韓國經營科學會誌
第31권 第1號
2006年 3月

광대역 위성 네트워크를 위한 최적 버퍼 및 타임슬롯 할당 체계*

†장근녕** · 박유진**

Optimal Buffer and Timeslot Allocation Scheme for Broadband Satellite Networks*

Kun-Nyeong Chang** · You-Jin Park**

■ Abstract ■

In this paper, we consider broadband satellite networks using MF-TDMA (Multi-Frequency Time Division Multiple Access) scheme. We analyze the number of expected lost packets in each terminal, and mathematically formulate optimal buffer and timeslot allocation model to minimize the weighted sum of the numbers of expected lost packets. We also suggest optimal buffer and timeslot allocation scheme based on Lagrangean relaxation technique to solve the proposed model in a fast time. Extensive experiments show that the proposed scheme provides encouraging results.

Keyword : Optimal Buffer and Timeslot Allocation, Broadband Satellite Network, MF-TDMA

1. 서 론

멀티미디어 인터넷 서비스(multimedia Internet service)를 제공하기 위한 DVB-RCS(Digital Video Broadcasting - Return Channel via Satellite) 네트워크와 같은 대화형 광대역 위성 네트워크(interactive broadband satellite network)에 대한 개발이 선진국을 중심으로 전 세계적으로 활발하게 이루어지고 있다[3, 7, 10]. ETSI(European Telecommunications Standards Institute)[2]에 의해 표준화된

논문접수일 : 2005년 5월 11일　　논문게재확정일 : 2006년 3월 10일
* 이 논문은 2003년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음(KRF-2003-041-B00166).
** 연세대학교 정경대학 경영학과
† 교신저자

DVB-RCS 네트워크는 허브(hub), GEO(geostationary earth orbit) 위성, 다수의 단말(terminal) 등으로 구성되어 있는 대화형 광대역 위성 네트워크이다.

DVB-RCS와 같은 광대역 위성 네트워크의 효율적인 구현을 위해서는 부족한 리턴 링크 자원의 효율적인 활용이 필요하고, 이를 위해 리턴 링크의 자원을 효율적으로 활용하기 위한 타임슬롯 스케줄링 체계 개발을 위한 연구가 활발하게 이루어지고 있다[5, 6, 11]. 지금까지의 연구 결과를 종합해 보면 다양한 특성을 갖는 멀티미디어 서비스를 제공하는 환경 하에서는 CFDAMA(Combined Free/Demand Assignment Multiple Access) 방식이 가장 대표적인 것으로 나타나고 있다[6]. 현재까지 CFDAMA에 기반을 두어 개발된 대표적인 방식을 살펴보면, P_CFDAMA(Pure CFDAMA), R_CFDAMA(Round-robin CFDAMA), W_CFDAMA(Weighted CFDAMA), PR_CFDAMA(PRedictive CFDAMA) 등이 있다[5, 11]. P_CFDAMA, R_CFDAMA, W_CFDAMA 등에서 각 단말의 타임슬롯 수요는 현재 버퍼에서 대기하고 있는 패킷의 수로 결정된다. 이용 가능한 타임슬롯의 수가 단말의 전체 타임슬롯 수요보다 적으면, 각 단말에 할당되는 타임슬롯의 수는 요청 수요의 비율에 따라 결정된다. 이용 가능한 타임슬롯의 수가 전체 타임슬롯 수요보다 많으면 전체 수요를 충족시키고 타임슬롯이 남는데, 이 남은 여유 슬롯(free slots)은 P_CFDAMA에서는 할당되지 않고 버려지고, R_CFDAMA에서는 각 단말에 균등하게 할당되고, W_CFDAMA에서는 단말의 타임슬롯 요청 수요의 비율에 따라 할당된다. PR_CFDAMA에서는 각 단말의 타임슬롯 수요를 버퍼에서 대기하고 있는 타임슬롯의 수로 결정한다는 점에서는 이전의 방법과 동일하지만, 여유 슬롯을 수요 변화 추이를 예측하여 할당한다.

이들 방식에서는 단말들이 요청한 타임슬롯 수요가 이용 가능한 타임슬롯의 수보다 많으면, 요청한 수요에 비례하여 타임슬롯이 할당된다. 따라서 요청한 수요가 이용 가능한 타임슬롯의 수보다 많을 때, 각 단말에 어느 정도의 패킷이 앞으로 도착할 것인가에 대한 정보를 반영하지 않고 있고, 결국 패킷 손실량과 데이터 특성 정도 측면에서 최적의 할당을 하지 못하고 있다고 할 수 있다. 각 단말에 도착하는 패킷은 이용 가능한 타임슬롯이 없을 경우 버퍼에 저장되는데, 이 때 버퍼에 공간이 없으면 패킷 손실이 발생한다. 이러한 패킷 손실은 시스템 관점에서 볼 때 가급적 감소시키는 것이 바람직하다[8].

본 논문에서는 각 단말에서의 패킷 손실량 기대값을 분석하고, 각 데이터의 특성을 고려하면서 패킷 손실량 기대값의 가중합을 최소화하는 버퍼 및 타임슬롯 할당 모형을 제시한다. 또한, 제시한 모형을 빠른 시간 내에 해결할 수 있는 라그랑지안 이완 기법을 이용한 최적 버퍼 및 타임슬롯 할당 체계를 제시한다.

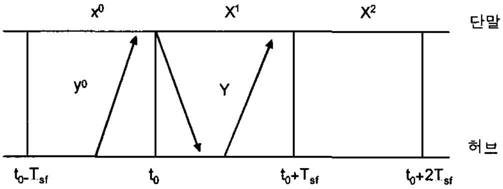
2장에서는 단말의 패킷 손실량 기대값을 분석하고, 3장에서는 최적 버퍼 및 타임슬롯 할당 모형을 제시하고, 라그랑지안 이완 기법을 이용해 제시한 모형을 빠른 시간 내에 해결할 수 있는 방법을 제시한다. 4장에서는 실험 결과를 제시하고, 5장에서는 결론을 제시한다.

2. 패킷 손실량 분석

리턴 링크(return link; 위성을 거쳐 단말에서 허브로의 링크)에서의 다중접속체계(multiple access scheme)는 MF-TDMA(Multi-Frequency Time Division Multiple Access)에 근거를 두고 있다. 리턴 링크에 할당되는 라디오 자원은 다수의 단말에 의해 공유된다. 단말은 허브에 CR(capacity request) 메시지를 전송하고, 이 메시지를 받은 허브는 TBTP (terminal burst time plan)를 생성하여 단말에 전송한다. TBTP를 받은 단말은 이를 통해 자신에게 어떤 타임슬롯들이 할당되었는지를 파악하게 된다.

단말은 허브에 CR 메시지를 전송하고, 허브는 단말이 요청한 수요를 이용하여 TBTP 테이블을 생

성한다. 단말은 이 테이블에 따라 자신에게 할당된 타임슬롯을 기다리게 된다. 단말에게 수신한 TBTP 테이블을 읽을 수 있는 충분한 시간을 제공하기 위해서는 타임슬롯 할당 시간을 최대한 줄일 필요가 있다.



[그림 1] 단말과 허브간의 메시지 전송 체계

$[t_0, t_0+T_{sf})$에 이용하도록 할당된 버퍼 크기(buffer size)를 b^0라 하고, t_0 시점에 버퍼에 대기하고 있는 패킷의 수를 q^0라 하자. x^0를 $[t_0-T_{sf}, t_0)$에 발생한 타임슬롯 수요량이라 하고, y^0을 $[t_0, t_0+T_{sf})$에 사용하도록 할당된 타임슬롯 수라 하자. 또한, X^1과 X^2를 $[t_0, t_0+T_{sf})$와 $[t_0+T_{sf}, t_0+2T_{sf})$에 발생할 것으로 예상되는 타임슬롯 수요량이라 하고, Y를 $[t_0+T_{sf}, t_0+2T_{sf})$에 사용하도록 할당되는 타임슬롯 수라 하고, B를 $[t_0+T_{sf}, t_0+2T_{sf})$에 사용하도록 할당되는 버퍼 크기라 하자. 이 때 t_0+T_{sf} 시점에 버퍼에 대기하고 있는 패킷의 수는 $Q^1=\min\{\max\{q^0+X^1-y^0, 0\}, b^0\}$이고, 따라서 $[t_0+T_{sf}, t_0+2T_{sf})$ 기간의 패킷 손실량은 $L=\max\{Q^1+X^2-Y-b^0, 0\}$이다. 이 값은 다음과 같이 정리된다.

$$L=\begin{cases}\max\{X^2-Y-B,0\}, & \text{if} \quad q^0+X^1-y^0 \le 0 \\ \max\{X^1+X^2-Y-B-b^0,0\}, & \text{if} \quad 0<q^0+X^1-y^0 \le b^0 \\ \max\{X^2-Y-B+b^0,0\}, & \text{otherwise}\end{cases}$$

$f(x^1)$과 $f(x^2)$를 각각 X^1과 X^2의 확률질량함수(probability mass function)라 할 때, $[t_0+T_{sf}, t_0+2T_{sf})$에 사용하도록 타임슬롯을 y개를 할당하고(즉, $Y=y$이면) 이용 가능한 버퍼 크기를 b 만큼 할당하면(즉, $B=b$이면), 패킷 손실량 L의 기대값 $E[L|y,b]$는 다음과 같이 계산되어진다.

$$E[L|y,b] = \sum_{x^1=-\infty}^{y^0-q^0} f(x^1) \times \sum_{x^2=y+b}^{\infty} (x^2-y-b) f(x^2)$$
$$+ \sum_{x^2=y+b+(y^0-q^0)-x^1}^{\infty} \sum_{x^1=y^0-q^0+1}^{b^0+y^0-q^0} (x^1+x^2-y-b-(y^0-q^0))$$
$$f(x^1)f(x^2)$$
$$+ \sum_{x^1=b^0+y^0-q^0+1}^{\infty} f(x^1) \times \sum_{x^2=-b^0+y+b}^{\infty} (x^2+b^0-y-b) f(x^2)$$

3. 최적 버퍼 및 타임슬롯 할당 체계

패킷 손실량 기대값의 가중합을 최소화하는 모형 TELP(Total Expected Lost Packets)는 다음과 같이 정형화되어진다.

(TELP)

$$Min \sum_{i \in R} \sum_{j \in C} w_{ij} E[L_{ij}|y_{ij}, b_{ij}] \quad (1)$$

$$s.t. \sum_{i \in R} \sum_{j \in C} y_{ij} \le N \quad (2)$$

$$\sum_{j \in C} b_{ij} = B_i, \forall i \quad (3)$$

$$y_{ij}, b_{ij}, \forall i,j : \text{nonnegative integers} \quad (4)$$

여기서 R은 단말의 집합을 나타내고, C는 데이터 클래스의 집합을 나타낸다. y_{ij}는 단말 i의 데이터 클래스 j에 할당되는 타임슬롯 수를 나타내고, b_{ij}는 단말 i의 데이터 클래스 j에 할당되는 버퍼 크기를 나타낸다. $E[L_{ij}|y_{ij}, b_{ij}]$는 단말 i의 데이터 클래스 j에 y_{ij}개의 타임슬롯과 b_{ij}개의 버퍼가 할당되었을 때의 패킷 손실량 기대값을 나타낸다. w_{ij}는 단말 i의 데이터 클래스 j에 대한 가중치를 나타낸다. 이 값은 데이터 클래스의 지연 특성 등을 고려하여 결정된다. N은 이용 가능한 총 타임슬롯 수를 나타내고, B_i는 단말 i의 이용 가능한 총 버퍼 크기를 나타낸다.

이제 (TELP)를 해결하기 위해 라그랑지안 이완 기법(Lagrangean relaxation technique)을 적용한다. 먼저 라그랑지 승수(Lagrange multiplier) π로 제약식 (2)를 이완하여 아래의 라그랑지안 이완 문제 (RTELP)를 만든다.

(RTELP)

$$L(\pi)=Min\sum_{i\in R}\sum_{j\in C}w_{ij}E[L_{ij}|y_{ij},b_{ij}]+\pi(\sum_{i\in R}\sum_{j\in C}y_{ij}-N)$$
$$s.t.\ (3),\ (4)$$

최적화이론[4]에 의하면 각 $\pi\geq 0$에 대해서 $L(\pi)$는 (TELP)의 최적 목적식 값에 대한 하한(lower bound)이다. $L(\pi)$를 최대화하는 π^*를 구하면 가장 큰 하한을 구할 수 있다.

$L(\pi)$는 다음과 같이 2단계로 나누어서 구할 수 있다. 먼저 1단계에서는 각 단말 i별로 아래의 문제 (L_i^b)를 푼다. 즉, $y_{ij}=0,\forall j$이라 하고, $\sum_{j\in C}E[L_{ij}|y_{ij},b_{ij}]$를 최소화하는 $b_{ij},\forall j$를 구한다.

(L_i^b)

$$Min\sum_{j\in C}w_{ij}E[L_{ij}|0,b_{ij}]$$
$$s.t.\ \sum_{j\in C}b_{ij}=B_i$$
$$b_{ij}:\text{nonnegative integers}$$

$E[L_{ij}|y_{ij},b_{ij}]$가 비증가 이산볼록함수(nonincreasing discretely convex function)이면, (L_i^b)의 최적해는 아래의 프로시저 **(Solve_b)** 에 의해 쉽게 구할 수 있다.

Procedure Solve_b

$Step\ 1.$
$FOR(\forall j\in C)b_{ij}^*=0$
$Step 2.$
$FOR(1\leq k\leq B_i)\{$
$\quad j^*=\text{argmax}_{j\in C}w_{ij}(E[L_{ij}|0,b_{ij}^*]-E[L_{ij}|0,b_{ij}^*+1])$
$\quad b_{ij}^*=b_{ij}^*+1$
$\}$

다음으로 (L_i^b)의 최적해 b_{ij}^* 하에서 아래의 문제 (L_i^y)를 풀어서 최적해 y_{ij}^*를 구한다.

(L_i^y)

$$Min\sum_{j\in C}w_{ij}E[L_{ij}|y_{ij},b_{ij}^*]+\pi\sum_{j\in C}y_{ij}$$
$$s.t.\ y_{ij},\forall i,j:\text{nonnegative integers}$$

$E[L_{ij}|y_{ij},b_{ij}]$가 비증가 이산볼록함수이면 최적해 y_{ij}^*는 $w_{ij}(E[L_{ij}|y_{ij},b_{ij}^*]-E[L_{ij}|y_{ij}+1,b_{ij}^*])\leq\pi$를 만족하는 y_{ij}의 최소값이다. 이 값은 아래의 프로시저 **(Solve_y)**에 의해 쉽게 구할 수 있다.

Procedure Solve_y

$FOR(\forall j\in C)\ \{$
$\quad y_{ij}^*=0$
$\quad While(w_{ij}(E[L_{ij}|y_{ij}^*,b_{ij}^*]-E[L_{ij}|y_{ij}^*+1,b_{ij}^*])>\pi)\{$
$\qquad y_{ij}^*=y_{ij}^*+1$
$\quad \}$
$\}$

$E[L_{ij}|y_{ij},b_{ij}]$가 비증가 이산볼록함수이면, [Lemma 1]에 의해 (L_i^b), $\forall i$의 최적해 b_{ij}^*와 (L_i^y), $\forall i$의 최적해 y_{ij}^*가 (RTELP)의 최적해가 되고, 또한 [Lemma 2]에 의해 b_{ij}^*와 y_{ij}^*를 이용하여 (TELP)의 최적해를 쉽게 구할 수 있다.

[Lemma 1] $E[L_{ij}|y_{ij},b_{ij}]$가 비증가 이산볼록함수이면, (L_i^b), $\forall i$의 최적해 b_{ij}^*와 (L_i^y), $\forall i$의 최적해 y_{ij}^*가 (RTELP)의 최적해가 된다. 즉, $L(\pi)=\sum_{i\in R}\sum_{j\in C}w_{ij}E[L_{ij}|y_{ij}^*,b_{ij}^*]+\pi(\sum_{i\in R}\sum_{j\in C}y_{ij}^*-N)$이다.

<증명> 부록 참조. ■

[Lemma 2] $E[L_{ij}|y_{ij},b_{ij}]$가 비증가 이산볼록함수라 하자. 또한, (L_i^b), $\forall i$의 최적해를 b_{ij}^*라 하고, b_{ij}^*와 π^* 하에서 구한 (L_i^y), $\forall i$의 최적해를 y_{ij}^*라 하자. 여기서 π^*는 $\sum_{i\in R}\sum_{j\in C}y_{ij}^*$ 값이 최대화되도록 하는(단, $\sum_{i\in R}\sum_{j\in C}y_{ij}^*\leq N$) 가장 작은 π 값이다.

$\sum_{i\in R}\sum_{j\in C}y_{ij}^*=N$이면, b_{ij}^*와 y_{ij}^*는 (TELP)의 최적해이다. $\sum_{i\in R}\sum_{j\in C}y_{ij}^*<N$이면, $w_{ij}(E[L_{ij}|y_{ij}^*,b_{ij}^*]-E[L_{ij}|y_{ij}^*+1,b_{ij}^*])=\pi^*$인 (i,j)를 $N-\sum_{i\in R}\sum_{j\in C}y_{ij}^*$개 선택하여 y_{ij}^* 값을 1씩 증가시켜 $\sum_{i\in R}\sum_{j\in C}y_{ij}^*=N$이 되도록 만들 수

있고, 이 때 b^*_{ij}와 y^*_{ij}는 (TELP)의 최적해이다.

<증명> 먼저 $\sum_{i\in R}\sum_{j\in C} y^*_{ij}=N$인 경우를 살펴보자. [Lemma 1]에 의해 π^* 하에서 b^*_{ij}와 y^*_{ij}는 (RTELP)의 최적해이므로, $L(\pi)=\sum_{i\in R}\sum_{j\in C} w_{ij}E[L_{ij}|y^*_{ij},b^*_{ij}]+\pi^*(\sum_{i\in R}\sum_{j\in C} y^*_{ij}-N)=\sum_{i\in R}\sum_{j\in C} w_{ij}E[L_{ij}|y^*_{ij},b^*_{ij}]$는 (TELP)의 하한이다. 또한, b^*_{ij}는 (L^b_i), $\forall i$의 최적해이므로 제약식 (3)을 만족하고 $\sum_{i\in R}\sum_{j\in C} y^*_{ij}=N$이므로 b^*_{ij}와 y^*_{ij}는 (TELP)의 실행가능해이다. 그리고 b^*_{ij}와 y^*_{ij}하에서의 (TELP)의 목적식 값이 (TELP)의 하한과 동일하므로 b^*_{ij}와 y^*_{ij}는 (TELP)의 최적해이다.

다음으로 $\sum_{i\in R}\sum_{j\in C} y^*_{ij}<N$인 경우를 살펴보자. $\sum_{i\in R}\sum_{j\in C} y^*_{ij}<N$ 일 때 $w_{ij}(E[L_{ij}|y^*_{ij},b^*_{ij}]-E[L_{ij}|y^*_{ij}+1,b^*_{ij}])=\pi^*$인 (i,j)가 $N-\sum_{i\in R}\sum_{j\in C} y^*_{ij}$개보다 작다면, $\sum_{i\in R}\sum_{j\in C} y^*_{ij}\le N$을 만족하면서 π^* 값을 줄일 수 있다. 그런데, $\sum_{i\in R}\sum_{j\in C} y^*_{ij}$ 값이 최대화되는(단, $\sum_{i\in R}\sum_{j\in C} y^*_{ij}\le N$) 가장 작은 π 값을 π^*라 했으므로, 모순이다. 따라서 $\sum_{i\in R}\sum_{j\in C} y^*_{ij}<N$이면, $w_{ij}(E[L_{ij}|y^*_{ij},b^*_{ij}]-E[L_{ij}|y^*_{ij}+1,b^*_{ij}])=\pi^*$인 (i,j)가 $N-\sum_{i\in R}\sum_{j\in C} y^*_{ij}$개 이상 존재하고, $w_{ij}(E[L_{ij}|y^*_{ij},b^*_{ij}]-E[L_{ij}|y^*_{ij}+1,b^*_{ij}])=\pi^*$인 (i,j)를 $N-\sum_{i\in R}\sum_{j\in C} y^*_{ij}$개 선택하여 y^*_{ij} 값을 1씩 증가시켜 $\sum_{i\in R}\sum_{j\in C} y^*_{ij}=N$이 되도록 만들 수 있다. 이 때 (L^y_i)의 목적식 값에는 변화가 없으므로, 새로 구한 y^*_{ij}도 (L^y_i)의 최적해이다. 이제 앞의 $\sum_{i\in R}\sum_{j\in C} y^*_{ij}=N$인 경우와 마찬가지 논리로 b^*_{ij}와 y^*_{ij}는 (TELP)의 최적해이다. ■

한편, (L^b_i), $\forall i$의 최적해 b^*_{ij} 하에서 (L^y_i), $\forall i$를 풀 때, $\sum_{i\in R}\sum_{j\in C} y^*_{ij}$ 값이 최대화되도록 하는(단, $\sum_{i\in R}\sum_{j\in C} y^*_{ij}\le N$) 가장 작은 π 값, π^*는 아래의 프로시저 **(Find_π)**에 의해 쉽게 구할 수 있다.

Procedure Find_π

Step1
$FOR(\forall i\in R, j\in C)\, y_{ij}=0$
Step 2
$FOR(1\le k\le N+1)\{$
$\quad (i^*,j^*)=\arg\max_{i\in R, j\in C} w_{ij}(E[L_{ij}|y_{ij},b^*_{ij}]-E[L_{ij}|y_{ij}+1,b^*_{ij}])$
$\quad \pi^*=w_{i^*j^*}(E[L_{i^*j^*}|y_{i^*j^*},b^*_{i^*j^*}]-E[L_{i^*j^*}|y_{i^*j^*}+1,b^*_{i^*j^*}])$
$\quad y_{i^*j^*}=y_{i^*j^*}+1$
$\}$

아래의 [Lemma 3]에서는 $E[L_{ij}|y_{ij},b_{ij}]$가 비증가 함수(nonincreasing function)임을 보이고 있고, [Lemma 4]에서는 $f(x^1_{ij})$과 $f(x^2_{ij})$가 이산일양분포(discrete uniform distribution)를 따를 경우 $E[L_{ij}|y_{ij},b_{ij}]$가 이산볼록함수(discretely convex function)임을 보이고 있다.

[Lemma 3] $E[L_{ij}|y_{ij},b_{ij}]$는 비증가 함수이다.

<증명> $E[L_{ij}|y_{ij},b_{ij}]$는 모든 i, j에 대해서 동일한 형태이므로, $E[L|y,b]$가 비증가 함수임을 보이면 된다. 그런데 패킷 손실량 L은

$$L=\begin{cases}\max\{X^2-y-b,0\}, & \text{if } q^0+X^1-y^0\le 0\\ \max\{X^1+X^2-y-b-b^0,0\}, & \text{if } 0<q^0+X^1-y^0\le b^0\\ \max\{X^2-y-b+b^0,0\}, & otherwise\end{cases}$$

으로 정의되므로, $E[L|y,b]$는 비증가 함수이다. ■

[Lemma 4] $f(x^1_{ij})$과 $f(x^2_{ij})$가 이산일양분포를 따르면, $E[L_{ij}|y_{ij},b_{ij}]$는 이산볼록함수이다.

<증명> 부록 참조. ■

4. 실험 결과

여기에서는 3장에서 제시한 최적 버퍼 및 타임슬롯 할당 체계의 성능을 실험을 통해 분석한다. 실험에서 단말의 집합 $R=1,2,\cdots,10$, 데이터 클래스의 집합 $C=1,2$, 이용 가능한 총 타임슬롯의 수 $N=200$,

버퍼 사이즈 $B_i = 30, \forall i$, $b^0_{ij} = 15, \forall i,j$로 가정하였다. $f(x^1_{ij})$과 $f(x^2_{ij})$는 최소값이 0이고 최대값이 $\overline{X_{ij}}$인 이산일양분포를 따른다고 가정하였다. 즉,

$$f(x^1_{ij}) = f(x^2_{ij}) = \frac{1}{\overline{X_{ij}}+1}, x^1_{ij}, x^2_{ij} = 1, 2, \cdots, \overline{X_{ij}}.$$

이다. 단, 여기서 $\overline{X_{ij}} = B_i - j*2$로 가정하였다. 마지막으로 y^0_{ij}와 q^0_{ij}는 다음의 다섯 가지로 가정하였다.

Case 1 : $y^0_{ij} = q^0_{ij} = 10, \forall i,j$

Case 2 : $y^0_{ij} = 10, \forall i,j$

$$[q^0_{ij}] = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{bmatrix}^T$$

Case 3 : $y^0_{ij} = 10, \forall i,j$

$$[q^0_{ij}] = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 15 & 14 & 13 & 12 & 11 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}^T$$

Case 4 : $q^0_{ij} = 10, \forall i,j$

$$[y^0_{ij}] = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{bmatrix}^T$$

Case 5 : $q^0_{ij} = 10, \forall i,j$

$$[y^0_{ij}] = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 15 & 14 & 13 & 12 & 11 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}^T$$

실험 결과가 <표 1>과 <표 2>에 정리되어 있다. 표에서 OBTA(Optimal Buffer and Timeslot Allocation scheme)는 본 논문에서 제시한 최적 버퍼 및 타임슬롯 할당 체계를 나타낸다. $CFDAMA_p$의 경우, 타임슬롯은 요청한 수요에 비례하여 타임슬롯을 할당하는 CFDAMA 방식에 의해 할당하고, 각 단말의 버퍼는 데이터 클래스별로 동일하게 할당한다(즉, $b^*_{ij} = 15, \forall i,j$). $CFDAMA_o$의 경우, 타임슬롯은 CFDAMA 방식에 의해 할당하고, 버퍼는 할당된 타임슬롯 수 하에서 패킷 손실량 기대값의 가중합을 최소화하도록 결정한다. Pentium PC(3.2 GHz)에서 10,000개의 문제를 풀어본 결과 OBTA는 한 문제당 약 5.6ms가 소요되었고, $CFDAMA_o$는 한 문제당 약 2.1ms가 소요되었고, $CFDAMA_p$는 한 문제당 약 1ms가 소요되었다. $CFDAMA_p$와 $CFDAMA_o$에 비해 OBTA가 다소 시간이 많이 걸리지만, 단말과 허브간 전파지연시간(propagation delay)이 약 250ms에 이른다는 점과 더 좋은 성능의 컴퓨터를 이용할 수 있다는 점을 감안하면 구현에 있어 큰 차이는 없다고 할 수 있다.

<표 1>에는 OBTA를 이용하여 Case 1~Case 5에 대해 구한 패킷 손실량 기대값의 가중합, 각 단말별 데이터 클래스별 타임슬롯 할당 수 $[y^*_{ij}]$, 각 단말별 데이터 클래스별 버퍼 할당 크기 $[b^*_{ij}]$ 등이 정리되어 있다. 여기서 패킷 손실량 기대값의 가중합은 (TELP)의 목적식 값으로, 각 단말별로 클래스별 패킷 손실량 기대값(단위 : 패킷)에 클래스별 가중치를 곱하여 구해진다. 실험에서 가중치는 $w_{i1} = 2$, $w_{i2} = 1$로 가정하였다. Case 2의 경우 단말 1(데이터 클래스 1, 2)에서 단말 10에 각각 (12, 20), (10, 19), (10, 17), (9, 14), (8, 13), (8, 12), (6, 10), (5, 8), (4, 7), (3, 5)개의 타임슬롯을 할당하고, 각각 (22,8), (22, 8), (21, 9), (20, 10), (20, 10), (19, 11), (19, 11), (18, 12), (18, 12), (17, 13) 개의 버퍼를 할당하고, 이 때 패킷 손실량 기대값의 가중합은 23.19이다.

〈표 1〉 OBTA 실험 결과

구분	패킷 손실량 기대값의 가중합	각 단말별 데이터 클래스별 타임슬롯 할당 수 $[y^*_{ij}]$, 각 단말별 데이터 클래스별 버퍼 할당 크기 $[b^*_{ij}]$
Case 1	18.97	$\begin{bmatrix} 14 & 13 & 11 & 10 & 9 & 7 & 6 & 4 & 1 & 0 \\ 25 & 22 & 20 & 17 & 15 & 11 & 8 & 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$ $\begin{bmatrix} 23 & 22 & 22 & 21 & 20 & 19 & 18 & 17 & 17 & 16 \\ 7 & 8 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 13 & 14 \end{bmatrix}^T$
Case 2	23.19	$\begin{bmatrix} 12 & 10 & 10 & 9 & 8 & 8 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 20 & 19 & 17 & 14 & 13 & 12 & 10 & 8 & 7 & 5 \end{bmatrix}^T$ $\begin{bmatrix} 22 & 22 & 21 & 20 & 20 & 19 & 19 & 18 & 18 & 17 \\ 8 & 8 & 9 & 10 & 10 & 11 & 11 & 12 & 12 & 13 \end{bmatrix}^T$
Case 3	18.55	$\begin{bmatrix} 14 & 13 & 11 & 11 & 9 & 7 & 5 & 4 & 2 & 0 \\ 25 & 22 & 20 & 16 & 14 & 12 & 8 & 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$ $\begin{bmatrix} 21 & 20 & 20 & 19 & 19 & 20 & 20 & 20 & 20 & 21 \\ 9 & 10 & 10 & 11 & 11 & 10 & 10 & 10 & 10 & 9 \end{bmatrix}^T$
Case 4	15.41	$\begin{bmatrix} 14 & 13 & 12 & 11 & 9 & 7 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 28 & 25 & 22 & 19 & 15 & 11 & 7 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ $\begin{bmatrix} 24 & 23 & 22 & 21 & 20 & 19 & 18 & 17 & 16 & 15 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{bmatrix}^T$
Case 5	17.82	$\begin{bmatrix} 13 & 12 & 11 & 10 & 8 & 8 & 6 & 4 & 1 & 0 \\ 24 & 22 & 20 & 18 & 15 & 12 & 8 & 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}^T$ $\begin{bmatrix} 25 & 24 & 23 & 22 & 21 & 18 & 16 & 14 & 13 & 11 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 12 & 14 & 16 & 17 & 19 \end{bmatrix}^T$

<표 2>에는 OBTA, $CFDAMA_p$, $CFDAMA_o$의 성능이 비교되어 있다. Case 1~Case 5에 대해 모두 OBTA의 성능이 $CFDAMA_p$와 $CFDAMA_o$에 비해 더 좋은 것으로 나타났다. OBTA는 패킷 손실량 기대값의 가중합을 최소화하는 버퍼 및 타임슬롯 할당 방법이므로, 일반적인 타임슬롯 할당 방법인 $CFDAMA_p$와 $CFDAMA_o$에 비해 패킷 손실량 기대값의 가중합이 작은 것은 당연하다고 할 수 있다. 다만 표에서 보듯이 그 차이가 매우 크고 패킷 손실량을 줄이는 것이 시스템 차원에서 중요하므로, 패킷 손실량 기대값의 가중합을 최소화하는 OBTA가 버퍼 및 타임슬롯을 할당하는데 있어 상당한 의미를 가진다고 할 수 있다.

〈표 2〉 OBTA, $CFDAMA_p$, $CFDAMA_o$의 성능 비교

구분	가중치		패킷 손실량 기대값의 가중합		
	w_{i1}	w_{i2}	OBTA	$CFDAMA_p$	$CFDAMA_o$
Case 1	1	1	13.94	26.72	26.72
	2	1	18.97	40.08	36.31
	3	1	21.97	53.43	41.88
Case 2	1	1	16.70	33.43	33.43
	2	1	23.19	50.15	45.52
	3	1	26.94	66.87	52.68
Case 3	1	1	13.32	26.42	25.97
	2	1	18.55	43.14	35.96
	3	1	21.77	59.85	42.00
Case 4	1	1	11.34	31.26	31.26
	2	1	15.41	46.89	42.18
	3	1	17.82	62.53	48.18
Case 5	1	1	13.32	26.76	25.97
	2	1	17.82	42.40	34.57
	3	1	20.43	58.03	39.43

5. 결 론

본 논문에서는 대화형 GEO 위성 네트워크를 대상으로 빠른 시간 내에 패킷 손실량 기대값의 가중합을 최소화하는 최적 버퍼 및 타임슬롯 할당 체계를 제시하였다. 실험을 통해 제시한 방법이 기존 방법에 비해 패킷 손실량 기대값의 가중합을 상당히 감소시킴을 보였다.

본 논문에서는 일정 시점에서 성능을 분석하였지만, 보다 실제적인 분석을 위해서는 연속선상에서의 실험이 필요하다. 또한, 패킷 손실량 기대값이 이산볼록함수 형태가 되지 않는 보다 다양한 형태의 트래픽에 대한 연구가 필요하다. 패킷 손실량 기대값이 이산볼록함수 형태가 되지 않는 경우에는 최적해에 근접한 해를 제공하는 휴리스틱 알고리즘의 개발이 필요할 것으로 보이고, 본 논문에서 활용한 라그랑지안 이완기법 등을 이용하여 효과적인 휴리스틱 알고리즘을 개발할 수 있을 것으로 보인다.

참 고 문 헌

[1] Demyanov, V.F. and L.V. Vasilev, *Nondifferentiable Optimization*, Optimization Software Inc., 1985.

[2] ETSI, Digital video broadcasting (DVB) : Interaction Channel for Satellite Distribution Systems, ETSI EN 301 790 (v.1.2.2), 2000.

[3] Farserotu, J. and R.A. Prasad, "A Survey of Future Broadband Multimedia Satellite Systems, Issues and Trends," *IEEE Commun. Mag.*, (2000), pp.128-133.

[4] Geoffrion, A.M., "Lagrangean Relaxation and its Usage in Integer Programming," *Mathematical Programming Study*, Vol.2 (1974), pp.82-114.

[5] Lee, K.-D. and K.-N. Chang, "A real-time Algorithm for Timeslot Assignment in Multirate Return Channels of Interactive Satellite Multimedia," *IEEE J. Select. Areas Commun.*, Vol.22, No.3(2004), pp.518-528.

[6] Le-Ngoc, T. and S.V. Krishnamurthy, "Performance of Combined Free/Demand Assignment Multiple Access Scheme in Satel-

lite Communications," *International J. Satellite Commun.*, Vol.14(1996), pp.11-21.

[7] Le-Ngoc, T., V. Leung, P. Takats, and P. Garland, "Interactive Multimedia Satellite Access Communications," *IEEE Cmmun. Mag.*, Vol.41, No.7(2003), pp.78-85.

[8] Mobasseri, M. and V.C.M. Leung, "A new Buffer Management Scheme for Multimedia Terminals in Broadband Satellite Networks," Proc. Hawaii International Conference on System Sciences, 2002.

[9] Miller, B.L., "On Minimizing Nonseparable Functions Defined on the Integers with an Inventory Application," *SIAM J. Appl. Math.*, Vol.21, No.1(1971), pp.166-185.

[10] Neale, J., R. Green, and A. Landovskis, "Interactive Channel for Multimedia Satellite Networks," *IEEE Commun. Mag.*, (2001), pp.192-198.

[11] Jiang, Z. and V.C.M. Leung, "A Predictive Demand Assignment Multiple Access Protocol for Internet Access over Broadband Satellite Networks," *Int. J. Satell. Commun. Network*, Vol.21(2003), pp.451-467.

〈부 록〉

[Lemma 1 증명] $E[L_{ij}|y_{ij},b_{ij}]$는 $y_{ij}+b_{ij}$의 함수이므로 $E[L_{ij}|y_{ij},b_{ij}]$를 $E[L_{ij}|y_{ij}+b_{ij}]$로 나타내기로 한다. 이제 $s_{ij}=y_{ij}+b_{ij}$, $\Delta E[L_{ij}|s_{ij}]=E[L_{ij}|s_{ij}]-E[L_{ij}|s_{ij}+1]$라 하고, $w_{ij}\Delta E[L_{ij}|s_{ij}]\le\pi$를 만족하는 가장 작은 s_{ij}를 $\widehat{s_{ij}}$라 하자. $E[L_{ij}|y_{ij},b_{ij}]$가 비증가 이산볼록함수이므로, $s_{ij}<\widehat{s_{ij}}$이면 $w_{ij}\Delta E[L_{ij}|s_{ij}]>\pi$이고, $s_{ij}\ge\widehat{s_{ij}}$이면 $w_{ij}\Delta E[L_{ij}|s_{ij}]\le\pi$이다. 또한, $w_{ij}\Delta E[L_{ij}|s_{ij}]\le\pi$이면 $s_{ij}\ge\widehat{s_{ij}}$이고, $w_{ij}\Delta E[L_{ij}|s_{ij}]>\pi$이면 $s_{ij}<\widehat{s_{ij}}$이다. 따라서 $w_{ij}\Delta E[L_{ij}|b^*_{ij}]>\pi$이면 $b^*_{ij}<\widehat{s_{ij}}$이고 $y^*_{ij}=\widehat{s_{ij}}-b^*_{ij}$이 된다. 또한, $w_{ij}\Delta E[L_{ij}|b^*_{ij}]\le\pi$이면 $b^*_{ij}\ge\widehat{s_{ij}}$이고 $y^*_{ij}=0$이 된다. 결국 $y^*_{ij}=\max\{\widehat{s_{ij}}-b^*_{ij},0\}$이다.

한편, $\overline{y_{ij}},\overline{b_{ij}}$가 $\overline{y_{ij}}=\max\{\widehat{s_{ij}}-\overline{b_{ij}},0\}$를 만족하는 (RTELP)의 최적해라 하자. [Lemma A1]에 의해 이러한 최적해가 존재한다.

이제, $i=1$인 경우에 대해서 살펴보자. 다음의 식이 성립한다.

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\in C}w_{1j}E[L_{1j}|y^*_{1j}+b^*_{1j}]+\pi\sum_{j\in C}y^*_{1j}\\
&=\sum_{j\in C}w_{1j}E[L_{1j}|\max\{\widehat{s_{1j}}-b^*_{1j},0\}+b^*_{1j}]+\pi\sum_{j\in C}(\max\{\widehat{s_{1j}}-b^*_{1j},0\})\\
&=\sum_{j\in C}w_{1j}E[L_{1j}|\max\{\widehat{s_{1j}},b^*_{1j}\}]+\pi\sum_{j\in C}(\max\{\widehat{s_{1j}}-b^*_{1j},0\})
\end{aligned}\tag{A1}$$

또한 $\overline{b_{1j}}=b^*_{1j}+\alpha_{1j}$ (단, $\sum_{j\in C}\overline{b_{1j}}=\sum_{j\in C}b^*_{1j}=B_1$ 이므로 $\sum_{j\in C}\alpha_{1j}=0$임)라 두면 다음의 식이 성립한다.

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\in C}w_{1j}E[L_{1j}|\overline{y_{1j}}+\overline{b_{1j}}]+\pi\sum_{j\in C}\overline{y_{1j}}\\
&=\sum_{j\in C}w_{1j}E[L_{1j}|\max\{\widehat{s_{1j}},\overline{b_{1j}}\}]+\pi\sum_{j\in C}(\max\{\widehat{s_{1j}}-\overline{b_{1j}},0\})\\
&=\sum_{j\in C}w_{1j}E[L_{1j}|\max\{\widehat{s_{1j}},b^*_{1j}+\alpha_{1j}\}]+\pi\sum_{j\in C}(\max\{\widehat{s_{1j}}-b^*_{1j}-\alpha_{1j},0\})
\end{aligned}\tag{A2}$$

[Lemma A2]에 의해 $\widehat{s_{1j}}\ge b^*_{1j},\forall j\in C$이거나, 어떤 j에 대해서 $\widehat{s_{1j}}<b^*_{1j}$이고 $\widehat{s_{1k}}\le b^*_{1k},k(\ne j)\in C$이다. 먼저 $\widehat{s_{1j}}\ge b^*_{1j},\forall j\in C$이면, 다음의 식이 성립한다.

$$\begin{aligned}
&(A1)-(A2)\\
&=\sum_{j\in C}w_{1j}E[L_{1j}|\widehat{s_{1j}}]+\pi\sum_{j\in C}(\widehat{s_{1j}}-b^*_{1j})-\sum_{j\in C_1}w_{1j}E[L_{1j}|\widehat{s_{1j}}]-\pi\sum_{j\in C_1}(\widehat{s_{1j}}-b^*_{1j}-\alpha_{1j})-\sum_{j\in C_2}w_{1j}E[L_{1j}|b^*_{1j}+\alpha_{1j}]\\
&=\sum_{j\in C_2}w_{1j}(E[L_{1j}|\widehat{s_{1j}}]-E[L_{1j}|b^*_{1j}+\alpha_{1j}])+\pi\sum_{j\in C_1}\alpha_{1j}\ +\pi\sum_{j\in C_2}(\widehat{s_{1j}}-b^*_{1j})\\
&=\sum_{j\in C_2}w_{1j}(E[L_{1j}|\widehat{s_{1j}}]-E[L_{1j}|b^*_{1j}+\alpha_{1j}])+\pi\sum_{j\in C_2}(\widehat{s_{1j}}-b^*_{1j}-\alpha_{1j})\ \ (\textstyle\sum_{j\in C_1}\alpha_{1j}+\sum_{j\in C_2}\alpha_{2j}=0\text{이므로})\\
&=\sum_{j\in C_2}w_{1j}(E[L_{1j}|\widehat{s_{1j}}]-E[L_{1j}|\widehat{s_{1j}}+\gamma_{1j}])+\pi\sum_{j\in C_2}(-\gamma_{1j})\ \ (\text{단, }\gamma_{1j}=b^*_{1j}+\alpha_{1j}-\widehat{s_{1j}},j\in C_2)
\end{aligned}$$

여기서 $C_1=\{j|\widehat{s_{1j}}\ge b^*_{1j}+\alpha_{1j},\forall j\in C\}$, $C_2=\{j|\widehat{s_{1j}}<b^*_{1j}+\alpha_{1j},\forall j\in C\}$이다. 그런데, $\gamma_{1j}>0$, $w_{1j}\Delta E[L_{1j}|\widehat{s_{1j}}]\le\pi$, $w_{1j}\Delta E[L_{1j}|\widehat{s_{1j}}]\ge w_{1j}\Delta E[L_{1j}|\widehat{s_{1j}}+\gamma_{1j}]$이므로 (A1) - (A2)$\le 0$이다.

다음으로 어떤 j에 대해서 $\widehat{s_{1j}}<b^*_{1j}$이고 $\widehat{s_{1k}}\le b^*_{1k},k(\ne j)\in C$인 경우를 살펴보자. $\widehat{s_{1j}}<b^*_{1j}$이고 $\widehat{s_{1k}}\le b^*_{1k}$,

$k(\neq j)\in C$ 이므로 $y^*_{1j}=0$이고, 따라서 $\sum_{j\in C}w_{1j}E[L_{1j}|y^*_{1j}+b^*_{1j}]+\pi\sum_{j\in C}y^*_{1j}=\sum_{j\in C}w_{1j}E[L_{1j}|b^*_{1j}]$이다. [Lemma A3]에 의해 모든 j에 대해서 $\overline{y_{1j}}=0$인 최적해가 존재하고, 모든 j 에 대해서 $\overline{y_{1j}}=0$ 일 때 b^*_{1j} 가 (L^b_1)의 최적해이므로, $\sum_{j\in C}w_{1j}E[L_{1j}|b^*_{1j}]\leq\sum_{j\in C}w_{1j}E[L_{1j}|\overline{b_{1j}}]=\sum_{j\in C}w_{1j}E[L_{1j}|\overline{y_{1j}}+\overline{b_{1j}}]+\pi\sum_{j\in C}\overline{y_{1j}}$이다.

동일한 방법으로 모든 i에 대해서 $\sum_{j\in C}w_{ij}E[L_{ij}|y^*_{ij}+b^*_{ij}]+\pi\sum_{j\in C}y^*_{ij}\leq\sum_{j\in C}w_{ij}E[L_{ij}|\overline{y_{ij}}+\overline{b_{ij}}]+\pi\sum_{j\in C}\overline{y_{ij}}$임을 보일 수 있으므로 $\sum_{i\in R}\sum_{j\in C}w_{ij}E[L_{ij}|y^*_{ij}+b^*_{ij}]+\pi\sum_{i\in R}\sum_{j\in C}y^*_{ij}\leq\sum_{i\in R}\sum_{j\in C}w_{ij}E[L_{ij}|\overline{y_{ij}}+\overline{b_{ij}}]+\pi\sum_{i\in R}\sum_{j\in C}\overline{y_{ij}}$이다. 따라서 (L^b_i), $\forall i$의 최적해 b^*_{ij}와 (L^y_i), $\forall i$의 최적해 y^*_{ij}가 (RTELP)의 최적해가 된다. ■

[Lemma A1] $\overline{y_{ij}}=\max\{\widehat{s_{ij}}-\overline{b_{ij}},0\},\forall i,j$를 만족하는 (RTELP)의 최적해 $\overline{y_{ij}},\overline{b_{ij}},\forall i,j$가 존재한다.

<증명> $\overline{y_{ij}}>0$인 $\overline{y_{ij}}$를 1단위 감소시켜도 목적식 값에 변화가 없다면, $\overline{y_{ij}}$를 1단위 감소시킨 것도 최적해이므로 $\overline{y_{ij}}$를 1단위 감소시켜 새로운 최적해를 구한다. $\overline{y_{ij}}$를 1단위 감소시키더라도 목적식 값이 동일한 경우가 없을 때까지 이 과정을 계속 반복하여 새로운 최적해를 구한다.

이제 만약 $\overline{y_{ij}}>\max\{\widehat{s_{ij}}-\overline{b_{ij}},0\}$이면, $\overline{y_{ij}}>\widehat{s_{ij}}-\overline{b_{ij}}$이고 $\overline{y_{ij}}>0$이다. 따라서 $\overline{y_{ij}}-1+\overline{b_{ij}}\geq\widehat{s_{ij}}$이고, $w_{ij}\Delta E[L_{ij}|\overline{y_{ij}}-1+\overline{b_{ij}}]\leq\pi$이다. 우선 $\overline{y_{ij}}=0$이면 $\overline{y_{ij}}>0$라는 것과 모순이다. 또한 $\overline{y_{ij}}>0$일 경우 $\overline{y_{ij}}$를 1 단위 감소시키면 목적식 값이 감소하므로 $\overline{y_{ij}}$가 최적해라는 것과 모순이다. ($w_{ij}\Delta E[L_{ij}|\overline{y_{ij}}-1+\overline{b_{ij}}]\leq\pi$이므로 $\overline{y_{ij}}$를 1 단위 감소시키면 목적식 값이 감소하거나 동일하지만, 앞에서 $\overline{y_{ij}}$를 1단위 감소시키더라도 목적식 값이 동일한 경우가 없을 때까지 $\overline{y_{ij}}$를 계속 감소시켰기 때문에, $\overline{y_{ij}}$를 1 단위 감소시키면 목적식 값이 감소한다.)

만약 $\overline{y_{ij}}<\max\{\widehat{s_{ij}}-\overline{b_{ij}},0\}$이면, $\overline{y_{ij}}\geq 0$이므로 $\max\{\widehat{s_{ij}}-\overline{b_{ij}},0\}=\widehat{s_{ij}}-\overline{b_{ij}}$이어야 하고, $\overline{y_{ij}}<\widehat{s_{ij}}-\overline{b_{ij}}$이다. 따라서 $w_{ij}\Delta E[L_{ij}|\overline{y_{ij}}+\overline{b_{ij}}]>\pi$이고, $\overline{y_{ij}}$를 1 단위 증가시키면 목적식 값이 감소한다. 이는 $\overline{y_{ij}}$ 가 최적해라는 것과 모순이다.

결국 $\overline{y_{ij}}=\max\{\widehat{s_{ij}}-\overline{b_{ij}},0\}$를 만족하는 (RTELP)의 최적해 $\overline{y_{ij}},\overline{b_{ij}}$가 존재한다. ■

[Lemma A2] 어떤 j에 대해서 $\widehat{s_{1j}}<b^*_{1j}$이면, $\widehat{s_{1k}}\leq b^*_{1k},k(\neq j)\in C$이다.

<증명> $\widehat{s_{1k}}=0$이면, $b^*_{1k}\geq 0$이므로 성립한다. 이제 $\widehat{s_{1k}}>0$인 경우를 살펴보자. $\widehat{s_{1j}}<b^*_{1j}$이면 $\widehat{s_{1j}}\leq b^*_{1j}-1$이고, $E[L_{1j}|s_{1j}]$가 비증가 이산볼록함수이므로 $w_{1j}\Delta E[L_{1j}|b^*_{1j}-1]\leq w_{1j}\Delta E[L_{1j}|\widehat{s_{1j}}]\leq\pi$이다.

또한, $w_{1k}\Delta E[L_{1k}|b^*_{1k}]>w_{1j}\Delta E[L_{1j}|b^*_{1j}-1]$이면, b^*_{1k} 1단위 증가와 b^*_{1j} 1단위 감소를 통해 목적식 값을 감소시킬 수 있으므로 b^*_{1k},b^*_{1j}가 (L^b_1)의 최적해라는 것과 모순이고, 따라서 $w_{1k}\Delta E[L_{1k}|b^*_{1k}]\leq w_{1j}\Delta E[L_{1j}|b^*_{1j}-1]\leq\pi$이다. $w_{1k}\Delta E[L_{1k}|\widehat{s_{1k}}-1]>\pi$이므로 $w_{1k}\Delta E[L_{1k}\,\widehat{s_{1k}}-1]>w_{1k}\Delta E[L_{1k}|b^*_{1k}]$이고, $\widehat{s_{1k}}-1<b^*_{1k}$이다. 따라서 $\widehat{s_{1k}}\leq b^*_{1k},k(\neq j)\in C$이다. ■

[Lemma A3] 어떤 j에 대해서 $\widehat{s_{1j}}<b^*_{1j}$이고 $\widehat{s_{1k}}\leq b^*_{1k},k(\neq j)\in C$이면, $\overline{y_{1k}}=0,\forall k\in C$ 인 (RTELP)의 최적해가 존재한다.

<증명> 어떤 k에 대해서 $\overline{y_{1k}}>0$라 하자. $\overline{y_{1k}},\overline{b_{1k}},\forall k\in C$ 는 $\overline{y_{1k}}=\max\{\widehat{s_{1k}}-\overline{b_{1k}},0\}$를 만족하는 (RTELP)의 최적해이고 $\overline{y_{1k}}>0$이므로 $\overline{y_{1k}}+\overline{b_{1k}}=\widehat{s_{1k}}$이다. 또한 $\overline{y_{1k}}>0$이면 $\overline{b_{1k}}<b^*_{1k}$이다($\overline{y_{1k}}>0$일 때 $\overline{b_{1k}}\geq b^*_{1k}$라 하면, $\overline{b_{1k}}\geq b^*_{1k}\geq\widehat{s_{1k}}$

이고 $\overline{y_{1k}}+\overline{b_{1k}}>\widehat{s_{1k}}$이다. $\overline{y_{1k}}+\overline{b_{1k}}=\widehat{s_{1k}}$와 모순이다. 따라서 $\overline{y_{1k}}>0$이면 $\overline{b_{1k}}<b^*_{1k}$이다.).

$\overline{b_{1k}}<b^*_{1k}$이면 $\sum_{j\in C}\overline{b_{1j}}=\sum_{j\in C}b^*_{1j}$이므로 어떤 l에 대해서 $\overline{b_{1l}}>b^*_{1l}$이다. $\widehat{s_{1l}}\le b^*_{1l}$ (또는 $\widehat{s_{1l}}<b^*_{1l}$)이므로 $\widehat{s_{1l}}<\overline{b_{1l}}$이고, 따라서 $\overline{y_{1l}}=\max\{\widehat{s_{1l}}-\overline{b_{1l}},0\}$이므로 $\overline{y_{1l}}=0$이어야 하고 $\overline{b_{1l}}$를 1단위 감소시킬 때의 목적식 증가량은 $w_{1l}\Delta E[L_{1l}|\overline{b_{1l}}-1]$이다. $\overline{b_{1k}}$를 1단위 증가시키고 $\overline{y_{1k}}$를 1단위 감소시킬 때의 목적식 감소량은 π이다. $\widehat{s_{1l}}<\overline{b_{1l}}$이므로 $\widehat{s_{1l}}\le\overline{b_{1l}}-1$이고, 따라서 $w_{1l}\Delta E[L_{1l}|\overline{b_{1l}}-1]\le\pi$이다. 따라서 $\overline{b_{1l}}$ 1단위 감소, $\overline{b_{1k}}$ 1단위 증가, $\overline{y_{1k}}$ 1단위 감소를 통해 목적식 값이 최소한 동일한 해를 구할 수 있고, 이 과정을 반복하면 $\overline{y_{1k}}=0$이면서 목적식 값이 최소한 동일한 해를 구할 수 있다. 결국 $\overline{y_{1k}}=0,\forall k\in C$ 인 최적해가 존재한다. ■

[Lemma 4 증명] $E[L|y,b]$가 이산볼록함수임을 증명하면 된다. 이산일양분포 $f(x^1),f(x^2)$를

$$f(x^1)=\begin{cases}\dfrac{1}{\overline{X^1}}, & X^1_L\le x^1\le X^1_U\\ 0, & otherwise\end{cases},\quad f(x^2)=\begin{cases}\dfrac{1}{\overline{X^2}}, & X^2_L\le x^2\le X^2_U\\ 0, & otherwise\end{cases}$$ 라 하자.

여기서 $\overline{X^1}=X^1_U-X^1_L+1$, $\overline{X^2}=X^2_U-X^2_L+1$이고, $X^1_L,X^2_L\ge 0$이다.

(i) $X^1_L\le y^0-q^0\le X^1_U$인 경우 :

$$\begin{aligned}&\sum_{x^1=-\infty}^{y^0-q^0}f(x^1)\times\sum_{x^2=y+b}^{\infty}(x^2-y-b)f(x^2)\\
&=\sum_{x^1=X^1_L}^{y^0-q^0}f(x^1)\times\sum_{x^2=\max\{y+b,X^2_L\}}^{X^2_U}(x^2-y-b)f(x^2)\\
&=\frac{1}{2\overline{X^1}\,\overline{X^2}}(y^0-q^0-X^1_L+1)\cdot(X^2_U+\max\{y+b,X^2_L\}-2(y+b))\cdot\max\{X^2_U-\max\{y+b,X^2_L\}+1,0\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{x^2=y+b+(y^0-q^0)-x^1}^{\infty}\sum_{x^1=y^0-q^0+1}^{b^0+y^0-q^0}(x^1+x^2-y-b-(y^0-q^0))f(x^1)f(x^2)\\
&=\sum_{x^2=\max\{y+b+(y^0-q^0)-x^1,X^2_L\}}^{X^2_U}\ \sum_{x^1=y^0-q^0+1}^{\max\{b^0+y^0-q^0,X^1_U\}}(x^1+x^2-y-b-(y^0-q^0))f(x^1)f(x^2)\\
&=\sum_{k=y^0-q^0+1}^{\min\{b^0+(y^0-q^0),X^1_U\}}\frac{1}{2\overline{X_1}\,\overline{X_2}}\left(X^2_U+\max\{y+b+(y^0-q^0)-k,X^2_L\}-2(y+b+(y^0-q^0)-k)\right)\\
&\qquad\cdot\max\{X^2_U-\max\{y+b+(y^0-q^0)-k,X^2_L\}+1,0\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{x^1=b^0+y^0-q^0+1}^{\infty}f(x^1)\times\sum_{x^2=-b^0+y+b}^{\infty}(x^2+b^0-y-b)f(x^2)\\
&=\sum_{x^1=b^0+y^0-q^0+1}^{X^1_U}f(x^1)\times\sum_{x^2=\max\{y-b^0+b,X^2_L\}}^{X^2_U}(x^2+b^0-y-b)f(x^2)\\
&=\frac{1}{2\overline{X^1}\,\overline{X^2}}\max\{X^1_U-b^0-y^0+q^0\cdot 0\}\cdot(X^2_U+\max\{y-b^0+b,X^{2L}_L\}-2(y-b^0+b))\\
&\qquad\cdot\max\{X^2_U-\max\{y-b^0+b,X^2_L\}+1,0\}.\end{aligned}$$

(ii) $y^0 - q^0 < X_L^1$ 인 경우 :

$$\sum_{x^1=-\infty}^{y^0-q^0} f(x^1) \times \sum_{x^2=y+b}^{\infty} (x^2-y-b)f(x^2) = 0.$$

$$\sum_{x^2=y+b+(y^0-q^0)-x^1}^{\infty} \sum_{x^1=y^0-q^0+1}^{b^0+y^0-q^0} (x^1+x^2-y-b-(y^0-q^0))f(x^1)f(x^2)$$

$$= \sum_{x^2=\max\{y+b+(y^0-q^0)-x^1, X_L^2\}}^{X_U^2} \sum_{x^1=X_L^1}^{\max\{b^0+y^0-q^0, X_U^1\}} (x^1+x^2-y-b-(y^0-q^0))f(x^1)f(x^2)$$

$$= \sum_{k=X_L^1}^{\min\{b^0+(y^0-q^0), X_U^1\}} \frac{1}{2\overline{X^1}\,\overline{X^2}} \left(X_U^2 + \max\{y+b+(y^0-q^0)-k, X_L^2\} - 2(y+b+(y^0-q^0)-k)\right)$$

$$\cdot \max\{X_U^2 - \max\{y+b+(y^0-q^0)-k, X_L^2\}+1, 0\}.$$

(단, $X_L^1 > \min\{b^0+(y^0-q^0), X_U^1\}$이면 0)

$$\sum_{x^1=b^0+y^0-q^0+1}^{\infty} f(x^1) \times \sum_{x^2=-b^0+y+b}^{\infty} (x^2+b^0-y-b)f(x^2)$$

$$= \frac{1}{2\overline{X^1}\,\overline{X^2}} \max\{X_U^1 - b^0 - (y^0-q^0), 0\} \cdot \left(X_U^2 + \max\{y-b^0+b, X_U^2\} - 2(y-b^0+b)\right)$$

$$\cdot \max\{X_U^2 - \max\{y-b^0+b, X_L^2\}+1, 0\}.$$

(iii) $y^0 - q^0 > X_U^1$ 인 경우 :

$$\sum_{x^1=-\infty}^{y^0-q^0} f(x^1) \times \sum_{x^2=y+b}^{\infty} (x^2-y-b)f(x^2)$$

$$= \sum_{x^1=X_L^1}^{X_U^1} f(x^1) \times \sum_{x^2=\max\{y+b, X_L^2\}}^{X_U^2} (x^2-y-b)f(x^2)$$

$$= \frac{1}{2\overline{X^1}\,\overline{X^2}} (X_U^1 - X_L^1 + 1) \cdot \left(X_U^2 + \max\{y+b, X_L^2\} - 2(y+b)\right) \cdot \max\{X_U^2 - \max\{y+b, X_L^2\}+1, 0\}.$$

$$\sum_{x^2=y+b+(y^0-q^0)-x^1}^{\infty} \sum_{x^1=y^0-q^0+1}^{b^0+y^0-q^0} (x^1+x^2-y-b-(y^0-q^0))f(x^1)f(x^2) = 0.$$

$$\sum_{x^1=b^0+y^0-q^0+1}^{\infty} f(x^1) \times \sum_{x^2=-b^0+y+b}^{\infty} (x^2+b^0-y-b)f(x^2) = 0.$$

위의 (i), (ii), (iii)으로부터 다음의 식이 성립한다.

$$\sum_{x^1=-\infty}^{y^0-q^0} f(x^1) \times \sum_{x^2=y+b}^{\infty} (x^2-y-b)f(x^2)$$

$$= \frac{1}{2\overline{X^1}\,\overline{X^2}} \max\{\min\{y^0-q^0, X_U^1 - X_L^1+1, 0\} \cdot (X_U^2 + \max\{z, X_L^2\} - 2z) \cdot \max\{X_U^2 - \max\{z, X_L^2\}+1, 0\}\}$$

(단, $z = y+b$).

$$\sum_{x^2=y+b+(y^0-q^0)-x^1}^{\infty}\ \sum_{x^1=y^0-q^0+1}^{b^0+y^0-q^0}(x^1+x^2-y-b-(y^0-q^0))f(x^1)f(x^2)$$
$$=\sum_{k=\max\{y^0-q^0+1,X_L^1\}}^{\min\{b^0+(y^0-q^0),X_U^1\}}\frac{1}{2\overline{X^1}\,\overline{X^2}}(X_U^2+\max\{z,X_L^2\}-2z)\cdot\max\{X_U^2-\max\{z,X_L^2\}+1,0\}$$

(단, $z=y+b+(y^0-q^0)-k.$ $\max\{y^0-q^0+1,X_L^1\}>\min\{b^0+(y^0-q^0),X_U^1\}$이면 0).

$$\sum_{x^1=b^0+y^0-q^0+1}^{\infty}f(x^1)\times\sum_{x^2=-b^0+y+b}^{\infty}(x^2+b^0-y-b)f(x^2)$$
$$=\frac{1}{2\overline{X^1}\,\overline{X^2}}\max\{X_U^1-\max\{b^0+y^0-q^0-1,X_L^1\}+1,0\}(X_U^2+\max z,X_L^2-2z)\cdot\max\{X_U^2-\max\{z,X_L^2\}+1,0\}$$

(단, $z=y+b-b^0$).

그런데,

$$(X_U^2+\max\{z,X_L^2\}-2z)\cdot\max\{X_U^2-\max\{z,X_L^2\}+1,0\}=\begin{cases}(X_U^2+X_L^2-2z)(X_U^2-X_L^2+1) & \text{if}\quad z\le X_L^2\\ (X_U^2-z)(X_U^2-z+1) & \text{if}\quad X_L^2\le z\le X_U^2\\ 0 & \text{if}\quad z\ge X_U^2\end{cases}$$

이다. 여기서 $(X_U^2-z)(X_U^2-z+1)$는 볼록함수이므로 조각형 선형함수(piecewise linear function)로 바꿀 수 있다. 즉, $X_L^2\le z\le X_U^2$인 모든 정수 z에 대해

$$(X_U^2-z)(X_U^2-z+1)=\max_{k=0,\ldots,X_U^2-X_L^2-1}\{-2(X_U^2-X_L^2-k)z+(X_U^2-X_L^2-k)(X_U^2+X_L^2+k+1)\}$$

이다. 한편 $z=X_L^2$이면 $(X_U^2+X_L^2-2z)(X_U^2-X_L^2+1)=(X_U^2-z)(X_U^2-z+1)$이고, $z=X_U^2$이면 $(X_U^2-z)(X_U^2-z+1)=0$이다. 또한, $z\le X_L^2$인 모든 정수 z에 대해 $(X_U^2+X_L^2-2z)(X_U^2-X_L^2+1)\ge(X_U^2-z)(X_U^2-z+1)\ge 0$이고, $X_L^2\le z\le X_U^2$인 모든 정수 z에 대해 $(X_U^2-z)(X_U^2-z+1)\ge\max\{(X_U^2+X_L^2-2z)(X_U^2-X_L^2+1),0\}$이고, $z\ge X_U^2$인 모든 정수 z에 대해 $(X_U^2+X_L^2-2z)(X_U^2-X_L^2+1)\le(X_U^2-z)(X_U^2-z+1)\le 0$이다. 따라서

$$(X_U^2+\max\{z,X_L^2\}-2z)\cdot\max\{X_U^2-\max\{z,X_L^2\}+1,0\}$$
$$=\max_{k=-1,\ldots,X_U^2-X_L^2}\{-2(X_U^2-X_L^2-k)z+(X_U^2-X_L^2-k)(X_U^2+X_L^2+k+1)\}$$

이다.

결국, $h_i(x),\forall i$가 볼록함수이면 $\max_i\{h_i(x)\}$도 볼록함수이므로[1], $E[L|y,b]$는 볼록함수이다. R^2를 2차원 유클리드공간(2-dimensional Euclidean space)이라 하고, $Z=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$라 하자. 또한, $S_d=\{(y,b):(y,b)\in Z^2,0\le y\le N,0\le b\le B\}$라 하고 $N_d(t)=\{u:u\in Z^2,\|t-u\|<1\}$를 $t\in R^2$의 이산이웃집합(discrete neighborhood)이라 하자. 이 때 S_d는 이산사각집합(discrete rectangle)이고 $(y^1,b^1),(y^2,b^2)\in S_d,0\le\alpha\le 1$에 대해서 $\min_{(y,b)\in N_d(\alpha(y^1,b^1)+(1-\alpha)(y^2,b^2))}E[L|y,b]\le\alpha E[L|y^1,b^1]+(1-\alpha)E[L|y^2,b^2]$이므로, $E[L|y,b]$는 $(y,b)\in S_d$에 대해 이산볼록함수이다[9]. ■