 고집
	독립성(I)	독립심, 반복을 싫어함, 전이, 파지하는 능력, what if 전략

<그림 6> 행동특성 분류 틀

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

개방형 문제 해결과정에 나타난 수학 영재아와 수학 우수아의 행동 특성 분석은 황동주(2005)의 행동 특성 분류에 의하여 그 특성을 나누었으며, 연구 대상이 작성한 학생학습지의 내용과 면담자료를 토대로 분석을 하였다.

A. 결과 분석

1. 일반적인 수학 정신 능력(GMA)

(1) 수식이나 기호로 조직하고 표현

과제6의 해결에서 수학 우수아는 기본적인 수학기호(사칙연산, 제곱근, 지수, 로그)를 사용하고 있으나, 수학 영재아는 기본적인 수학기호에 더하여 가우스함수, 조합, 계승(팩토리알)을 사용하고 있다. 즉, 수학 영재아는 보다 특색 있고, 보다 우아한 해법을 찾으려는 성향과도 관계있음을 알 수 있다. 물론 수학 영재아들이 제시하고 있는 다양한 수학기호(가우스함수, 조합, 계승(팩토리알))는 과학고등학교 교육과정에서 모두 학습한 내용으로 수학 우수아들도 알고 있는 내용이다.

예) A군 : $8^{\log_{\sqrt{9}}9}-1=63$, $8^{\log_{\sqrt{9}}9}\times 1=64$, $8^{\log_{\sqrt{9}}9}+1=65$

B군 : $9+\sqrt{9}+1+[\ln 8]=15$, $({}_{\sqrt{9}+1}C_{\sqrt{9}}+[\log 8])!=24$

과제7의 해결에서 수학적 성질을 설명하는데 있어 수학 우수아는 자신의 생각을 서술형으로 설명하고 있으나, 수학 영재아는 수식을 사용하여 간단하게 설명하고 있다. 즉, 수학 영재아는 수식이나 기호로 표현하는 능력 및 수학적 언어 사용 능력이 뛰어남을 알 수 있다.

예) 수학 우수아 : 연속하는 두 수의 합은 그 바로 아래 있는 수와 같다.

수학 영재아 : ${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r$이 성립한다.

(2) 수에 대한 관심과 감각

수학 영재아는 1이라는 수의 특성을 이용하여 세 개의 연속된 수에 대한 빠른 해를 찾아내고 있으나, 수학 우수아는 1의 특성을 파악하지 못하고 있었다.

예) C군 : $9\cdot\sqrt{9}+8-1=34$, $9\cdot\sqrt{9}+8\times 1=35$, $9\cdot\sqrt{9}+8+1=36$ 등

가군 : $(1+9)\cdot 8-9=71$, $\sqrt{9}\cdot\sqrt{9}\cdot 8\times 1=72$, $\sqrt{9}\cdot\sqrt{9}\cdot 8+1=73$

(3) 기억력

과제7의 해결에서 수학 영재아 중 C군은 ‘초등학교 시절 수학귀신(비룡소)이라는 책을 통하여 문

제에 대해 읽어본 적이 있다.'고 하였으며, 그 책에는 파스칼삼각형에는 이항정리의 계수, 피보나치 수열, 소수의 배수를 색칠하면 프랙털도형(시어핀스키)삼각형이 나타남 등을 얘기했으며, 이러한 C군의 기억력에 의하여 과제7의 해결에 수학 영재아의 진술횟수가 수학 우수아의 진술횟수보다 월등히 많아 졌음을 알 수 있다.

과제1의 해결에서는 연구대상 전원이 고등학교 입시전형에서 유사한 문제를 다루어 보았으며 수학 영재아와 수학 우수아의 문제에 대한 반응횟수가 비슷한 것으로 보아 일반적인 수학 정신 능력 중 기억력 부분에서는 많은 차이가 나지 않을 수도 있을 것 같다는 생각이며 이에 대해서 연구가 더 필요하겠다.

2. 수학적 능력(MA)

(1) 사고의 전환 및 일반화 능력

과제2의 해결에서 수학 우수아들은 주어진 조건(x, y)과 사칙연산을 이용하여 문제 해결을 하려 하였으나, 수학 영재아들은 새로운 연산을 도입하였고, 같은 형태로 나타나는 해에 대해서 일반화를 통하여 문제 해결을 하였다.

예) 수학 영재아 : xyk, $xy\pm 2k$, $x+y\pm 2k$, $x^{|y|}$ (단, k는 정수)

$kx^m y^n$ (단, k, m, n은 자연수), ${}_xP_y$ (단, $x \geq y$) 등

수학 우수아 : $x+y$, $x+2y$, $x+3y$, … 무한함, xy, $2xy$, $3xy$, … 무한함 등

(2) 논리적인 정확성

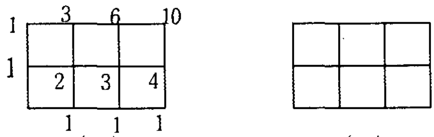
과제1의 해결에서 수학 우수아들은 주어진 입체도형에 절개선을 직접 그려서 나올 수 있는 도형을 생각하는데, 특수한 도형에서 일반 도형으로 찾아나갔다. 즉, 정사각형이 나타남을 찾고 일반적인 사각형이 나타남을 찾아갔다. 반면 수학 영재아들은 주어진 입체도형을 절개하여 다각형이 만들어지기 위기 조건에 대하여 생각하는데, 잘려진 모서리의 수가 곧 만들어질 도형의 꼭지점의 수임을 알았으며, 도형을 찾는 단계도 삼각형에서 출발하여 사각형, 오각형, … 순으로 도형의 분류에 적합하도록 체계적으로 찾아감을 알 수 있었다.

예) 삼각형 : ① 정삼각형 ② 이등변삼각형 ③ 직각삼각형 ④ 1, 2, 3을 제외한 삼각형

(3) 독창성

과제7의 해결에서 최근 교과 수업시간에 배운 내용으로 주어진 도로망에서 최단 거리로 가는 길의 수를 찾는 문제를 파스칼의 삼각형에 적용하여 설명을 하고 있다.

즉, 아래 (a)와 같은 도로망에서 A 에서 B 로 가는 최단경로의 수는 같은 것이 있는 순열로 풀 수도 있지만 (b)와 같이 숫자를 적어서 풀 수도 있다.



(a) (b)

이처럼 파스칼 삼각형의 숫자를 모두 선으로 연결하면 삼각형의 꼭지점에서 어떤 점까지의 최단 거리로 가는 경로의 수가 됨을 알 수 있다는 것을 B군이 제시하였다.

과제6의 해결에서 A군은 “수학연산을 이용하여 수들을 만들라고 하셨는데, 제가 새로운 연산을 정의 내려도 되나요?”라는 질문을 하는 것을 볼 때, 자신만의 독창적인 아이디어로 나타내려는 것을 알 수 있다.

3. 정보수집과 처리 능력(POMI)

(1) 패턴과 관계를 파악

개방형 문제의 유형인 관계나 법칙을 찾는 문제의 해결 결과 분석을 통해 알 수 있듯이 수학 영재아들이 패턴과 관계를 찾는 능력이 우수함을 알 수 있다. 특히 과제5를 살펴보면 문제에 주어진 연산이 갖는 성질을 찾아야 하는데, 수학 우수아는 교환법칙과 결합법칙에 대해서만 생각해 보고 있는 반면, 수학 영재아는 본인이 알고 있는 연산이 가질 수 있는 성질(닫혀있다, 항등원, 역원, 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙)에 대하여 먼저 생각해 보았고, 그 후 주어진 연산이 이러한 성질을 만족하는지를 살펴보려고 하였다.

(2) 언어적 표현력

수학 영재아는 과제의 해결에서 정확한 수학 기호와 수학적 언어를 사용하고 있었다. 과제5의 해결을 보면 수학 영재아는 수학 용어의 정확한 정의를 이해하고 있으며, 수학 용어를 사용하여 정확하게 표현하였다. 즉, 분배법칙을 설명하기 위해서는 두 가지 연산이 필요한데 조건에서 주어진 연산만으로는 분배법칙이 정의되지 않는다는 것을 수학 영재아는 정확히 표현하고 있으나, 수학 우수아는 분배법칙이 성립하지 않는다고 표현하고 있다.

(3) 효과적인 문제 풀이

일반적인 수학 정신 능력(GMA) 중 수에 대한 관심과 감각에 나타나듯 수학 영재아들이 대부분의 과제를 수의 특징을 이용하여 수학 우수아 보다 효과적으로 문제를 해결하고 있으나, 수학 우수아가 효과적인 풀이에 있어 우수성을 나타낸 부분도 있다. 과제6의 해결에서 수학 우수아는 복잡하거나, 생각하기 어려운 연산을 사용하지 않고 쉬운 수학기호와 사칙연산을 적절히 활용하여 과제를 효과적이고 쉽게 해결하고 있음을 알 수 있다.

예) B군 : $1=1^{998}$, $9+\sqrt{9}+1+[\ln 8]=15$, $9+9-[\ln 8]=16$

라군 : $\frac{1}{9}+\frac{8}{9}=1$, $8-\sqrt{9}+9+1=15$, $\sqrt{9\cdot 9}+8-1=16$

4. 수학적 성향 : 수학과 연결성(MC), 과제 집착력(TC), 의사소통능력(CA), 독립성(I)

(1) 독립심 및 의사소통능력

과제3의 해결에서 수학 우수아는 교과서에 나오는 수학식과 기호를 사용하여 문제를 해결하고 있으나, 수학 영재아의 경우 수학기호가 있음에도 불구하고 자신의 기호를 만들어 간략화를 시도하였다. 이는 자신의 생각을 수학적 언어를 사용하여 간략화 하는 의사소통능력과도 연관 지을 수도 있겠다.

예) $\overline{AB}$ 를 AB라 나타내기로 함, 삼각형 ABC의 넓이를 S_{ABC} 라 함,

(2) 전이, 파지하는 능력

과제4의 해결에 있어 수업시간에 유사한 문제인 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 가 조건 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 을 만족할 때, $y=f(x)$ 가 만족하는 성질에 대하여 자세히 설명하였으며, 이를 토대로 수학 영재아는 유사한 방법으로 주어진 조건에 의하여 함수가 만족하는 성질을 찾고 있다. 즉, 과정을 중요시 생각하고 이를 유사한 문제 영역으로 전이, 파지하는 능력을 보이고 있다. 수학 우수아는 결과를 중요시 하여 주어진 조건을 만족하는 함수의 형태를 기억하여, 함수를 이용하여 그 성질을 찾고 있다.

(3) 호기심

수학 영재아들은 과제의 해결에서 의문점에 대해서는 거침없는 질문을 하였다. 특히, 과제6의 해결에서 수학 영재아들은 여러 가지 연산에 대하여 질문을 하였다.

예) C군 : 루트($\sqrt{\ }$)를 사용할 수 있다고 하셨는데, 루트는 제곱근으로 2가 생략된 것이니까 세제곱근($\sqrt{3}of$)도 사용할 수 있지 않나요?

A군 : 로그, 상용로그($\log a$), 자연로그($\ln a$)를 사용해도 되나요?
가우스함수를 사용할 수 있나요?

수학 우수아 그룹의 학생들은 연구 실험이 끝난 후 실험과제에 대하여 별다른 반응을 보이지 않았으나, 수학 영재아 그룹의 학생은 실험과제에 대해 많은 것을 알고 싶어 하였다. 과제5의 해결에서 수학 영재아와 수학 우수아 두 그룹 학생들 모두 반응횟수가 적은 편이었다. 이 과제에 대하여 본 연구와 관련된 수업이 종료되었음에도 B군과 C군은 주어진 과제에 대하여 보다 많은 수학적 내용을 알고 싶어 했으며, 특히 군(Group)에 대하여 보다 많은 정보를 얻기를 원했다.

B. 논 의

본 연구는 개방형 문제 해결과정에 나타나는 수학 영재아와 수학 우수아의 행동특성을 분석하였다. 이러한 분석의 결과를 기존의 이론과 선행 연구를 토대로 논의해 본다.

첫째, 연구대상인 수학 영재아와 수학 우수아의 선발을 살펴보면, 1차 판별에서는 교사의 관찰, 중학교 시절 영재교육원 이수 여부, 수학교과 학업 성취도를 2차 판별에서는 지능지수(IQ), 수학 창의적 문제 해결력 검사를 3차 판별에서는 전문가(수학교과 지도 교사)와 협의에 의하여 선정하였다. 즉, 영재 판별 절차 이론인 선별(screening), 선발(selection), 변별(differentiation)의 3단계 과정에 의하여 수학 영재아 4명과 수학 우수아 4명을 최종 선발하였는데, 그 과정에서 두 그룹에 모두 중복되는 학생에 대해서는 본 연구대상에서 배제하였다. 두 그룹에 모두 해당하는 학생들을 배제하게 된 것은 본 연구의 목적인 수학 영재아와 수학 우수아 두 그룹 사이의 행동특성을 분석하는데 있어 보다 유용한 결과를 얻기 위함이며, 영재아와 우수아의 행동차이(그림Ⅱ-7, p.19)를 참고로 동료교사와 협의에 의하여 두 그룹의 특성을 잘 나타내는 학생을 최종 선발하게 되었다.

Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구는 수학 영재아와 수학 우수아의 개방형 문제 해결 과정에 나타나는 행동 특성을 비교 분석하였다. 분석의 결과를 기존의 이론과 선행연구를 토대로 살펴보자.

개방형 문제를 해결하는 과정에 나타나는 수학 영재아와 수학 우수아의 행동 특성 분석 결과는 <그림 6>과 같으며, 이는 문헌 연구(황동주, 2005)에서 제시하고 있는 수학 영재의 행동 특성과 유사함을 알 수 있다.

분 류	분 석 내 용
일반적인 수학 정신 능력	<수학영재아> - 수식이나 기호로 조직하고 표현하는 능력이 뛰어남 - 수에 대한 관심과 감각이 뛰어남 기억력 부분에서는 두 그룹 학생들이 모두 우수성을 보임
수학적 능력	<수학영재아> - 사고의 전환 및 일반화 능력이 뛰어남 - 논리적인 정확성이 우수함 - 독창성 발휘 능력이 뛰어남
정보수집과 처리능력	<수학영재아> - 패턴과 관계를 파악하는 능력이 뛰어남 - 언어적 표현력이 뛰어남 효과적인 문제 풀이 부분에서는 두 그룹 학생들이 모두 우수성을 보임
수학적 성향	<수학영재아> - 독립심이 강하게 나타남 - 새로운 과제에 대한 집착성이 뛰어남 전이, 파지 능력에서는 두 그룹 학생들이 모두 우수성을 보임

<그림6> 수학 영재아와 수학 우수아 행동 특성 분석 내용

이러한 분석 결과가 나타나는 것으로 볼 때 수학 창의성, 수학 문제 해결력, 수학 영재성, 수학적 태

도 등과 같은 영역을 측정 및 분석하기 위한 자료로 개방형 문제 해결과정을 살펴보는 것이 매우 유용하다는 것을 알 수 있겠다. 그리고 본 연구의 이러한 결과로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

첫째, 과학고등학교 학생들의 구성을 우수 동질집단으로만 볼 것이 아니라, 수학적 행동 특성 전 분야에서 우수성을 나타내는 수학 영재아와 수학 교과 학습능력이 우수한 수학 우수아로 나누어져 있음을 인정해야 하겠다. 교육과정은 학생들에게 수준과 능력에 알맞은 교육을 받도록 배려하려는 수월성을 추구하여야 하기에 학생들의 수준과 능력을 파악한다는 것은 교육과정의 기초가 되는 것이다. 더 나아가 과학고등학교가 영재교육기관으로 인정받는 위치에 서기 위해서는 학생의 선발, 진학지도도 중요하겠지만 선발된 학생들의 수준과 능력에 적합한 교육과정을 운영하는 것이 교육의 본질과 기본정신에 충실한 것이겠다.

둘째, 과학고등학교의 구성원인 수학 영재아와 수학 우수아 두 그룹 사이의 행동 특성 차이를 이해하고, 과학고등학교 교육과정이 일반계 고등학교와 동일한 교육과정에 대한 속진 · 심화 학습의 형태로 운영되어서는 안 되며, 영재교육기관으로서 이들의 특성에 알맞은 창의성 신장을 위해 수업이 이루어져야 하며, 또한 수학 영재아를 위한 특별한 교육 프로그램이 이루어 져서 이들을 보통의 수학 우수아들과 같은 교육에 의해 보편화되는 일을 줄이고 학교교육의 본질적 기능인 학습자에게 '의미 있는 학습'을 유발할 필요가 있겠다.

이상의 연구 결론을 바탕으로 후속 연구 및 수학 영재교육을 위해 다음과 같은 제언을 할 수 있다.

첫째, 수학 영재교육의 연속선상에서 뛰어난 재능을 지닌 영재아의 전문성을 계속 발달시킬 필요가 있으며, 여러 연구를 통해 수학적 창의성 발달을 위해 개방형 문제를 이용한 학습이 도움이 됨을 알고 있다. 개방형 문제의 적용이 수학 영재아와 수학 우수아 모두에게 수학적 성향을 발달시키고 있기에 고등학교 영재교육 기관인 과학고등학교 교육과정에 적합한 많은 개방형 문제 자료의 개발이 이루어 져야겠다. 본 연구에 활용된 7개 과제의 개방형 문제 유형이 분류하는 문제, 구성활동적 문제, 관계나 법칙을 찾는 문제들인데 이 이외에 수량화 문제, 역(逆) 문제, 조건불비(條件不備)의 문제와 같은 다양한 유형의 개방형 문제 자료의 개발이 이루어 져야겠다.

둘째, 본 연구는 현재 학생의 수학적 재능(수학 영재아, 수학 우수아)에 따라 개방형 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 행동 특성에 대하여 살펴보았다. 따라서 실험 활동에 참가한 각 그룹의 학생들이 이러한 문제 해결 경험을 통하여 수학교과 학습에 어떠한 변화가 생기는지 알 수 없다. 수학 영재성은 본인이 가진 재능을 발달시킨다면 우수아들이 영재아가 될 수 있으리라 생각한다. 따라서 이러한 경험에 대한 장기적인 관점의 사례연구가 필요하겠다.

셋째, 본 연구에 적용한 개방형 문제의 분석을 위하여 학생들이 제출한 학습지의 진술횟수를 분석하였으며, 문제 해결과정에 나타난 행동특성을 분석하였다. 만약 개방형 문제를 적용한 교수-학습이 이루어진다면 이에 따른 적절한 평가 방법이 고려하여야겠다. 즉, 본 연구를 위해 활용된 분석 자료들인 진술횟수, 오류횟수, 일반적인 수학 정신 능력, 수학적 능력, 정보수집과 처리능력, 수학적 성향이 모두 고려되어진 개방형 문제에 대한 반응을 평가할 수 있는 평가척도에 대한 연구가 필요하겠다.

참 고 문 헌

강완 (1994). 수학적 능력의 구조에 따른 수학 영재아의 지도 방안. 대한수학교육학회지, **제4권, 2호.**

구광조 · 전평국 · 박성선 · 문성길 (2004). 개방형교수법. 서울: 경문사.

김민강 (2003). 수학영재의 개념, 태도 및 정서적 특성에 관한 연구. 서울대학교 석사학위 논문.

김홍원 · 김명숙 · 방승진 · 황동주 (1997). 수학 영재 판별 도구 개발 연구(Ⅱ)-검사 제작편. 수탁연구 CR97-50. 서울: 한국교육개발원.

김홍원 · 김명숙 · 송상헌 (1996). 수학 영재 판별 도구 개발 연구(Ⅰ)-기초 연구편. 한국교육개발원 연구보고 CR96-26. 서울: 한국교육개발원.

박우자 (2004). 개방형 문제 해결 과정에서 나타난 소집단 구성원의 합의 패턴 분석. 한국교원대학교 석사학위 논문.

박종률 · 임재훈 (2002). 수학영재아동의 특성에 대한 연구. Journal of Science Education(전남대), **vol 26.**

이경화 (2003). 수학 영재교육 자료의 개발과 적용 사례 연구. 대한수학교육학회지, **제13권, 2호.**

이봉주 (2002). 수학 문제 해결과정에서 고등학생들의 메타인지적 능력 활성화 방안 탐색. 한국교원대학교 박사학위 논문.

전평국 (2001). 수학 교실에서의 창의력 측정과 평가. 학교수학교육학회 논문집, **제1집,** pp.23-32.

정민주 (2001). 초등학교 수학 영재아들의 개방형문항 반응에 관한 연구. 아주대학교 석사학위 논문.

조석희 · 박경숙 · 오영주 · 김홍원 (1996). 영재교육의 이론과 실제 - 교사용 연수자료. 한국교육개발원 연구보고 CR96-28, 서울: 한국교육개발원.

조영미, 권오남, 박정숙(2002). 개방형 문제 중심의 수학적 창의력 신장을 위한 프로그램 개발 연구. 한국교원대학교 부설 교과교육공동연구소.

황동주 (2005). 수학영재 판별의 타당도 향상을 위한 수학 창의성 및 문제 해결력 검사 개발과 채점 방법에 관한 연구. 단국대학교 박사학위 논문.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren.* Chicago: The University of Chicago Press.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics.

NRC G/T (1993). Perspectives on school mathematics measuring up: Prototypes for Mathematics Assessment. *Mathematical Sciences Education Board National Research Council.* National Academy Press, Washington, D.C.

Sternberg, R. J. (1997). A triarchic view of giftedness: Theory and Practice. N. Colangelo & G. A. Davis (Eds.). *Handbook of Gifted Education* (2nd ed.). Boston. MA: Allyn & Bacon.

坪田耕三 (1993). 算數科 オープンエンドアプローチ. 明治圖書.

An Analysis on Behavior Characteristics between Gifted Students and Talented Students in Open-end Mathematical Problem Solving

Shin, In Sun
Dept. of Math. Education, Korea National University of Education, ChoongBuk, KOREA
E-mail: shinis@knue.ac.kr

Kim, See Myung
Daejeon Science High School, Yuseong-ku, Daejeon, Korea
E-mail: kandy2@djs.hs.kr

This study is intended to reconsider the meaning of the education for gifted/talented children, the foundation object of science high school by examining the behavior characteristics between gifted students and talented students in open-end mathematical problem solving and to provide the basis for realization of 'meaningful learning' tailored to the learner's level, the essential of school education.

For the study, 8 students (4 gifted students and 4 talented students) were selected out of the 1st grade students in science high school through the distinction procedure of 3 steps and the behavior characteristics between these two groups were analyzed according to the basis established through the literature survey.

As the results of this study, the following were founded. (1) It must be recognized that the constituent members of science high school were not the same excellent group and divided into the two groups, gifted students who showed excellence in overall field of mathematical behavior characteristics and talented students who had excellence in learning ability of mathematics. (2) The behavior characteristics between gifted students and talented students, members of science high school is understood and a curriculum of science high school must include a lesson for improving the creativity as the educational institutions for gifted/talented students, unlike general high school.

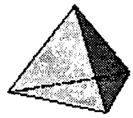
Based on these results, it is necessary to try to find a support plan that it reduces the case which gifted students are generalized with common talented students by the same curriculum and induces the meaningful learning to learners, the essential of school education.

* ZDM Classification : C44
* MSC2000 Classification : 97C30
* Key Word : mathematics gifted student, behavior characteristics

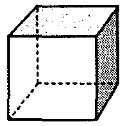
<부록> 개방형 문제

■ 과제 1 : 입체도형 자르기

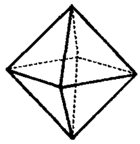
(1) 아래 그림과 같은 정사면체를 평면으로 자른다. 자른 단면으로 나타날 수 있는 평면도형의 이름을 모두 적으시오.



(2) 아래 그림과 같은 정육면체를 평면으로 자른다. 자른 단면으로 나타날 수 있는 평면도형의 이름을 모두 적으시오.



(3) 아래 그림과 같은 정팔면체를 평면으로 자른다. 자른 단면으로 나타날 수 있는 평면도형의 이름을 모두 적으시오.



■ 과제 2 : 참인 명제 만들기

다음 빈 칸에 알맞게 x 또는 y에 대한 식을 채워라. 가능한 한 많은 식을 쓰시오.

(1) 만약 x와 y가 모두 짝수라면, ______________는 짝수이다.

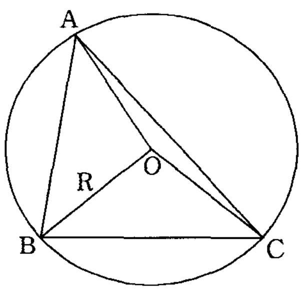
(2) x, y중 하나는 홀수이고 다른 하나는 짝수라면, ______________는 홀수이다.

(3) 만약 x, y 모두 홀수라면, ______________는 홀수이다.

■ 과제 3 : 주어진 삼각형이 갖는 성질

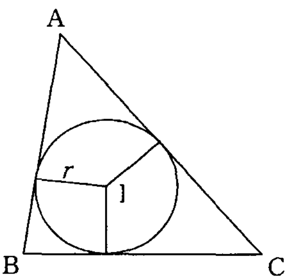
다음의 주어진 그림 (a), (b)의 삼각형 ABC 는 합동인 삼각형이다. 이 때, 주어진 도형에서 가능한 많은 관계를 찾고, 참임을 설명하여라.

(a)



(단, $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ 이다.)

(b)



(단, A 에서 $\overline{BC}$ 까지의 거리는 h)

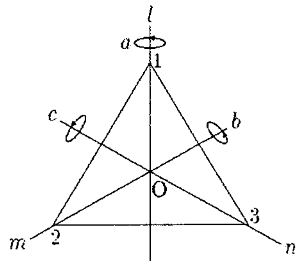
■ 과제 4 : 주어진 조건을 만족하는 함수의 성질

(1) 함수 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 가 조건 $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ 을 만족할 때, $y = f(x)$ 가 만족하는 성질을 찾아보자. (단, $f(0) \neq 0$)

(2) 함수 $f: \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$ 가 조건 $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ 을 만족할 때, $y = f(x)$ 가 만족하는 성질을 찾아보자.

■ 과제 5 : 표에서 군의 규칙

정삼각형을 그 자체에 대해 포개는 변환은 다음과 같다.



e : 항등 변환

w : 점 O 를 중심으로 반시계 방향으로 $120°$ 회전 변환

w^2: 점 O 를 중심으로 반시계 방향으로 $240°$ 회전 변환

a : 직선 l 에 대하여 선대칭 변환

b : 직선 m 에 대하여 선대칭 변환

c : 직선 n 에 대하여 선대칭 변환

이 때, a 와 b 두 연산의 곱 $a \cdot b$ 는 a 를 적용한 후 b 를 적용한 결과로 정의하자. ((예) $a \cdot b = w^2$)

1. $X \cdot Y$ 에 대한 연산표를 완성하시오.

		Y					
		e	w	w^2	a	b	c
X	e						
	w						
	w^2						
	a						
	b						
	c						

2. 위 연산표를 참고로 $X \cdot Y$ 가 갖는 성질을 모두 찾으시오.

■ 과제 6 : 1, 9, 9, 8 숫자 게임

1, 9, 9, 8의 네 숫자와 자신이 알고 있는 모든 연산을 이용하여 1에서 100까지의 숫자를 만드시오.

1		21		41		61		81	
2		22		42		62		82	
3		23		43		63		83	
4		24		44		64		84	
5		25		45		65		85	
6		26		46		66		86	
7		27		47		67		87	
8		28		48		68		88	
9		29		49		69		89	
10		30		50		70		90	
11		31		51		71		91	
12		32		52		72		92	
13		33		53		73		93	
14		34		54		74		94	
15		35		55		75		95	
16		36		56		76		96	
17		37		57		77		97	
18		38		58		78		98	
19		39		59		79		99	
20		40		60		80		100	

■ 과제 7 : 파스칼 삼각형에서 수 패턴 및 규칙 찾기

아래와 같이 주어진 파스칼의 삼각형이 가지는 수학적 특징을 모두 찾아 설명해 보자.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
1 13 78 586 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1
1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1
1 15 105 456 1365 3003 5005 6435 6435 5005 3003 1365 455 105 15 1
1 16 120 560 1820 4368 8008 11440 12870 11440 8008 4368 1820 560 120 16 1