韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 20집 제1호. 2006. 2. 9-18

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E
Communications of Mathematical Education
Vol. 20 No 1, Feb. 2006. 9-18

삼각형의 높이와 방접원의 개념유추에 대한 연구

유 익 승 (전북과학고등학교)
한 인 기 (경상대학교)1)
신 현 용 (한국교원대학교)

본 연구는 수학 영재교육에서 유추를 통한 발명 및 탐구 중심의 교육을 구현하는데 관련된 기초 연구로, 본 연구에서는 삼각형의 변들-높이들, 높이들-방접원들의 반지름에 관련된 개념유추를 통해, 삼각형의 높이 및 방접원에 대한 흥미로운 수학적 사실들을 추측하고, 증명하였다. 본 연구를 통해 얻어진 수학적 결과들은, 수학 영재교육에서 학생들의 탐구 및 발명 활동을 위한 기초 자료가 될 것이다. 그리고, 본 연구에 제시된 방법유추를 통한 수학적 발명의 방법은 수학 자료에 창의적으로 접근하는 방법을 보여주는 전형적인 모범이 될 수 있을 것이다.

1. 서 론

한국교육개발원(2000)에 의하면, 영재교육에서는 탐구 과정과 활동을 강조하며, 창의적 산출물의 생산을 격려한다. 즉, 영재교육에서는 기성의 산물로서의 수학적 지식, 능력, 기능을 수동적으로 축적하는 것이 아니라, 학생의 자기주도적인 사고활동을 통한 탐구 중심, 수학적 발명 중심의 교육이 이루어져야 하며, 이러한 과정의 결과로 창의적 산출물을 생산할 수 있는 교육이어야 한다.

에르든에프・한인기(2005, p.68)는 창의적인 탐구 중심의 수학교육에 관련하여, '학생들은 미지의 세계에서 길을 찾을 수 있어야 하며, 독자적으로 지식을 확장하는 방법을 터득할 수 있도록 해야 한다. 학생들이 진지하게 생각하고 탐구하는 것을 흥미로워하고 이를 기꺼이 시도할 수 있도록 해야 한다... 교사는 학생들에게 대상들을 비교하고 이들의 속성들을 비교하는 습관을 길러주며, 유추를 시도하고, 가능한 경우에는 문제의 다른 변형을 생각하며 문제를 확장하고 문제의 형태를 바꾸며, 문제의 본질을 조망해 보는 습관을 길러주어야 한다'고 주장하면서, 창의적 탐구와 수학적 발명에서 유추의 중요성을 강조하였다.

유추에 대한 국내의 연구들을 살펴보면, 강시중(1987), 우정호(2000), 에르든에프・한인기(2005) 등은 인지 활동 및 사고의 도구로 새로운 추측을 제기하는 유추의 본질 및 역할을 규명하였고, 한인기・이상근(2000), 한인기(2001, 2002)는 유추를 통한 수학적 탐구활동을 다양한 주제에 관련하여 상

1) 수학교육과 교수/ 과학영재교육원 교수

* ZDM분류 : E54
* MSC2000분류 : 97C90
* 주제어 : 삼각형의 높이, 방접원, 개념유추

세히 기술하였다. 이들 연구는 수학교육학에서 유추의 본질 및 활용가능성을 규명하고, 이를 바탕으로 탐구와 발명 중심의 수학교육을 구체화하려는 의미로운 접근들이라 할 수 있다. 특히, 한인기 · 이상근의 연구(2000)에서는 수학 심화학습에서 유추를 통해 사면체의 새로운 성질들을 추측, 증명하는 과정을 상세히 제시하였는데, 이것은 수학 영재교육에서 유추 방법의 활용에 대한 의미있는 가능성을 제시하였다.

본 연구는 수학 영재교육에서 유추를 통한 발명 및 탐구 중심의 교육을 구현하는데 관련된 기초연구로, 본 연구에서는 삼각형의 변들-높이들, 높이들-방접원들의 반지름에 관련된 개념유추를 통해, 삼각형의 높이 및 방접원에 대한 흥미로운 수학적 사실들을 추측하고, 증명할 것이다. 본 연구를 통해 얻어진 수학적 결과들은, 수학 영재교육에서 학생들의 탐구 및 발명 활동을 위한 기초 자료가 될 것이다. 그리고, 본 연구에 제시된 방법유추를 통한 수학적 발명의 방법은 수학 자료에 창의적으로 접근하는 방법을 보여주는 전형적인 모범이 될 수 있을 것이다.

2. 삼각형의 높이와 방접원에서 개념유추

유추는 대상 A, B 사이에 존재하는 유사성에 근거한다. 이때, 대상 A, B의 종류에 따라 개념유추와 방법유추로 나눌 수 있다. 대상 A와 B가 개념이며, 대상 A의 어떤 속성을 대상 B로 유추하면, 이를 개념유추라 한다. 한편, 대상 A와 B가 수학 문제이며, 문제 A의 증명 방법을 문제 B로 유추하면, 이것을 방법유추라 한다. 즉, 개념유추는 대상 A, B 사이의 유사성에 근거하여, 대상 A에 성립하는 어떤 명제를 대상 B로 유추하여, 대상 B에 대해서 그 명제가 성립한다고 추리하는 것을 의미한다.

본 연구에서는 삼각형의 변들-높이들 사이의 개념유추, 삼각형의 높이들-방접원들의 반지름 사이의 개념유추를 조사할 것이다. 이를 위해, 삼각형의 변들에 관련하여 중등학교 교육과정에 제시된 내용들 중에서, 다음을 추출하였다:

- 변들을 이용한 삼각형의 존재 조건(삼각부등식);
- 직각삼각형에서 피타고라스 정리;
- 코사인 제 2정리;
- 헤론 공식.

삼각형의 변들-높이들 사이의 개념유추를 통해, '아마, 삼각형의 존재조건을 삼각형의 높이들을 이용하여 나타낼 수 있을 것이다', '아마, 피타고라스 정리를 삼각형의 높이들을 이용하여 나타낼 수 있을 것이다', '아마, 코사인 제 2정리를 삼각형의 높이들을 이용하여 나타낼 수 있을 것이다', '아마, 헤론 공식을 삼각형의 높이들을 이용하여 나타낼 수 있을 것이다' 등과 같은 추리를 얻을 수 있으며, 본 연구에서는 이들 추리를 증명할 것이다.

한편, 삼각형의 높이들-방접원들의 반지름 사이의 개념유추를 통해서는, '아마, 높이에 의한 삼각형의 존재조건 표현을 방접원들의 반지름을 이용하여 나타낼 수 있을 것이다', '아마, 높이에 의한 피

타고라스 정리 표현을 방접원들의 반지름을 이용하여 나타낼 수 있을 것이다', '아마, 높이에 의한 코사인 제 2정리 표현을 방접원들의 반지름을 이용하여 나타낼 수 있을 것이다', '아마, 높이에 의한 헤론 공식의 표현을 방접원들의 반지름을 이용하여 나타낼 수 있을 것이다' 등과 같은 추리를 얻을 수 있으며, 본 연구에서는 이들 추리를 증명할 것이다.

이때, 삼각형의 높이들과 방접원들의 반지름 사이의 유사성을 보고, 이를 바탕으로 개념유추를 시도하는 것은 쉽지 않다. 특히, 본 연구에서는 에르든예프 · 한인기(2005)에 제시된 다음 관계식에서 유사점을 발견하여, 삼각형의 높이들과 방접원들의 반지름 사이의 방법유추를 시도하여, 성공적인 결과를 얻었다: 삼각형 ABC의 세 높이를 h_a, h_b, h_c, 방접원들의 반지름을 r_a, r_b, r_c, 내접원의 반지름을 r이라 하면, $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$과 $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$, 즉 $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}$이 성립한다.

3. 높이들, 방접원의 반지름들에 의한 삼각형의 존재성

삼각형의 존재조건은 변들 a, b, c에 의해, 다음과 같이 나타낼 수 있다: 양의 실수 a, b, c가 삼각부등식을 만족시키면($a<b+c$, $b<a+c$, $c<a+b$), a, b, c를 변으로 가지는 삼각형 ABC가 존재한다.

이제, 삼각형의 변들-높이들에 대한 개념유추를 통해, '아마, 변들에 의한 삼각형의 존재조건 표현을 높이들을 이용하여 나타낼 수 있을 것이다'라는 추리를 얻을 수 있다. 이제, 세 높이로 h_a, h_b, h_c를 가지는 삼각형 ABC의 존재성에 대해 살펴보자.

성질 1. $\frac{1}{h_a}$, $\frac{1}{h_b}$, $\frac{1}{h_c}$가 삼각부등식을 만족시키면, h_a, h_b, h_c를 높이로 가지는 삼각형 ABC가 유일하게 존재한다.

성질 1의 증명. 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면, $S=\frac{1}{2}ah_a$, $S=\frac{1}{2}bh_b$, $S=\frac{1}{2}ch_c$가 성립한다. 이로부터, $a=\frac{2S}{h_a}$, $b=\frac{2S}{h_b}$, $c=\frac{2S}{h_c}$이다. 이로부터, 삼각형 ABC에서 변들 a, b, c에 대한 삼각부등식과 $\frac{1}{h_a}$, $\frac{1}{h_b}$, $\frac{1}{h_c}$에 대한 삼각부등식은 동치임을 알 수 있다. 실제로, $a<b+c$로부터, $\frac{2S}{h_a}<\frac{2S}{h_b}+\frac{2S}{h_c}$, $\frac{1}{h_a}<\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$이 성립하며, 그 역도 성립한다.

한편, h_a, h_b, h_c는 각각 a, b, c에 의해 유일하게 결정되므로, h_a, h_b, h_c을 높이로 가지는 삼각형 ABC의 유일성은 a, b, c를 변으로 하는 삼각형의 유일성으로부터 유도된다. □

이제, 삼각형의 높이들-방접원들의 반지름 사이의 개념유추를 통해서, '아마, 높이에 의한 삼각형의 존재조건 표현을 방접원들의 반지름을 이용하여 나타낼 수 있을 것이다'라는 추리를 얻을 수 있다. 실제로, 다음 성질 2가 성립한다.

성질 2. $r_a>0$, $r_b>0$, $r_c>0$이면, r_a, r_b, r_c를 방접원의 반지름으로 가지는 삼각형 ABC가 유일하게 존재한다.

성질 2를 증명하기 위해, 다음 보조정리를 증명하자.

보조정리. 삼각형 ABC의 세 높이를 h_a, h_b, h_c, 방접원의 반지름들을 r_a, r_b, r_c라 하자. 그러면, 다음 등식이 성립한다.

$$h_a=\frac{2r_br_c}{r_b+r_c},\ h_b=\frac{2r_ar_c}{r_a+r_c},\ h_c=\frac{2r_ar_b}{r_a+r_b}$$

보조정리의 증명. 에르든예프 · 한인기(2005, p.202)는 삼각형 ABC의 넓이를 S, 둘레의 절반을 s, 즉 $s=½(a+b+c)$, 방접원의 반지름들을 r_a, r_b, r_c라 하면, $s-a=\frac{S}{r_a}$, $s-b=\frac{S}{r_b}$, $s-c=\frac{S}{r_c}$임을 보였다. 이들 세 식을 연립하면, 다음을 얻을 수 있다.

$$a=S\left(\frac{1}{r_c}+\frac{1}{r_b}\right),\ b=S\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_c}\right),\ c=S\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}\right).$$

한편, $\frac{a}{2}=\frac{S}{h_a}$이므로, 위의 식으로부터 $\frac{a}{S}=\frac{2}{h_a}=\frac{1}{r_c}+\frac{1}{r_b}$을 얻을 수 있다. 이로부터, $h_a=\frac{2r_br_c}{r_b+r_c}$을 얻을 수 있다. 유사한 방법으로, $\frac{b}{2}=\frac{S}{h_b}$, $\frac{c}{2}=\frac{S}{h_c}$을 이용하면, $h_b=\frac{2r_ar_c}{r_a+r_c}$, $h_c=\frac{2r_ar_b}{r_a+r_b}$을 얻을 수 있다. □

성질 2의 증명. 성질 1의 증명에서 삼각형 ABC에서 변들 a, b, c에 대한 삼각부등식과 $\frac{1}{h_a}$, $\frac{1}{h_b}$, $\frac{1}{h_c}$에 대한 삼각부등식은 동치임을 보였다. 이제, $\frac{1}{h_a}$, $\frac{1}{h_b}$, $\frac{1}{h_c}$에 대한 삼각부등식을 살펴보자. $\frac{1}{h_a}<\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$에 보조정리의 결과를 대입하면, $\frac{(r_b+r_c)}{2r_br_c}<\frac{(r_a+r_c)}{2r_ar_c}+\frac{(r_a+r_b)}{2r_ar_b}$을 얻을 수 있다. 부등식의 우변을 통분하여 좌변과 정리하면, $r_br_c>0$을 얻게 된다. 방접원의 반지름은 양수이므로, $\frac{1}{h_a}<\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$은 $r_b>0$, $r_c>0$인 것과 동치이다. 같은 방법으로, $\frac{1}{h_b}<\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}$는 $r_a>0$, $r_c>0$인 것과 동치이며, $\frac{1}{h_c}<\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}$는 $r_a>0$, $r_b>0$인 것과 동치이다. 결국, 세 양수 a, b, c에 대해 삼각부등식이 성립한다는 것은 $r_a>0$, $r_b>0$, $r_c>0$인 것과 동치이다.

한편, 보조정리에 의해, r_a, r_b, r_c는 각각 h_a, h_b, h_c에 의해 유일하게 결정되므로, r_a, r_b, r_c을 방접원의 반지름으로 가지는 삼각형 ABC의 유일성은 h_a, h_b, h_c를 높이로 가지는 삼각형의 유일성으로부터 유도된다. □

성질 2로부터, 양수 r_a, r_b, r_c가 주어지면, 이들을 방접원의 반지름으로 가지는 삼각형 ABC가 유일하게 존재한다는 것을 알 수 있다.

4. 삼각형의 높이와 방접원의 반지름에 대한 개념유추

(1) 피타고라스 정리에 대한 다른 표현

직각삼각형 ABC에서 빗변의 길이를 a라 하고, 나머지 변들을 b, c라 하자. 그러면, $a^2=b^2+c^2$이 성립한다. 이제, 삼각형의 변들-높이들에 대한 개념유추를 통해, '아마, 변들에 의한 피타고라스 정리의 표현을 높이들을 이용하여 나타낼 수 있을 것이다'라는 추리를 얻을 수 있다.

성질 3. 삼각형 ABC에서 빗변에 그은 높이를 h_a, 나머지 두 변에 그은 높이를 h_b, h_c라 하자. 그러면, 삼각형 ABC가 직각삼각형일 필요충분조건은 $\frac{1}{h_a^2}=\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}$이다.

성질 3의 충분조건 증명. $a = \frac{2S}{h_a}$, $b = \frac{2S}{h_b}$, $c = \frac{2S}{h_c}$을 피타고라스 정리 $a^2=b^2+c^2$에 대입하면, $\frac{1}{h_a^2}=\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}$을 얻을 수 있다.

필요조건 증명. 등식 $\frac{1}{h_a^2}=\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}$의 양변에 $4S^2$를 곱하여, $a = \frac{2S}{h_a}$, $b = \frac{2S}{h_b}$, $c = \frac{2S}{h_c}$을 대입하면, $a^2=b^2+c^2$이 얻어진다. 그러므로, 피타고라스 정리의 역에 의해, 필요조건이 증명된다. □

이제, 삼각형의 높이들-방접원들의 반지름 사이의 개념유추를 통해서, '아마, 높이들에 의한 피타고라스 정리의 표현을 방접원들의 반지름을 이용하여 나타낼 수 있을 것이다'라는 추리를 얻을 수 있다. 실제로, 다음 성질 4가 성립한다[1].

성질 4. 삼각형 ABC의 가장 긴 방접원의 반지름을 r_a, 나머지 두 방접원의 반지름을 r_b, r_c라 하자. 그러면, 삼각형 ABC가 직각삼각형일 필요충분조건은 $r_a^2=r_ar_b+r_br_c+r_cr_a$이다.

성질 4의 충분조건 증명. 보조정리의 증명에서 $a=S\left(\frac{1}{r_c}+\frac{1}{r_b}\right)$, $b=S\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_c}\right)$, $c=S\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}\right)$을 유도하였다. 삼각형 ABC가 직각삼각형이면, a, b, c에 대한 피타고라스 정리 $a^2=b^2+c^2$가 성립하므로(r_a가 가장 크므로, a가 가장 큰 변이 됨), 다음이 성립한다.

---

1) 한국교육개발원에서 중학생을 대상으로 주최한 2005학년도 창의적 산출물 대회에서 유익승 교사는 영재학생들과 성질 4를 찾아내고, 그 타당성을 증명하였다고 보고하였음.

$$S^2\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)^2=S^2\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_c}\right)^2+S^2\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}\right)^2$$

이로부터,

$$\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)^2=\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_c}\right)^2+\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}\right)^2.$$

얻어진 식을 통분하여 정리하면, $r_a^2=r_ar_b+r_br_c+r_cr_a$을 얻을 수 있다.

필요조건 증명. 성질 3에서와 마찬가지로, 충분조건의 증명과정을 역으로 거슬러 가면, 구하는 증명을 얻을 수 있다. □

(2) 코사인 제 2정리에 대한 다른 표현

삼각형 ABC에서 변들에 의해 표현된 코사인 제 2정리 $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$을, 삼각형의 변들-높이들에 대한 개념유추를 통해, '아마, 코사인 제 2정리를 높이들을 이용하여 나타낼 수 있을 것이다'라는 추리를 얻을 수 있다. 다음 성질 5가 성립한다.

성질 5. 삼각형 ABC에서 길이가 a, b, c인 변에 그은 높이를 각각 h_a, h_b, h_c라 하자. 그러면, 다음 등식이 성립한다:

$$\frac{1}{h_a^2}=\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}-\frac{2\cos A}{h_bh_c},\quad \cos A=\frac{h_a^2h_b+h_a^2c-h_bh_c}{2h_a^2h_bh_c}$$

성질 5의 증명. 코사인 제 2정리 $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$에 $a=\frac{2S}{h_a}$, $b=\frac{2S}{h_b}$, $c=\frac{2S}{h_c}$을 대입하자. 그러면, $\frac{4S^2}{h_a^2}=\frac{4S^2}{h_b^2}+\frac{4S^2}{h_c^2}-\frac{8S^2\cos A}{h_bh_c}$을 얻는다. 양변을 $4S^2$으로 나누면, 구하는 식 $\frac{1}{h_a^2}=\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}-\frac{2\cos A}{h_bh_c}$을 얻을 수 있다. 이제, $\frac{2\cos A}{h_bh_c}$를 좌변으로 이항하자. 그러면,

$$\cos A=\frac{\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}-\frac{1}{h_a^2}}{\frac{2}{h_b\cdot h_c}}=\frac{\frac{h_c}{h_b}+\frac{h_b}{h_c}-\frac{h_bh_c}{h_a^2}}{2}=\frac{h_a^2h_b+h_a^2c-h_bh_c}{2h_a^2h_bh_c}.\ \square$$

이제, 삼각형의 높이들-방접원들의 반지름 사이의 개념유추를 통해서, '아마, 높이들에 의한 코사인 제 2정리의 표현을 방접원들의 반지름을 이용하여 나타낼 수 있을 것이다'라는 추리를 얻을 수 있다.

성질 6. 삼각형 ABC에서 길이가 a, b, c에 접하는 방접원의 반지름을 각각 r_a, r_b, r_c라 하자. 그러면, 다음 등식이 성립한다:

$$\cos A=\frac{r_br_c+r_a(r_b+r_c)-r_a^2}{(r_a+r_b)(r_a+r_c)}.$$

성질 6의 증명. 보조정리의 증명에서 $s-a=\frac{S}{r_a}$, $s-b=\frac{S}{r_b}$, $s-c=\frac{S}{r_c}$으로부터,

$$a=S\left(\frac{1}{r_c}+\frac{1}{r_b}\right),\quad b=S\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_c}\right),\quad c=S\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}\right)$$

을 유도했다. 이들 식을 코사인 제 2정리 $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$, $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$에 대입하자. 그러면,

$$\cos A=\frac{S^2\left(\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)^2+\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_c}\right)^2-\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)^2\right)}{2S^2\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_c}\right)\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}\right)}=\frac{r_br_c+r_a(r_b+r_c)-r_a^2}{(r_a+r_b)(r_a+r_c)}.$$

□

(3) 헤론 공식에 대한 다른 표현

삼각형 ABC에서 변을 a, b, c, 둘레의 절반을 s라 하면, 헤론 공식 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$이 성립한다. 삼각형의 변들-높이들에 대한 개념유추를 통해, '아마, 변들에 의한 헤론 공식을 높이들을 이용하여 나타낼 수 있을 것이다'라는 추리를 얻을 수 있다.

성질 7. 삼각형 ABC에서 길이가 a, b, c인 변에 그은 높이를 각각 h_a, h_b, h_c라 하자. 그러면, 다음 등식이 성립한다:

$$S=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)}}.$$

성질 7의 증명. 둘레의 절반을 s라 하면, $a=\frac{2S}{h_a}$, $b=\frac{2S}{h_b}$, $c=\frac{2S}{h_c}$로부터,

$$s=S\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right),\quad s-a=S\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right),$$

$$s-b=S\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b}\right),\quad s-c=S\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)$$

을 알 수 있다. 얻어진 식을 헤론의 공식 $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$에 대입하자. 그러면,

$$S=S^2\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)}.$$

S^2을 이항하면, 다음을 얻을 수 있다.

$$S=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)}}.\ \square$$

이제, 삼각형의 높이들-방접원들의 반지름 사이의 개념유추를 통해서, '아마, 높이들에 의한 헤론 공식의 표현을 방접원들의 반지름을 이용하여 나타낼 수 있을 것이다'라는 추리를 얻을 수 있다.

성질 8. 삼각형 ABC에서 변 a, b, c에 접하는 방접원의 반지름을 각각 r_a, r_b, r_c라 하자. 그러면, 다음 등식이 성립한다:

$$S=\frac{r_a r_b r_c}{\sqrt{r_a r_b+r_b r_c+r_c r_a}}.$$

성질 8의 증명. 둘레의 절반 s에 대해, $s-a=\frac{S}{r_a}$, $s-b=\frac{S}{r_b}$, $s-c=\frac{S}{r_c}$이 성립한다. 그리고, 내접원의 반지름 r에 대해 S=rs, 즉 $s=\frac{S}{r}$이 성립한다. 얻어진 등식들을 헤론의 공식에 대입하면,

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{\frac{S}{r}\cdot\frac{S}{r_a}\cdot\frac{S}{r_b}\cdot\frac{S}{r_c}}=\frac{S^2}{\sqrt{r r_a r_b r_c}}.$$

얻어진 등식을 정리하면, $S=\sqrt{r r_a r_b r_c}$을 얻을 수 있다.

이제, r을 r_a, r_b, r_c로 나타내기 위해, 등식 $\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}$을 사용하자. 우변을 통분하여 나누면, $r_a r_b+r_b r_c+r_c r_a=\frac{r_a r_b r_c}{r}$이다. 즉, $r=\frac{r_a r_b r_c}{r_a r_b+r_b r_c+r_c r_a}$이다. 이것을 $S=\sqrt{r r_a r_b r_c}$에 대입하자. 그러면,

$$S=\sqrt{\frac{(r_a r_b r_c)^2}{r_a r_b+r_b r_c+r_c r_a}}=\frac{r_a r_b r_c}{\sqrt{r_a r_b+r_b r_c+r_c r_a}}.\ \square$$

5. 결 론

본 연구는 수학 영재교육에서 유추를 통한 발명 및 탐구 중심의 교육을 구현하는데 관련된 기초 연구로, 본 연구에서는 삼각형의 변들-높이들, 높이들-방접원들의 반지름에 관련된 개념유추를 통해, 삼각형의 높이 및 방접원에 대한 흥미로운 수학적 사실들을 추측하고, 증명하였다.

삼각형의 변들에 관련하여 중등학교 교육과정에 제시된 (1) 변들을 이용한 삼각형의 존재 조건(삼각부등식); (2) 직각삼각형에서 피타고라스 정리; (3) 코사인 제 2정리; (4) 헤론 공식을 바탕으로, 삼각형의 변들-높이들 사이의 개념유추, 삼각형의 높이들-방접원들의 반지름 사이의 개념유추를 수행하였다.

삼각부등식에 대한, 변들-높이들에 대한 개념유추의 결과는 $\frac{1}{h_a}$, $\frac{1}{h_b}$, $\frac{1}{h_c}$가 삼각부등식을 만족시킨다는 것이고, 높이들-방접원들의 반지름에 대한 개념유추의 결과는 $r_a>0$, $r_b>0$, $r_c>0$이었다.

한편, 피타고라스 정리에 대한, 변들-높이들에 대한 개념유추의 결과는 $\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2}$ 이며, 높이들-방접원들의 반지름에 대한 개념유추의 결과는 $r_a^2 = r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a$이었다.

코사인 제 2정리에 대한 변들-높이들에 대한 개념유추의 결과는 $\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2} - \frac{2\cos A}{h_b h_c}$ 또는 $\cos A = \frac{h_a^2 h_b + h_a^2 c - h_b h_c}{2h_a^2 h_b h_c}$ 이며, 높이들-방접원들의 반지름에 대한 개념유추의 결과는 $\cos A = \frac{r_b r_c + r_a(r_b + r_c) - r_a^2}{(r_a + r_b)(r_a + r_c)}$ 였다.

헤론 공식에 대한, 변들-높이들에 대한 방법유추의 결과는

$$S = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)}}$$

이고, 높이들-방접원들의 반지름에 대한 개념유추의 결과는 $S = \frac{r_a r_b r_c}{\sqrt{r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a}}$ 와 같이 표현된다.

본 연구를 통해 얻어진 수학적 결과들은, 수학 영재교육에서 학생들의 탐구 및 발명 활동을 위한 기초 자료가 될 것이다. 그리고, 본 연구에 제시된 방법유추를 통한 수학적 발명의 방법은 수학 자료에 창의적으로 접근하는 방법을 보여주는 전형적인 모범이 될 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

강시중 (1987). 수학교육론, 서울: 교육출판사.

에르든예프 · 한인기 (2005). 유추를 통한 수학탐구, 서울: 승산.

우정호 (2000). 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울: 서울대학교출판부.

한국교육개발원 (2000). 영재교육과정 개발 연구[III], 서울: 장서원.

한인기 (2001). 유추를 활용한 무게중심 탐구에 관한 연구, 중등교육연구 **13**, pp.205-218.

한인기 (2002). 유추를 이용한 삼각형의 각의 이등분선 성질 탐구, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> **41(2)**, pp.215-226.

한인기 · 이상근 (2000). 유추를 활용한 기하 심화학습 자료 개발, 한국수학교육학회 시리즈 F <수학교육 학술지> **5**, pp.165-174.

A study on concept analogy of altitude and escribed circle of triangle

Lyou, Ikseung
Jeonbuk Science High School, 570-911, Korea
E-mail: infgrp@hanmail.net

Han, Inki
Dept of Mathematics Education, Gyeongsang National University, 660-701, Korea
E-mail: inkiski@gsnu.ac.kr

Shin, Hyunyong
Dept of Mathematics Education, Korea National University of Education, 363-791, Korea
E-mail: shin@knue.ac.kr

In this paper we study on concept analogy of altitude and escribed circle of triangle. We start from following theorems related with sides of triangle: existence of triangle, Pythagoras theorem, cosine theorem, Heron formula. Using concept analogy of sides-altitudes, altitudes-escribed circle's radii we discover some properties of altitude and escribed circle's radii and prove these properties.

* ZDM Classification : E54
* MSC2000 Classification : 97C90
* Key Word : altitude of triangle, escribed circle, concept analogy