韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 20집 제1호. 2006. 2. 19-32

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 20 No 1, Feb. 2006. 19-32

한국과학영재학교의 R&E 운영 및 지도에 대한 연구
-2005년 수학 No.7 과제를 중심으로-

한 인 기 (경상대학교)

본 연구에서는 수학 영재교육의 한 방법으로 활발하게 운영중인 R&E의 정체성, 효과적인 운영 방안, 발전 방향을 모색하기 위한 기초연구로, 한국과학영재학교의 R&E의 운영 체제를 바탕으로 문제점 및 개선 방안을 고찰하고, 2005년 수학 No.7 과제를 중심으로 R&E 지도의 사례를 분석하며, R&E를 통해 얻어진 학생들의 구체적인 산출물들을 제시하였다. 이를 통해, R&E의 운영의 개선 방안, 성공적인 R&E 활동을 위한 효과적인 접근 방법을 모색함으로써, R&E 수학 영재교육의 중요한 부분으로 올바르게 자리잡을 수 있는 기초 자료를 제공할 것이다.

1. 서 론

최근 들어, 수학 영재교육에 대한 국민적인 관심이 고조되고 있으며, 국가적인 차원에서도 이공계열의 영재교육에 집중적이고 대대적인 지원을 약속하고 있다(문화일보 2006년 1월 18일자에 따르면, 과학기술부는 '2006년도 과학영재 발굴 및 육성사업 추진 계획'을 확정했는데, 2006년도에 과학영재 발굴 및 육성 사업에 1095억원을 지원하기로 확정하였음).

우리나라에서 수학분야의 영재교육을 담당하는 기관을 살펴보면, 초등학교 학생과 중학교 학생을 대상으로 하는 대학교 및 시・도교육청 산하의 영재교육원, 고등학생을 대상으로 하는 한국과학영재학교, 과학고등학교, 민족사관고등학교 등을 들 수 있다. 이들 교육기관에서는 2000년에 제정된 영재교육진흥법에 따라, 수학영재아들을 대상으로 다양한 수준의 수학 교과내용을 영재교육의 전문가들이 지도하고 있다.

이들 영재교육기관의 수학 영재교육에 관련된 최근의 국내 연구들을 살펴보면, 남승인(2004), 이강섭・황동주(2004), 유윤재(2004, 2005), 이상원・방승진(2004), 한인기(2005a), 류성림(2003) 등은 초등학교 또는 중학교 수준의 영재아들의 특성들, 영재아들을 위한 교수-학습 자료 및 방법에 관련된 연구를 하였다. 한편, 오연중(2003)은 민족사관고등학교의 수학교육을 분석하였고, 신현용・유익승・한인기(2000)는 과학고등학교의 수학반에서 영재교육의 사례를 분석하였으며, 방승진・박두성(2005), 한인기 외 4인(2005)은 R&E(Research and Education)에서 학생의 논문 지도 사례, R&E에서의 창의적

---

* ZDM분류 : C94
* MSC2000분류 : 97C90
* 주제어 : 시사과정, 삼각형, 사면체, 라카토스의 발견술, 유추

산출물을 발표하였다.

이들 연구는 우리나라 수학 영재교육의 정체성 확립, 방향 설정, 내실화를 위한 중요한 방향을 제시하고, 구체적인 방안을 모색하였다는 측면에서 커다란 가치를 부여할 수 있을 것이다. 그런데, 이들 연구를 분석해 보면, 고등학교 수준의 영재교육에 대한 연구는 초등학교 및 중학교 수준의 영재교육 연구에 비해 양적으로 빈약하며, 고등학교 수준의 수학 영재교육에 대한 다양한 분석이 체계적으로 이루어지지 않았음을 알 수 있다.

고등학교 수준의 수학 영재교육은 크게 수학 영재아들을 위한 체계적인 영재 교육과정 운영, 수학 영재아들의 자기주도적인 학술적 연구활동을 위한 R&E의 운영으로 나누어 생각할 수 있다. 고등학생을 위한 수학 영재교육과정에 대한 연구는 한국교육개발원(2000), 김종득(2004) 등에 의한 연구가 수행되어 보고서가 제출되었지만, R&E의 체계적인 정착과 발전 방향에 대한 연구는 미미한 실정이다. 특히, 한국과학재단(2004, p.1)은 '최근 한국에서 개최된 아·태영재학술대회의 참가자들에게 한국의 R&E 프로그램을 국가 과학영재 양성의 적절한 모델로 평가하고 자국의 과학영재 육성에 적용하고자 하는 움직임이 있으며...'라고 하였다. 이와 같이, R&E가 수학 영재교육의 중요한 부분으로 자리잡아 가고 있음을 감안하면, R&E의 정체성, 효과적인 운영 방안, 문제점 및 개선 방안 등에 다양한 연구가 폭넓게 진행되어야 할 것이다.

본 연구에서는 수학 영재교육의 한 방법으로 활발하게 운영중인 R&E의 정체성, 효과적인 운영 방안, 발전 방향을 모색하기 위한 기초연구로, 한국과학영재학교의 R&E의 운영 체제를 바탕으로 문제점 및 개선 방안을 고찰하고, 2005년 수학 №7 과제를 중심으로 R&E 지도의 사례를 분석하며, R&E를 통해 얻어진 학생들의 구체적인 산출물들을 제시할 것이다. 이를 통해, R&E의 운영의 개선 방안, 성공적인 R&E 활동을 위한 효과적인 접근 방법을 모색하고, R&E 수학 영재교육의 중요한 부분으로 올바르게 자리잡을 수 있는 기초 자료를 제공할 것이다.

2. 한국과학영재학교의 R&E 운영

(1) 한국과학영재학교의 교육과정에서 R&E

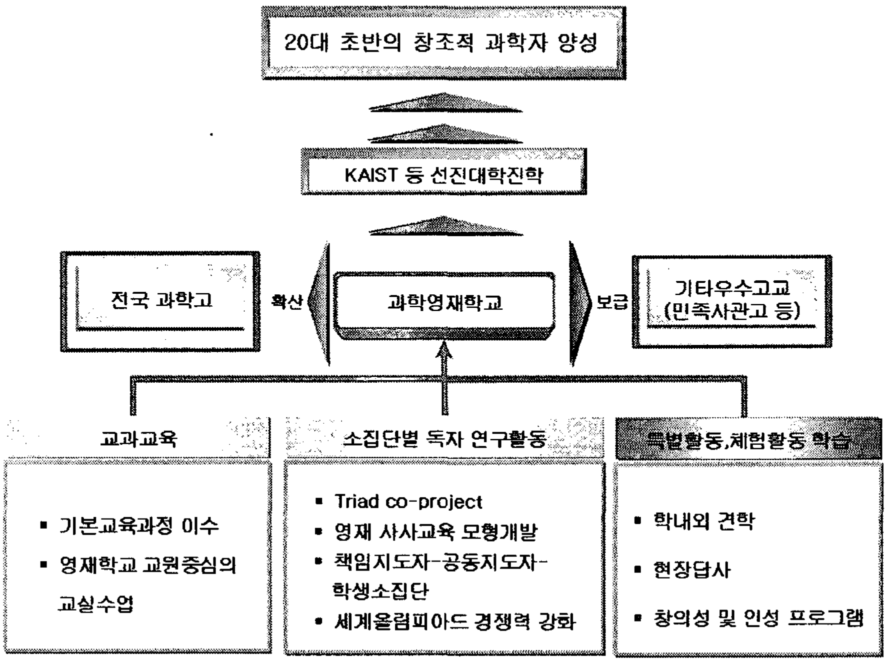
한국과학영재학교의 교육과정은 교과영역, 연구활동영역, 특별활동영역으로 구성된다. 이들 중에서 연구활동영역은 자율연구, 현장연구 및 학습, 졸업논문연구로 구성된다.

김종득(2004)에 의하면, 자율연구는 연구중심의 R&E 프로그램으로 운영하는데, 이수학점은 한 학기당 5학점으로 하고, 4학기를 기준으로 총 20학점으로 하고, 학점의 평가는 P/F제로 한다. 한편, 현장연구 및 학습은 국내 현장연구 및 학습과 해외 현장연구 및 학습으로 구성되는데, 국내 현장연구 및 학습은 R&E 프로그램의 일환으로 학기 중 또는 방학 기간 중 대학 및 영재교육기관 또는 연구를 방문하여 행해지는 교육 및 연구 활동을 말하며, 한 학기당 2학점으로, 4학기를 기준으로 총 8학점으로 하고, 평가는 P/F제로 한다. 해외 현장연구 및 학습은 해외 학생 연수를 말하며, 2학점을 부여한다.

살펴본 바와 같이, 한국과학영재학교에서 R&E는 정규교육과정의 중요한 영역으로, 자율연구와 국내 현장연구 및 학습으로 구성됨을 알 수 있다. 이러한 제도적인 R&E의 위상 규정은 다른 과학고등학교의 R&E 활동보다 한국과학영재학교 R&E에 학생들이 적극적으로 참여하도록 하는 한 원인이 될 수 있다.

(2) 한국과학영재학교의 R&E의 목적 및 인적 구성

한국과학영재학교 R&E의 목적은 과학영재들의 창의적 문제해결 능력을 신장하여, 20대 초반의 세계적인 과학자 양성의 기반을 마련하기 위한 것이며, 한국과학재단(2004, p.2)은 이를 <그림 1>과 같이 도식화하였다.



<그림 1> R&E의 목적

한국과학재단(2004)에 의하면, 각 R&E 팀의 구성은 책임지도자, 공동책임지도자, 공동지도자, 학생, 조교로 구성된다. 책임지도자는 대학교, 연구소, 한국과학영재학교에서 근무하는 해당분야 박사학위 소지자로 하며, 공동책임지도자는 책임지도자의 조건에 해당하는 자이거나 한국과학영재학교 교원으로 하며, 조교는 책임지도자와 함께 연구를 수행할 수 있는 석사과정 이상의 연구원이며, 학생은 한국과학영재학교 재학생 3-4명으로 구성되며, 무학년제로 운영한다.

R&E팀의 구성에서 한 가지 주목할 것이 공동책임지도자 및 공동지도자에 관한 것이다. 공동책임지도자는 책임지도자가 R&E 연구과제를 신청할 때에 R&E의 공동운영자로서 함께 신청할 수도 있

고, 신청하지 않을 수도 있다. 한편, 공동지도자는 책임지도자의 의지와는 무관하게, 연구주관기관 및 한국과학영재학교에서 한국과학영재학교 교원을 배정한다(모든 과제에 배정되는 것은 아님). 이때, 공동지도자는 해당 R&E 과제의 전공과 동일한 전공의 교원으로 하는 것이 원칙이지만, 수학분야의 다른 전공을 가진 교원이 배정되기도 하여, R&E의 실제적인 운영과정에서 어려움을 야기시키는 원인이 되기도 한다(이러한 일괄 배정의 문제점이 한인기(2005b)에서 지적됨).

(3) 한국과학영재학교 R&E의 운영

R&E의 운영은 학기중의 교육 및 연구활동, 여름방학과 겨울방학의 집중캠프로 구성된다. 학기중의 교육 및 연구활동은 한 달에 세 번씩 토요일에 이루어지며, 여름방학과 겨울방학의 집중캠프는 각각 10일 정도 운영되며, 학생들이 책임지도자의 소속기관 혹은 유관기관을 방문하여 연구 및 교육활동을 수행하는 현장연구학습이다.

학기 중의 교육 및 연구활동과 관련하여, R&E 운영에 대한 개선점으로 가장 많은 학생들(24.4%)은 담당교수를 더 많이 만날 것을 희망하였다(김종득, 2004, p.78). 이것은 R&E 책임지도자들의 소속기관의 위치와 한국과학영재학교의 지리적 위치로 인하여 발생된다. 예를 들어, 2005년에 R&E 연구로 선정된 76개 과제의 책임지도자들의 소속기관을 살펴보면, 서울·경기·인천지역이 27개 과제, 대전지역이 27개 과제(대전지역의 KAIST 소속의 책임지도자들 중에는 한국과학영재학교에 파견근무중인 경우도 일부 포함됨), 경북지역이 5개 과제이며, 부산지역이 13개 과제, 나머지 과제들은 경남지역의 연구기관 및 대학에 소속된 책임지도자가 진행한다. 그런데, 이들 과제의 책임지도자가 한 달에 세 번씩 한국과학영재학교를 방문하여 지도하는 것이 쉽지 않을 것으로 예측된다. 이에 관련하여, 한인기(2005b)는 책임지도자가 한 달에 세 번씩 한국과학영재학교를 방문하여 지도하는 것을 원칙으로 하는 것은 어려움과 문제점을 야기시킬 수 있으므로, 책임지도자에게 운영상의 재량권이 부여되어야 함을 주장하였다.

한편, 여름방학과 겨울방학의 집중캠프는 책임지도자의 소속기관 또는 유관기관을 방문하여 교육 및 연구활동을 수행해야 함을 원칙으로 한다. 방학중의 집중캠프는 과학 및 공학분야에서 실험을 중심으로 운영하는 R&E 과제에 대해서는 적합하지만, 수학의 경우에는 책임지도자의 소속기관에 수학실험실이나 학생들을 수용할 수 있는 기숙사 시설이 미비한 경우에는 운영상의 어려움이 발생할 가능성이 있다. 그리고, 실험이 탐구활동의 중심이 되는 과학이나 공학분야와는 달리, 수학은 이론중심의 교육 및 연구활동이 중심이 되므로, 여름방학과 겨울방학의 집중캠프를 어떤 형태로 운영해야 할 것인가에 대한 구체적인 연구가 필요하다.

3. 한국과학영재학교의 R&E 실제(2005년 수학 №7 과제를 중심으로)

한국과학영재학교의 2005년 수학분야의 R&E 과제는 총 7개가 선정되었으며, 수학 №7 과제는 '삼각형의 유추와 Lakatos의 발견술을 활용한 사면체의 다양한 성질의 발명'으로, R&E 팀은 책임지도

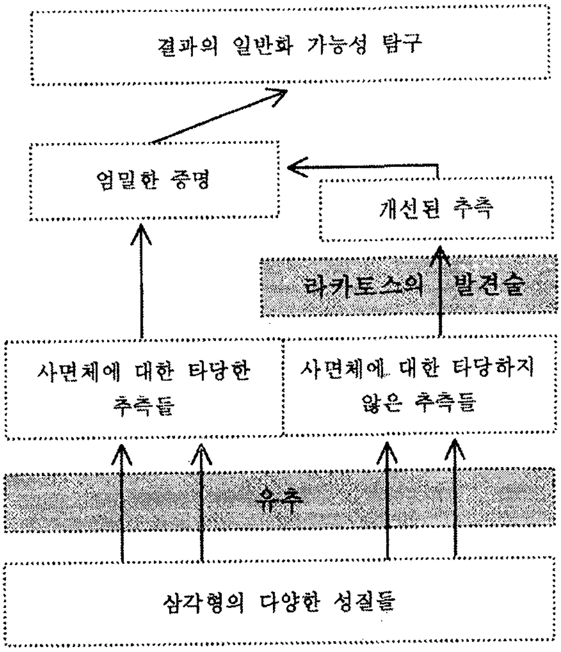
자 1명, 공동지도자 1명, 조교 2명, 1학년 학생 4명으로 구성되었다. 이 연구과제는 (1) 삼각형의 다양한 성질을 탐구하고 증명하며, (2) 삼각형의 성질에 대한 유추를 통해 사면체의 성질을 추측하며, (3) 사면체에 대해 추측된 성질들이 성립하는지 그렇지 않은지를 확인하여, 성립하면 이것의 타당성을 증명하고, 그렇지 않은 경우에는 Lakatos의 발견술인 '증명과 반박의 방법'을 이용하여 추측을 개선하여 사면체에 대한 타당한 성질을 유도하고 증명하는 활동으로 구성되었다.

수학 No.7 과제에서의 교육 및 연구 활동은 학기중의 활동과 방학중의 활동으로 나눌 수 있다. 학기중의 활동은 Lakatos의 발견술 익히기, 삼각형의 성질 증명, 유추를 통한 사면체의 성질 탐구 등이 주로 수행되었으며, 방학중의 활동은 학생 중심의 자유로운 연구 활동, 특강, 중간보고서 및 최종보고서 작성 등이 중심적으로 수행되었다.

학기중의 교육 및 연구활동에서 다룬 주요 주제 및 문제들은 다음과 같다.

(1) 라카토스의 발견술인 '증명과 반박의 방법'과 그 예(오일러 정리를 중심으로)

라카토스(1976)에 의하면, 수학적 지식의 성장은 '증명과 반박'의 논리에 근거하며, 수학적 지식은 추측을 검사하고 추측에 대한 반박을 고려하여 추측을 강화하거나 이를 제거할 수 있는 새로운 추측을 창안하여 대체함으로써 지식의 성장이 이루어진다. 수학 No.7 과제에서는 Lakatos의 견해와 발견술에 근거하여, 다음과 같은 유추를 통한 수학적 발명의 모형을 학생들에게 제시하였다.



<그림 2> 수학적 발명의 모형

(2) 삼각형에서의 부등식들, 이들 부등식의 사면체 유추

삼각형에 관련하여 다룬 부등식들로는, 삼각부등식, '삼각형의 중선들의 합은 둘레보다는 작고 둘레의 ¾보다는 크다', '삼각형 ABC와 A′B′C′에서 AB=BC, AC=A′C′이다. 이때, $\angle A > \angle A'$이면, BC>B′C′이다'와 그 역, '직각삼각형에서 r을 내접원의 반지름, h를 직각인 꼭지점에서 내린 높이라 하면, $0.4 < \frac{r}{h} < 0.5$이다', '삼각형 ABC에서 꼭지점 A, B, C에서의 각의 라디안값을 각각 A, B, C라 하고, 이들 각의 대변을 a, b, c라 하면, $Aa+Bb+Cc \geq \frac{1}{2}(Ab+Ba+Ac+Ca+Bc+Cb)$이다' 등등.

(3) 삼각형의 내부점, 볼록다각형의 내부점과 이들의 사면체 및 볼록다면체로의 유추

'삼각형의 내부점에서 각 꼭지점까지의 거리의 합은 둘레보다 작다', '삼각형 ABC의 내부점 M에 대해, $\min\{MA, MB, MC\}+MA+MB+MC<AB+BC+CA$이다', ' 볼록다각형 $A_1A_2\cdots A_n$의 둘레의 절반을 p라 하면, 내부점 M에 대해 $\min\{MA_k|k=1, 2, \cdots, n\}+\sum_{k=1}^{n} MA_k<2p$이다' 등등.

(4) Erdos-Mordell 부등식과 유사한 부등식들, 이들의 사면체 유추

Erdos-Mordell 부등식(삼각형 ABC의 내부점 M으로부터 꼭지점 A, B, C에 이르는 거리를 각각 R_A, R_B, R_C, 이들 꼭지점의 대변에 이르는 거리를 각각 k_a, k_b, k_c라 하면, $R_A+R_B+R_C \geq 2(k_a+k_b+k_c)$이다), $k_aR_A+k_bR_B+k_cR_C \geq 2(k_ak+k_ak_c+k_bk_c)$, '삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면, $aR_A+bR_B+cR_C \geq 4S$이다', $R_AR_BR_C \geq 8k_ak_bk_c$, $\frac{1}{R_A}+\frac{1}{R_B}+\frac{1}{R_C} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k_a}+\frac{1}{k_b}+\frac{1}{k_c}\right)$ 등등.

(5) 삼면각의 성질

삼면각에서 몇몇 부등식들, 삼면각의 평면각들의 합, 삼면각의 코사인정리, 삼면각의 사인정리, 삼면각에서 이면각의 이등분면의 성질

(6) 삼각형의 각의 이등분선과 사면체의 이면각

삼각형에서 각의 이등분선의 성질(각의 이등분선으로부터 각의 변까지 거리는 같다와 그 역), 이면각의 이등분면의 성질(이면각의 이등분면으로부터 이면각의 각 면까지의 거리는 같다와 그 역), 각의 이등분선의 길이와 이면각의 이등분면의 넓이, 삼각형에서 각의 이등분선들의 교점, 사면체에서 이면각들의 이등분선들의 교점, 삼각형의 내접원과 사면체의 내접구, 내접원의 반지름과 내접구의 반지름의 성질, 방접원과 방접구, 방접원과 내접원의 반지름 사이의 관계, 방접구와 내접구의 반지름 사이의 관계 등등.

(7) 삼각형의 넓이와 사면체의 부피

사인을 이용한 삼각형의 넓이 공식, 이면각의 사인을 이용한 사면체의 부피 공식, 헤론의 공식, 헤론의 공식과 유사한 사면체의 부피 공식들, 사면체의 마주보는 모서리의 중점을 연결한 선분(중간선)의 길이, 사면체의 중간선을 이용한 부피 공식 등등.

(8) 삼각형의 높이와 사면체의 높이

삼각형의 수심, 수심사면체(네 높이 또는 그 연장선이 한 점에서 교차하는 사면체), 두 높이가 교차하지 않는 사면체 찾기, 두 높이는 한 점에서 교차하고 나머지 두 높이는 다른 점에서 교차하는 사면체 찾기, 수심사면체일 필요충분조건들 등등.

(9) Open problems(questions)

Matematicheskoe obrazovanie, Octogon 등을 비롯한 다양한 학술잡지에 제시된 삼각형 및 사면체의 성질에 관련된 새로운 문제들을 찾아, 학생들이 증명과 유추 활동을 수행하도록 하였다. 다음은 학생들에게 제시한 새로운 문제들 중의 일부이다.

◦ 사면체 DABC에서 모서리 DA, DB, DC, AB, BC, AC의 길이를 각각 u, v, w, W, U, V라 하자. 이 때, $X=(w-U+v)(U+v+w)$, $Y=(u-V+w)(V+w+u)$, $Z=(v-W+u)(W+u+v)$, $x=(U-v+w)(v-w+U)$, $y=(V-w+u)(w-u+V)$, $z=(W-u+v)(u-v+W)$이다. 이때, $a=\sqrt{xYZ}$; $b=\sqrt{yZX}$; $c=\sqrt{zXY}$; $d=\sqrt{xyz}$라 하면, 사면체 DABC의 부피는 다음과 같다.

$$V_{ABCD}=\frac{\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}}{192uvw}$$

◦ 자연수 n과 삼각형 ABC의 내부점 M에 대해, 다음을 증명하여라.

$$MA+MB+MC \geq \left(\left(\frac{a}{b}\right)^n+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)d(M, AB) + \left(\left(\frac{b}{c}\right)^n+\left(\frac{c}{b}\right)^n\right)d(M, BC)+\left(\left(\frac{c}{a}\right)^n+\left(\frac{a}{c}\right)^n\right)d(M, CA)$$

◦ 사면체 ABCD에서 $S_{ABC} \geq \max\{S_{ABD}, S_{ACD}, S_{BCD}\}$가 성립한다. 면 ABC, ABD, ACD, BCD에 그은 중선을 m_1, m_2, m_3, m_4라 할 때, $m_1 \leq \min\{m_2, m_3, m_4\}$임을 증명하여라.

◦ 사면체 ABCD의 모서리 a, b, c, d, e, f에 대해, 다음을 증명하여라.

$$\frac{R}{3r} \geq \frac{5(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)}{2(ab+ac+ad+ae+af+bc+bd+be+bf+cd+ce+cf+de+df+ef)} \geq 1$$

◦ 사면체 ABCD의 모서리 a, b, c, d, e, f에 대해, 다음을 증명하여라.

$$6R \geq 3r\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{e}{d}+\frac{f}{e}+\frac{a}{f}\right)$$

∘ 사면체 ABCD에서 다음 부등식을 증명하여라.

$$27\left(\frac{h_a h_b h_c h_d}{r}\right)^2 \le 2(h_a h_b + h_a h_c + h_a h_d + h_b h_c + h_b h_d + h_c h_d)^3$$

이들 문제 중에서 사면체의 부피에 대한 문제는 성공적으로 해결하였으며, 이에 관련된 상세한 내용 및 증명을 한인기 외 4인(2005)에 제시하였다.

학기중의 연구 및 교육활동의 운영에서 한 가지 주목할 것은 한국과학영재학교의 정규 교육과정 운영에서 요구하는 과제의 양이 너무 많아(김종득(2004, p.71)의 설문조사 결과에 의하면, 학생의 45.8%가 과제가 너무 많다고 응답하였음), 주말인 토요일에 R&E의 운영에서 학생들이 피로함을 호소하고, 과제집중에 문제점을 드러내기도 한다는 점이다. 그 결과, 학기중에 학생들에게 R&E에서 의도하는 창의적인 수학적 산출물을 내도록 요구하고 이끄는 것은 쉽지 않았다.

한편, 방학중의 연구 및 교육활동에서 특강은 수학전문가, 영재교육기관의 수학교사, 수학영재교육연구자, IMO 수상자 등을 초빙하여, '행렬식을 이용한 넓이와 부피', '수학적 정보와 수학문제해결', '수학문제해결의 여러 측면들', '확률론적 증명 및 현대수학', '입체도형의 성질과 입체모형의 제작', '3D-Cabri 프로그램을 활용한 입체도형의 시각화' 등의 주제로 운영하였다. 특히, 특강을 조직함에 있어, 공간도형의 성질 탐구, 수학 문제해결의 본질과 방법, 현대수학과 수학탐구를 중심으로 특강 주제를 선정하였다. 그리고, 방학중의 연구 및 교육활동의 나머지 부분에서는 학생들에게 진지하게 R&E 주제 및 문제들을 탐구할 수 있는 시간을 충분히 제공하였다. 왜냐 하면, 이미 기술한 것처럼, 학생들이 학기 중에는 바쁘고 힘들어하기 때문에, R&E 과제에 집중하기가 어렵기 때문이다. 수학 №7 과제에서는 방학중의 자유로운 학생 중심의 연구 및 교육활동에서 의미로운 수학적 산출물을 얻을 수 있었다.

4. 한국과학영재학교의 R&E에서 학생들의 산출물(수학 №7 과제)

수학 №7 과제에서는 삼각형의 성질 탐구 및 증명, 삼각형의 성질에 대한 유추를 통해 사면체의 성질 추측, Lakatos의 발견술을 활용한 추측의 개선, 사면체에 대한 개선된 추측의 증명으로 구성되었다.

학생들이 삼각형의 성질 탐구 및 증명, 유추를 통한 사면체 성질의 추측, 추측된 사면체의 성질 증명에서는 성공적으로 접근하여 의미로운 결과들을 얻었지만, 유추를 통해 얻어진 타당하지 않은 추측에 대해 Lakatos의 발견술을 활용하여 추측을 개선하는 활동에는 성공적이지 못했다. 특히, 학생들은 얻어진 추측에 대한 반례찾기를 통해, 추측이 타당하지 않음을 밝힐 수는 있었지만, 이 추측을 개선하여 의미로운 명제로 변형시키지는 못했다.

수학 №7 과제는 학생 A, B, C, D 네 명이 참여했는데, 이들 중에서 A학생이 팀장으로 선임되었

다. 팀장은 연구 및 교육활동에서 학생들을 통솔하여 원활한 활동이 진행되도록 준비하였으며, 책임지도자와 학생들과의 연락은 주로 팀장을 통해 이루어졌다. 그리고, 팀장은 중간보고서 및 최종보고서의 전체적인 구조, 역할분담을 맡아서 R&E팀을 이끌었다.

최종보고서에 제시된 학생들의 산출물은

- 삼각형의 넓이와 사면체의 부피;
- 삼각형의 내접원 및 방접원의 반지름과 사면체의 내접구 및 방접구의 반지름;
- 삼각형의 Erdos-Mordell 부등식과 사면체의 유사한 부등식;
- 삼각형의 몇몇 부등식과 사면체의 유사한 부등식들;

을 중심으로 기술되었다. 역할분담을 살펴보면, A학생은 삼각형의 넓이와 사면체의 부피를 정리했으며, B학생은 삼각형의 내접원 및 방접원의 반지름과 사면체의 내접구 및 방접구의 반지름을, C학생은 삼각형의 Erdos-Mordell 부등식과 사면체의 유사한 부등식을, D학생은 삼각형의 몇몇 부등식과 사면체의 유사한 부등식들을 정리하였다. 학생들은 자신이 맡은 영역에 대해, 책임지도자와의 교육활동을 통해 얻은 수학적 지식 및 문제해결 경험을 바탕으로 주도적으로 연구 및 정리활동을 수행했다(단, 삼각형의 넓이와 사면체의 부피 영역의 결과들 중의 일부는 B학생이 발명한 것으로, 이 영역의 일부 내용은 한인기 외 4인(2005)에 제시되어 있음). 각 영역별로 학생들의 산출물들을 R&E의 최종보고서를 중심으로 살펴보자.

(1) 삼각형의 넓이와 사면체의 부피

삼각형의 넓이와 사면체의 부피 영역의 연구결과의 일부는 한인기 외 4인(2005)에 제시되었다. 최종보고서에 추가된 주요 내용을 살펴보자(증명은 생략함).

성질 1. 사면체 DABC에서 DA=u, DB=v, DC=w, AB=w′, BC=u′, AC=v′이다. 길이가 각각 u, u′인 모서리의 중점을 연결한 선분을 u_a라 하고, 유사하게 u_b, u_c를 정의하자. 그러면, 다음이 성립한다.

$$u_a^2 = \tfrac{1}{4}(v^2 + v'^2 + w^2 + w'^2 - u^2 - u'^2),$$

$$u_b^2 = \tfrac{1}{4}(u^2 + u'^2 + w^2 + w'^2 - v^2 - v'^2),$$

$$u_c^2 = \tfrac{1}{4}(u^2 + u'^2 + w^2 + w'^2 - v^2 - v'^2)$$

성질 2. 사면체 DABC의 부피 V에 대해, 다음이 성립한다.

$$6V = \sqrt{(uu'u_a)^2 + (vv'u_b)^2 + (ww'u_c)^2 - \tfrac{1}{4}(u'^2v^2w^2 + u^2v'^2w^2 + u^2v^2w'^2 - u'^2v'^2w'^2)}$$

(2) 삼각형의 내접원 및 방접원의 반지름과 사면체의 내접구 및 방접구의 반지름

에르든예프 · 한인기(2005)에 삼각형의 내접원, 방접원의 반지름에 대한 관계식이 제시되어 있다. 수학 №7 과제에서는 이들 관계식을 사면체로 유추하여, 사면체에 대한 다음과 같은 결과를 얻었다.

성질 3. 사면체 ABCD의 부피를 V, 꼭지점 A, B, C, D에 각각 마주보는 면의 넓이를 S_A, S_B, S_C, S_D, 겉넓이의 절반을 S, 내접구의 반지름을 r, 면 BCD, ACD, ABD, ABC에 각각 접하는 방접구의 반지름을 r_A, r_B, r_C, r_D라 하자. 그러면 다음이 성립한다.

$$\frac{3}{2}V = rS = r_A(S-S_A) = \frac{1}{2}h_AS_A$$

성질 4. $\frac{h_B+h_C+h_D}{r_A}+\frac{h_C+h_D+h_A}{r_B}+\frac{h_D+h_A+h_B}{r_C}+\frac{h_A+h_B+h_C}{r_D} \geq 24$

성질 5. $\frac{h_A}{r_A}+\frac{h_B}{r_B}+\frac{h_C}{r_C}+\frac{h_D}{r_D} \geq 8$

성질 6. $\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}+\frac{1}{r_D} = \frac{2}{h_A}+\frac{1}{r}$

성질 7. $\frac{r_A \cdot r_B \cdot r_C \cdot r_D}{h_A \cdot h_B \cdot h_C \cdot h_D} =$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{r_A \cdot r_B \cdot r_C + r_B \cdot r_C \cdot r_D + r_C \cdot r_D \cdot r_A + r_D \cdot r_A \cdot r_B}{h_A \cdot h_B \cdot h_C + h_B \cdot h_C \cdot h_D + h_C \cdot h_D \cdot h_A + h_D \cdot h_A \cdot h_B}$$

성질 8. $\frac{1}{r}-\frac{1}{r_A} = \frac{2}{h_A}$

성질 9. $\frac{1}{r_A} = \frac{1}{h_B}+\frac{1}{h_C}+\frac{1}{h_D}-\frac{1}{h_A}$

(3) 삼각형의 Erdos-Mordell 부등식과 사면체의 유사한 부등식

수학 No.7 과제에서는 삼각형에서 Erdos-Mordell 부등식을 연구하여 이와 유사한 몇몇 부등식을 삼각형에 대해 증명하였고, 이들 부등식을 사면체로 유추하여 증명하였다. 이들 중에서 사면체에 대해 증명한 부등식들은 다음과 같다.

성질 10. $aR_A \geq bk_b+ck_c+dk_d$

성질 11. $aR_A \geq bk_b+ck_d+dk_c$, $aR_A \geq bk_c+ck_b+dk_d$, $aR_A \geq bk_c+ck_d+dk_b$,

$aR_A \geq bk_d+ck_b+dk_c$, $aR_A \geq bk_d+ck_c+dk_b$

성질 12. $aR_A+bR_B+cR_C+dR_D \geq 3(ak_a+bk_b+ck_c+dk_d)$

성질 13. $R_A+R_B+R_C+R_D \geq 3(k_a+k_b+k_c+k_d)$

성질 14. $R_AR_BR_CR_D \geq 81k_ak_bk_ck_d$

성질 15. $3(aR_A+bR_B+cR_C+dR_D) \geq ak_a+bk_b+ck_c+dk_d$

$$+2(a+b+c+d)(k_a+k_b+k_c+k_d)$$

성질 16. $R_A^2+R_B^2+R_C^2+R_D^2 \geq 3(k_a^2+k_b^2+k_c^2+k_d^2)$

(4) 삼각형의 몇몇 부등식과 사면체의 유사한 부등식들

삼각형에서 삼각부등식을 포함하는 몇몇 부등식에 대한 연구로부터, 사면체 및 삼면각에 대한 다음과 같은 몇몇 부등식을 증명하였다. 한 가지 흥미로운 점은 이 영역을 맡은 D학생이 수학에 대한 폭넓은 관심을 가지고 있었음에도 불구하고, R&E에서는 실질적으로 의미로운 산출물을 내지 못했다는 점이다. 이러한 학생에 대해서는 다음 학년의 R&E 과제 선택 및 활동 결과를 추적하여, 다음 학년에서는 어떠한 산출물을 내는가를 확인하고, 지금의 결과와 다음 해의 결과 사이의 차이를 밝혀볼 필요가 있다. 이로부터 얻어지는 결과는 수학영재아의 이해를 위한 흥미로운 자료가 될 것이다.

성질 16. 사면체 ABCD에서 $S_{BCD} \le S_{CDA} + S_{DAB} + S_{ABC}$이 성립한다.

성질 17. 삼면각에서 평면각의 합은 360°보다 작다.

성질 18. 삼면각 OABC의 내부반직선 OD에 대해, 다음 부등식이 성립한다.

$$\angle AOD + \angle BOD + \angle COD > \tfrac{1}{2}(\angle AOB + \angle BOC + \angle COA)$$

성질 19. 삼면각 OABC의 내부반직선 OD에 대해, 다음 부등식이 성립한다.

$$\angle AOD + \angle BOD < \angle AOC + \angle BOC$$

5. 결 론

본 연구에서는 수학 영재교육의 한 방법으로 활발하게 운영중인 R&E의 정체성, 효과적인 운영 방안, 발전 방향을 모색하기 위한 기초연구로, 한국과학영재학교의 R&E의 운영 체제를 바탕으로 문제점 및 개선 방안을 고찰하고, 2005년 수학 №7 과제를 중심으로 R&E 지도의 사례를 분석하며, R&E를 통해 얻어진 학생들의 구체적인 산출물들을 제시하였다.

한국과학영재학교의 교육과정에서 R&E는 교과영역, 연구활동영역, 특별활동영역 중에서 연구 활동 영역에 속하며, 자율연구와 국내 현장연구 및 학습으로 구성된다. 이렇게 교육과정으로 R&E 활동을 규정하는 것은 학생들이 좀더 적극적으로 R&E에 참여하도록 할 수 있으며, 학생들에게 책임감을 좀더 부여할 수 있을 것이다.

한국과학영재학교 R&E의 목적은 과학영재들의 창의적 문제해결 능력을 신장하여, 20대 초반의 세계적인 과학자 양성의 기반을 마련하기 위한 것이며, R&E 팀의 구성은 책임지도자, 공동책임지도자, 공동지도자, 학생, 조교로 구성된다. 이때, 공동지도자는 책임지도자의 의지와는 무관하게, 일부 R&E 과제에 대해 연구주관기관 및 한국과학영재학교에서 한국과학영재학교 교원을 배정하는데, 수학분야의 다른 전공을 가진 교원이 배정되기는 경우가 있어, R&E의 실제적인 운영과정에서 어려움을 발생시키는 원인이 되기도 한다. 이러한 문제를 해소하기 위해서는, 한국과학영재학교의 교원이 공동지도자로 R&E팀에 참가하는 경우에는 사전에 반드시 R&E 수행에 관련하여 책임지도자와 협의하고, 책임지도자의 동의를 얻어 R&E팀에 합류해야 할 것이다.

한국과학영재학교 R&E는 학기중의 교육 및 연구활동, 여름방학과 겨울방학의 집중캠프로 구성된

다. 학기중의 교육 및 연구활동은 한 달에 세 번씩 토요일에 이루어지며, 여름방학과 겨울방학의 집중캠프는 각각 10일 정도 운영되며, 학생들이 책임지도자의 소속기관 혹은 유관기관을 방문하여 연구 및 교육활동을 수행한다. 학기중의 교육 및 연구활동과 관련하여, 24.4%의 학생들이 담당교수를 더 많이 만날 것을 희망하였다. 이러한 문제는 R&E 과제의 책임지도자의 근무처가 한국과학영재학교와 지리적으로 멀리 떨어져있기 때문에 발생한다(2005년에 R&E 과제로 선정된 76개 중에서 책임지도자의 근무지가 부산지역인 경우는 13개 과제에 불과했다). 이러한 문제를 해결하기 위해선, 한국과학영재학교 인근의 전문가들과 한국과학영재학교의 교원들이 R&E의 책임지도자로 적극적으로 참여하거나, 학기중의 교육 및 연구활동의 운영에 대한 재량권을 R&E의 책임지도자에게 폭넓게 부여해야 할 것이다(예를 들어, 서울 등지에서 한 달에 세 번씩 거의 매주 한국과학영재학교를 방문하여 학생들을 지도하는 것은 책임지도자에게도 커다란 부담이 될 것이므로, 학기중의 활동에 대한 운영방법과 횟수에 대한 유연한 조정이 필요함).

한편, 방학중의 집중캠프는 책임지도자의 소속기관을 방문하여 교육 및 연구활동을 수행해야 하는데, 수학의 경우에는 책임지도자의 소속기관에 수학실험실이나 학생들을 수용할 수 있는 기숙사 시설이 미비한 경우에는 운영상의 어려움이 발생할 수 있다. 수학 №7 과제에서는 방학중의 연구 및 교육활동에서 공간도형의 성질 탐구, 수학 문제해결의 본질과 방법, 현대수학과 수학탐구를 중심으로 특강을 조직하였고, 나머지 시간에는 학생들이 R&E에서 다룬 미해결인 문제들을 해결하였다.

수학 №7 과제는 '삼각형의 유추와 Lakatos의 발견술을 활용한 사면체의 다양한 성질의 발명'으로, 삼각형의 성질 탐구 및 증명, 삼각형의 성질에 대한 유추를 통해 사면체의 성질 추측, Lakatos의 발견술을 활용한 추측의 개선, 사면체에 대한 개선된 추측의 증명으로 구성되었다. 그런데, 삼각형의 성질 탐구 및 증명, 유추를 통한 사면체 성질의 추측, 추측된 사면체의 성질 증명에서는 학생들이 의미로운 결과들을 얻었지만, 유추를 통해 얻어진 타당하지 않은 추측에 대해 Lakatos의 발견술을 활용하여 추측을 개선하는 활동에는 성공적이지 못했다. 학생들은 얻어진 추측에 대한 반례찾기를 통해, 추측이 타당하지 않음을 밝힐 수는 있었지만, 이것을 정리로 개선시키지는 못했다.

수학 №7 과제에서 학기중의 교육 및 연구활동에서 다룬 주요 주제 및 문제들은 라카토스의 발견술인 '증명과 반박의 방법'과 그 예, 삼각형에서의 부등식들 및 이들 부등식의 사면체 유추, 삼각형과 볼록다각형의 내부점에 대한 관계식과 이들의 공간 유추, Erdos-Mordell 부등식과 유사한 부등식들 및 이들의 사면체 유추, 삼면각의 성질, 삼각형의 각의 이등분선과 사면체의 이면각, 삼각형의 넓이와 사면체의 부피, 삼각형의 높이와 사면체의 높이였으며, 몇몇 Open problems(questions)도 학생들에게 제시하였다.

수학 №7 과제에서 최종보고서에 제시된 학생들의 산출물은 삼각형의 넓이와 사면체의 부피, 삼각형의 내접원 및 방접원의 반지름과 이들의 사면체 유추, 삼각형의 Erdos-Mordell 부등식과 사면체의 유사한 부등식, 삼각형의 몇몇 부등식과 이들의 사면체 유추 등의 주제와 관련된다. 특히, 삼각형의 넓이와 사면체의 부피와 관련하여, 흥미로운 결과를 얻어 일부를 한국수학교육학회지인 '수학교육논

문집'에 게재하였다. 삼각형의 내접원 및 방접원의 반지름과 이들의 사면체 유추, 삼각형의 Erdos-Mordell 부등식과 사면체의 유사한 부등식에서도 의미로운 결과들을 얻었지만, 삼각형의 몇몇 부등식과 사면체의 유사한 부등식들에 관련하여서는 주목할 만한 결과를 얻지 못했다.

본 연구의 결과들은 한국과학영재학교 및 과학고등학교의 R&E 운영의 개선 방안, 성공적인 R&E 활동을 위한 효과적인 접근 방법을 모색을 위한 기초 자료가 될 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

김종득 (2004). 2004년도 과학영재발굴 · 육성사업 결과보고서(세부사업명: 과학영재학교 교육과정 개정 연구). 대전: 한국과학재단.

남승인 (2004). 심화학습 프로그램에 기초한 속진학습 프로그램 개발 방안, 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육논문집> **18(3)**, pp. 29-44.

류성림 (2003). 초등 수학 영재의 다중지능 분석, 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육논문집> **17**, pp. 49-64.

문화일보 (2006). 정부, 과학영재 발굴 · 육성 올 1095억 투입, 2006년 1월 18일 9면.

방승진 · 박두성 (2005). 과학고 R&E에서의 학생의 논문지도 예, 제 10회 국제수학창의성교육세미나 프로시딩, p.81.

신현용 · 유익승 · 한인기 (2000). 과학고등학교 수학 특별반의 영재교육에 관한 연구, 한국수학교육학회 시리즈 F <수학교육 학술지> **5**, pp.125-140.

오연중 (2003). 민족사관고등학교의 수학교육, 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육논문집> **17**, p.139.

유윤재 (2004). 수학적 창의성의 개념, 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육논문집> **18(3)**, pp.81-94.

이강섭 · 황동주(2004). 초등학교 1학년 수학영재를 위한 심화프로그램 개발, 수학교육논문집 **18(3)**, pp. 73-80.

이상원 · 방승진 (2004). 시 · 도 교육청 영재 심화 교수 · 학습 자료개발에 관한 연구, 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육논문집> **18(3)**, pp.171-198.

한국과학재단 (2004). 2005년 과학영재학교 R&E 프로그램 지원 사업 신청 요강, 인터넷자료: rne.kaist.ac.kr

한국교육개발원 (2000). *영재교육과정 개발 연구 II*, 서울: 장서원.

한인기 외 4인 (2005). 헤론의 공식과 유사한 사면체의 부피 공식에 대한 연구, 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육논문집> **19(3)**, pp.517-526.

한인기 (2005a). 삼각형판과 사각형판의 무게중심에 관한 연구, 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교

육논문집> 19(3), pp.471-484.
한인기 (2005b). R&E 프로그램의 발전 모색, 한국과학영재학교 R&E 프로그램 발전 방향 모색을 위한 세미나, 부산: 한국과학영재학교.
Lakatos I. (1976). *Proofs and refutations*/ 우정호 역. *수학적 발견의 논리*, 서울: 민음사.

A Study on Administration and Teaching of R&E in Korea Science Academy

- Laying Stress on Mathematics Project No.7 -

Inki Han
Dept of Mathematics Education, Gyeongsang National University, 660-701, Korea
E-mail: inkiski@gsnu.ac.kr

We study on administration system and teaching of R&E(Research and Education) in Korea Science Academy(KSA) laying stress on Mathematics project No.7. We analyze in detail administration system of R&E in KSA(for example, aim, human constitution, practical execution), and draw some meaningful suggestions in order to receive successful results in R&E of KSA. And we describe mathematical topics, problems, and results which are received by students of KSA in the process of R&E(project No.7).

* ZDM Classification : C94
* MSC2000 Classification : 97C90
* Key Word : Research and Education, triangle, tetrahedron, Lakatos's heuristics, analogy