韓國經營科學會誌
第31권 第1號
2006年　3月

공급사슬관리에서 생산입지선정 문제와 안전재고 최적화 문제의 통합모형 개발에 관한 연구*

조　건**

A Study on Developing an Integrated Model of Facility Location Problems and Safety Stock Optimization Problems in Supply Chain Management*

Geon Cho**

■ Abstract ■

Given a bill of materials (BOM) tree T labeled by the breadth first search (BFS) order from node 0 to node n and a general network $\mathfrak{I} = (V, A)$, where $V = \{1, 2, \cdots, m\}$ is the set of production facilities and A is the set of arcs representing transportation links between any of two facilities, we assume that each node of T stands for not only a component, but also a production stage which is a possible stocking point and operates under a periodic review base-stock policy. We also assume that the random demand which can be achieved by a suitable service level only occurs at the root node 0 of T and has a normal distribution $N(\mu, \sigma^2)$. Then our integrated model of facility location problems and safety stock optimization problem (FLP&SSOP) is to identify both the facility locations at which partitioned subtrees of T are produced and the optimal assignment of safety stocks so that the sum of production cost, inventory holding cost, and transportation cost is minimized while meeting the pre-specified service level for the final product.

In this paper, we first formulate (FLP&SSOP) as a nonlinear integer programming model and show that it can be reformulated as a 0-1 linear integer programming model with an exponential number of decision variables. We then show that the linear programming relaxation of the reformulated model has an integrality property which guarantees that it can be optimally solved by a column generation method.

Keyword : Supply Chain Management, Facility Location, Safety Stock Optimization, Nonlinear Integer Program, Linear Integer Program

논문접수일 : 2005년 7월 12일　　논문게재확정일 : 2006년 3월 3일
* 이 논문은 2004년도 전남대학교특별연구사업비 지원에 의하여 연구되었음.
** 전남대학교 경영학부 교수, 경영연구소 상임연구원

1. 서 론

오늘날 경영환경은 인터넷의 발전으로 인하여 전자거래환경이 급속히 확산되고 있으며 기업의 경영구조가 다양화되고 고객 만족을 통한 기업의 경쟁우위 확보 노력이 배가되면서 공급사슬관리(supply chain management : SCM)의 개념이 기업환경에 빠르게 도입되고 있다. 공급사슬관리는 EDI를 기본으로 하여 원자재 조달에서부터 최종제품이 고객에 이르는 전 과정의 모든 업무처리과정에서 발생할 수 있는 오류를 방지하고 정보활용의 적시성(timeliness)을 확보하여 제반 관련 프로세스의 혁신 및 리엔지니어링, 물류 효율 증대, 재고 감축, 정시 수배송, 비용 절감, 생산성 향상 등을 달성함으로써 공급사슬상에서 행해지는 경영활동들의 부분 최적화가 아닌 관련된 모든 경영활동들의 전체 최적화를 목표로 한다. 이 때 고려되어지는 중요한 의사결정문제로써 생산입지선정 문제(facility location problem : FLP)와 안전재고 최적화 문제(safety stock optimization problem : SSOP)가 있다.

생산입지선정 문제는 기업의 중요한 장기 의사결정문제 중의 하나로써 공장이나 창고와 같은 생산시설을 설치할 수 있는 후보입지가 주어지고 이러한 생산시설로부터 공급되는 제품에 대한 수요발생지역이 주어지며 또한 생산시설 설치비용 및 운영비용, 제품 수요량, 그리고 각 시설로부터 각 수요발생지역으로 제품을 수송할 때 소요되는 수송비용 등이 주어져 있다고 가정할 때, 최소의 비용으로 모든 제품 수요량을 충족시키기 위한 생산시설들의 입지를 결정하는 문제이다. 이 때 세우고자 하는 각 생산시설의 용량제한의 유무에 따라, 제한용량이 있는 입지설정문제(capacitated facility location problem : CFLP)와 제한용량이 없는 입지설정문제(uncapacitated facility location problem : UFLP)로 나누어진다. CFLP에 대한 대표적인 연구로는 Barcelo and Casanovas[2], Klincewicz and Luss[12], Pirkul[14], Mirchandani et al.[13], Sridharan[19], Cho[4], Holmberg et al.[9], 등이 있으며, UFLP에 대한 연구로는 Balinski and Wolfe[1], Magnanti and Wong[12], Cornuejols and Thizy[7], Conn and Cornuejols[6], Cho[5] 등이 대표적이다.

안전재고 최적화 문제는 정기실사 기본재고 정책(periodic review base-stock policy) 가정 하에서 미리 정해진 서비스 수준(pre-determined service level)을 만족하면서 총 재고비용을 최소로 하는 각 부분품의 안전재고의 크기를 결정하는 문제이다. Simpson[18]은 직렬 네트워크(serial network)로 모형화 될 수 있는 공급사슬에서 최종 제품에 대한 불확실한 수요(random demand)를 가정하고 최적의 안전재고의 크기를 결정하는 방법을 제시하였으며, Inderfurth[10]는 발산형 생산/분배 시스템(divergent production/distribution system)의 안전재고 최적화 문제를 푸는 동적계획 알고리듬을 개발하였다. Graves and Willems[8]는 걸침나무(spanning tree)로 모형화 될 수 있는 공급사슬에 대한 전략적 안전재고 배치(strategic safety stock placement)를 최적화하는 동적계획 알고리듬을 제시하였다.

그러나 오늘날과 같이 치열한 공급사슬 경영환경하에서는 생산입지선정 문제와 안전재고 최적화 문제를 동시에 다루는 문제(facility location problem and safety stock optimization problem : FLP&SSOP)가 다양한 형태로 빈번히 발생됨에 따라 이에 대한 효율적인 해법 개발이 절실히 요청되고 있음에도 불구하고 아직까지 생산입지선정 문제와 안전재고 최적화 문제 자체의 복잡성으로 인하여 이의 통합을 시도하는 연구는 국내·외를 막론하고 거의 전무한 실정이다. 다만, Shen et al.[17]만이 한 공급업자와 불확실한 수요를 갖는 다수의 소매업자들(retailers)로 구성된 2단계 공급사슬에서 분배센터(distribution center)가 소매업자 중의 하나에 설치되어 공급업자로부터 제품을 받아 몇몇 소매업자들의 수요를 충족시킴은 물론 소매업자들의 안전재고를 관리하는 역할을 수행한다고 가정할 때 미리 정해진 소매업자들에 대한 서비스 수준을 만족하면서 총 분배센터 설치비용, 수송비용 및 재고유지비용의 합을 최소로 하는 분배센터의 개수 및 위치, 각

소매업자의 분배센터 할당방법, 그리고 각 분배센터의 안전재고 보유량 등을 결정하는 문제(joint location-inventory problem)를 비선형 정수계획 모형(non-linear integer programming model : NLIP 모형)으로 공식화하였으며 이를 집합피복 정수계획 모형(set-covering integer programming model)으로 재공식화 하여 이를 열생성기법(column generation method)으로 풀 수 있음을 보였다.

따라서 본 연구에서는 먼저 현실적이고 합리적인 가정 하에서 (FLP&SSOP)를 명확히 정의한 후 이에 대한 효율적인 모형 개발에 관한 연구를 수행함으로써 향후 (FLP&SSOP)에 대한 연구 활성화에 핵심적인 기초연구결과를 확보하고자 한다. 이를 위해 본 연구에서는 Shen et al.[17]이 가정한 2단계 공급사슬모형이 아닌 한 완제품(a final product)의 제품구조나무(bill of materials : BOM)와 BOM의 부분품들(components)을 생산할 수 있는 생산시설 네트워크가 주어져 있다고 가정하고 미리 정해진 완제품에 대한 서비스 수준을 만족하면서 총 생산비용, 수송비용 및 재고유지비용의 합을 최소로 하는 완제품 및 부분품들의 생산시설 위치 및 각 부분품들의 안전재고 보유량을 결정하는 (FLP&SSOP)를 NLIP 모형으로 공식화할 수 있음을 보인다.

그러나 NLIP 모형은 NP-hard이며 또한 지금까지 문헌상에 소개된 NLIP 모형에 대한 연구가 극히 미흡하기 때문에 (FLP&SSOP)에 대한 NLIP 모형을 직접 푸는 해법을 개발하는 연구를 수행하기에는 한계가 있다. 따라서 본 연구에서는 (FLP&SSOP)를 좀 더 풀기 쉬운 모형인 지수적으로 많은 변수(exponential number of variables)를 갖는 0-1 선형 정수계획 모형(0-1 linear integer programming model : 0-1 LIP 모형)으로 재공식화할 수 있음을 보인다. 또한 0-1 LIP 모형의 선형완화식(linear programming relaxation)이 정수해 성질(integrality property)을 갖는다는 사실을 증명함으로써 향후 열생성기법을 활용하여 이에 대한 최적해를 구하는 연구는 물론 다양한 형태의 (FLP&SSOP)에 대한 연구를 효율적으로 수행하기 위한 초석을 마련하고자 한다.

본 연구는 다음과 같이 구성된다. 2장에서는 본 연구에서 다루고자 하는 (FLP&SSOP)를 명확히 정의하고, 3장에서는 이 문제에 대한 NLIP 모형을 제시한다. 4장에서는 0-1 LIP 모형을 제시하고 또한 이의 선형완화식이 정수해 성질을 가짐을 증명하며 5장에서는 결론 및 향후 연구과제를 제시한다.

2. 문제 정의

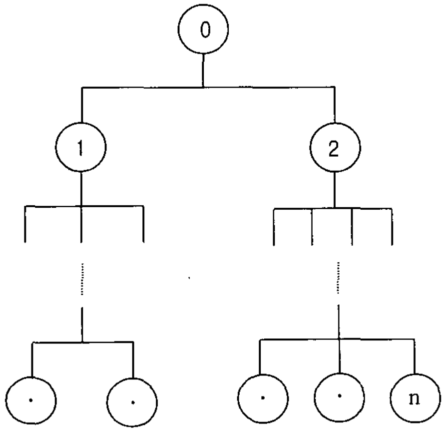
주어진 제품구조나무(bill of materials : BOM) $T=(N,E)$가 주어져 있고 생산시설 네트워크(network of production facilities) $\mathfrak{I}=(V,A)$가 주어져 있다고 하자([그림 1], [그림 2] 참조). 이 때 $N=\{0,1,\cdots,n\}$은 완제품과 부분품을 나타낼 뿐 만 아니라 완제품과 부분품을 생산하는 생산단계(production stage)를 나타내며 너비우선탐색(breadth first search : BFS) 순서를 적용하여 번호가 부여된다고 가정한다. E는 완제품 또는 부분품과 그의 직하위 부분품을 연결하는 아크들의 집합을 나타내고 $V=\{1,2,\cdots,m\}$는 생산시설들의 집합을 나타내며 A는 임의의 두 생산시설을 연결하는 수송노선들(transportation links)의 집합을 나타낸다. 편의상 본 연구에서는 다음과 같은 가정을 한다.

1) 각 부분품은 정확히 한 생산시설에서만 생산된다.
2) T의 각 노드에 대응되는 부분품은 직상위 선행노드(immediate predecessor)에 대응되는 부분품을 만드는데 정확히 한 단위가 소요된다.
3) 각 생산단계에서는 안전재고를 보유할 수 있으며 정기실사 기본재고 정책을 사용한다.
4) 수요는 완제품에 해당하는 BOM의 루트노드(root node)에서만 발생되고 즉시 충족되며 평균이 μ, 분산이 σ^2인 정규분포 $N(\mu,\sigma^2)$를 따른다.
5) 잎노드(leaf node)에 해당된 부분품들을 생산하는데 필요한 원자재들(raw materials)은 외부로부터 즉시 공급된다.
6) 각 부분품의 단위당 수송비용은 모든 수송노

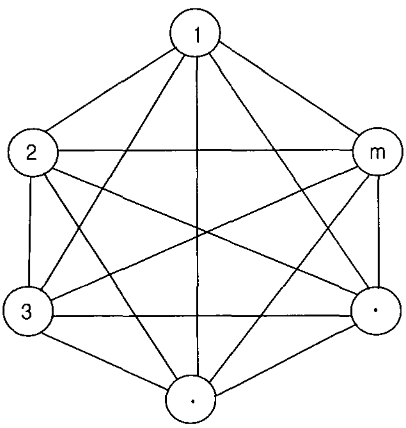
선에 대해 일정하며 또한 동일한 수송노선에 대한 모든 부분품의 수송시간은 동일하다.

7) 생산, 재고 및 수송에 관련된 모든 정보는 각 생산시설들이 서로 효율적으로 공유할 수 있도록 중앙집중관리시스템(centralized management system)하에서 관리된다.

8) 완제품의 서비스 수준을 만족하기 위한 각 부분품들의 수송시간 서비스 수준은 $\hat{s}$이다. 즉, 한 부분품이 한 생산시설에서 생산된 후 그의 직상위 선행노드에 해당된 부분품(혹은 완제품)을 생산하기 위해 다른 생산시설로 수송되어져야 할 경우 $\hat{s}$시간 이내에 수송된다.



[그림 1] 제품구조나무 $T=(N,E)$



[그림 2] 생산시설 네트워크 $\mathfrak{I}=(V,A)$

참고로 위의 가정들은 문헌상에 소개되어진 생산입지선정 문제와 안전재고 최적화 문제에 대한 연구들에서 사용된 가정들로써 대부분의 공급사슬 경영환경에서 실제로 사용되고 있는 가정들이다. 다만 가정 2)와 가정 6)은 본 연구에서 문제의 단순화를 위해 편의상 가정한 것으로 이에 대한 일반화된 가정(예컨대, 가정 2)를 'T의 각 노드 i에 대응되는 부분품은 직상위 선행노드(immediate predecessor)에 대응되는 부분품을 만드는데 μ_i단위가 소요된다'로 가정함)은 본 연구에서 제시된 수리모형에서 목적함수(objective function)의 계수(coefficient)에만 영향을 미칠 뿐 본 연구의 논리 전개에는 아무런 영향을 미치지 않으므로 본 연구에서처럼 가정 2)와 가정 6)을 사용하여도 무방하다.

이 때 본 연구에서 다루고자 하는 생산입지선정 문제와 안전재고 최적화 문제를 동시에 다루는 문제 (FLP&SSOP)는 미리 정해진 완제품에 대한 서비스 수준을 만족하면서 총 생산비용, 재고유지비용, 수송비용의 합을 최소로 하도록 BOM을 부분나무(subtree)로 분할(partition)하여 각 부분나무를 임의의 생산시설에 할당하는 방법과 각 부분품들의 안전재고의 크기를 동시에 결정하는 문제이다.

3. FLP&SSOP에 대한 비선형 정수계획 모형

본 장에서는 (FLP&SSOP)에 대한 비선형 정수계획 모형(non-linear integer programming model : NLIP 모형)을 제시하고자 한다. 이를 위해 먼저 다음과 같은 기호들을 정의한다.

• 기호정의

c_{il} : 생산시설 l에서 부분품 i의 단위당 생산비용

h_{il} : 생산시설 l에서 부분품 i단위당 재고유지비용

$t^{ll'}$: 생산시설 l에서 생산시설 l'까지 수송에 소요되는 수송시간

b_i : 단위시간당 부분품 i의 단위당 수송비용

d_i : 부분품 i의 수요 ($d_i \sim N(\mu, \sigma^2)$로 가정)

α : 미리 정해진 서비스 수준과 관련된 안전계수 (safety factor)

S_i : 부분품 i의 아웃바운드 서비스시간(outbound service time)

SI_i : 생산단계 i의 인바운드 서비스시간(inbound service time)

T_i : 부분품 i생산인도시간(processing time)

$p(i)$: i의 직상위 선행노드(immediate predecessor) ($p(0) = -1$로 가정)

$D(i)$: i의 직하위 후행노드들(immediate successors)의 집합(즉, $D(i) = \{j \in N \mid p(j) = i\}$)

이 때 생산인도시간 T_i는 부분품 i를 생산하는데 소요되는 생산시간과 생산 후 재고보관 창고로 이동하는데 소요되는 이동시간의 합을 나타내며 편의상 모든 생산시설에 대해 일정하다고 가정한다. 아웃바운드 서비스시간 S_i는 부분품 i를 직상위 부분품 $p(i)$가 생산되는 생산시설로 인도하는데 소요되는 시간을 나타낸다. 인바운드 서비스시간 SI_i는 생산단계 i가 생산을 개시할 수 있도록 부분품 i의 생산에 필요한 모든 직하위 부분품들을 확보하는데 소요되는 시간을 나타내며 $SI_i = \max\{S_i - T_i, \max\{S_j \mid j \in D(i)\}\}$로 정의된다. 또한 생산단계 i에서 t 기간동안 발생되는 부분품 i에 대한 평균 수요의 변동량은 $\alpha\sigma\sqrt{t}$임은 잘 알려져 있다(Graves and Willems[8] 참조). 따라서 $SI_i > S_i - T_i$ (즉, $SI_i + T_i > S_i$)가 성립할 경우 생산단계 i에서는 $SI_i + T_i - S_i$ 기간 동안 발생되는 평균 수요의 변동량을 충족시키기 위해 부분품 i에 대한 안전재고를 보유해야 하며 보유량은 $\alpha\sigma\sqrt{SI_i + T_i - S_i}$임을 알 수 있다. 결과적으로 SI_i, S_i는 부분품 i에 대한 안전재고의 크기를 결정하는 결정변수이다.

이제 BOM을 부분나무로 분할하여 각 부분나무를 임의의 생산시설에 할당하는 방법과 관련된 결정변수를 다음과 같이 정의한다.

$$z_{il} = \begin{cases} 1, & \text{if 부분품 } i\text{가 생산시설 } l\text{에서 생산되면} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$w_i^{ll'} = \begin{cases} 1, & \text{if 부분품 } i\text{가 생산시설 } l\text{에서 } l'\text{으로 수송되면} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

위에서 정의한 기호와 결정변수를 이용하여 (FLP&SSOP)를 NLIP 모형으로 공식화하면 다음과 같다. 참고로 '$D(i) = \varnothing$'는 i가 잎노드임을 의미하며 Z_+는 양의 정수들의 집합을 나타낸다.

$$\min \sum_i \sum_l (c_{il} \cdot \mu) z_{il} + \sum_i \sum_l (h_{il} \cdot \alpha\sigma\sqrt{SI_i + T_i - S_i}) z_{il} + \sum_i \sum_l \sum_{l'} (b_i \cdot t^{ll'} \cdot \mu) w_i^{ll'} \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \sum_l z_{il} = 1, \ \forall \ i \in N \quad (2)$$

$$\sum_{l' \neq l} w_i^{l'l} + z_{il} = \sum_{l' \neq l} w_i^{ll'} + z_{p(i)l}, \ \forall \ i \in N, \ l \in V \quad (3)$$

$$SI_i + T_i - S_i \geq 0, \ \forall \ i \in N \quad (4)$$

$$SI_i \geq S_j, \ \forall \ i \in N \text{ and } j \in D(i) \quad (5)$$

$$S_i \leq \hat{s}, \ \forall \ i \in N \quad (6)$$

$$S_0 = 0 \quad (7)$$

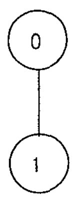
$$SI_i = 0, \ \forall \ i \in N \text{ with } D(i) = \varnothing \quad (8)$$

$$z_{il}, \ w_i^{ll'} \in \{0,1\} \text{ and } SI_i, \ S_i \in Z_+, \ \forall \ i \in N, \ l, l' \in V \quad (9)$$

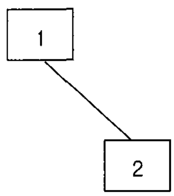
이 때 식 (1)은 총 비용, 즉 생산비용, 재고유지비용, 수송비용의 합을 최소화하는 목적함수를 나타내며 식 (2)는 본 연구의 가정 1)을 반영하는 것으로 각 부분품이 정확히 한 생산시설에서만 생산되어져야 함을 나타낸다. 식 (3)은 부분품 i와 직상위 부분품 $p(i)$가 같은 생산시설에서 생산되든지 혹은 부분품 i를 직상위 부분품 $p(i)$가 생산되는 생산시설로 수송해야 함을 의미한다. 즉, $z_{il} = z_{p(i)l} = 1$이든지 혹은 $z_{il} = 1$이면서 직상위 부분품 $p(i)$가 생산시설 l'에서 생산되면 $w_i^{ll'} = 1$이 성립하고 $z_{p(i)l} = 1$이면서 부분품 i가 생산시설 l'에서 생산되면 $w_i^{l'l} = 1$이 성립함을 의미한다. 식 (4)와 식 (5)는 인바운드 서비스시간의 정의를 반영하고 있다. 식 (6)은 본 연구의 가정 8)을 반영하고 있으며 식 (7)과 식 (8)은 본 연구의 가정 4)와 가정 5)를 각각 반영하고 있다.

4. FLP&SSOP에 대한 0-1 선형 정수계획 모형

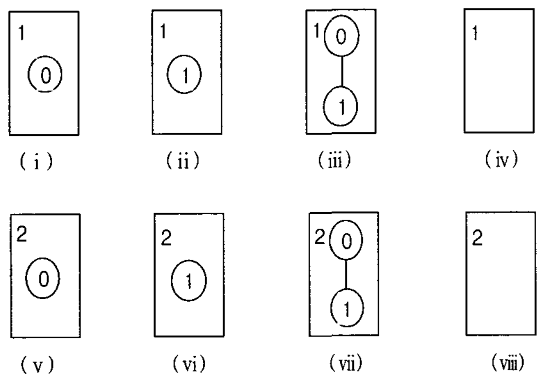
일반적으로 NLIP 모형은 NP-hard 문제이며 또한 지금까지 문헌상에 소개된 연구가 매우 미흡한 실정이기 때문에 3장에서 소개된 (FLP&SSOP)에 대한 NLIP 모형을 직접 활용하여 이를 푸는 해법을 개발하기에는 많은 어려움이 있다. 따라서 본 절에서는 (FLP&SSOP)가 지수적으로 많은 변수(exponential number of variables)를 갖는 0-1 선형 정수계획 모형(0-1 linear integer programming model : 0-1 LIP 모형)으로 재공식화될 수 있음을 보이고 이의 선형계획 완화식(linear programming relaxation : LP relaxation)이 정수해 성질(integrality property)을 갖는다는 사실을 증명함으로써 향후 열생성기법을 활용하여 이에 대한 최적해를 구하는 연구를 효율적으로 수행하기 위한 초석을 마련하고자 한다.



[그림 3] BOM T



[그림 4] 생산시설 네트워크



[그림 5] 8가지 경우의 수

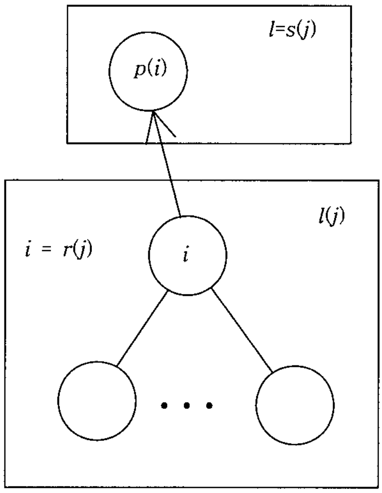
(FLP&SSOP)의 최적해를 찾기 위해서는 T를 부분나무로 분할하는 방법과 각 부분나무를 생산시설에 할당하는 방법을 동시에 모두 고려해야 하는데 이는 지수적으로 많은 경우의 수가 존재함을 알 수 있다. 이 때 각 경우는 T의 부분나무의 형태, 부분나무를 생산하는 생산시설의 위치, 부분나무의 루트노드가 수송되어져야 할 생산시설의 위치(즉, 부분나무의 루트노드의 직상위 선행노드를 생산하는 생산시설의 위치) 등에 관한 정보들에 의해 구분된다. 예를 들어 BOM과 생산시설 네트워크가 각각 [그림 3], [그림 4]와 같이 주어져 있다고 하자. 이 때 고려할 수 있는 모든 경우의 수는 다음의 8가지이다([그림 5] 참조).

(i) 부분나무는 노드 0으로만 구성되어 있고 이를 생산시설 1에서 생산하는 경우
(ii) 부분나무는 노드 1로만 구성되어 있고 이를 생산시설 1에서 생산하는 경우
(iii) 부분나무는 노드 0, 1로 구성되어 있고 이를 생산시설 1에서 생산하는 경우
(iv) 생산시설 1에서 아무것도 생산하지 않는 경우
(v) 부분나무는 노드 0으로만 구성되어 있고 이를 생산시설 2에서 생산하는 경우
(vi) 부분나무는 노드 1로만 구성되어 있고 이를 생산시설 2에서 생산하는 경우
(vii) 부분나무는 노드 0, 1로 구성되어 있고 이를 생산시설 2에서 생산하는 경우
(viii) 생산시설 2에서 아무것도 생산하지 않는 경우

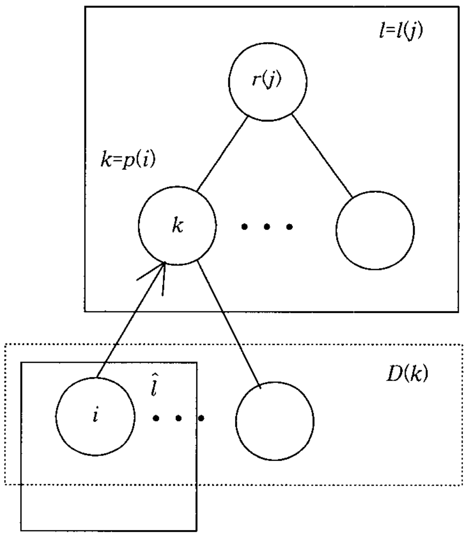
(i)과 (vi)의 경우((ii)와 (v)의 경우도 마찬가지임) 노드 1은 생산시설 2에서 생산되어 직상위 선행노드인 노드 0이 생산되는 생산시설 1로 수송되어져야 함을 나타내고 있는 측면에서는 동일하나 각각의 경우에서 고려되어지는 부분나무와 이를 생산하는 생산시설의 위치가 다르다는 측면에서 각각 다른 경우로 간주한다. 또한 (iii)과 (viii)의 경우에는((iv)와 (vii)의 경우도 마찬가지임) 노드 0, 1이 동일한 생산시설에서 생산되어짐으로 수송이 발생하

지 않음을 알 수 있다. 위의 모든 경우를 종합해 볼 때 고려되어지는 부분나무의 루트노드와 그의 직상위 선행노드가 동일한 생산시설에서 생산되는 경우와 생산되지 않는 경우가 항상 존재하기 때문에 루트노드에 대한 수송 발생여부를 알 수 있으며 만약 수송이 발생하면 부분나무의 루트노드를 생산하는 생산시설을 고려하는 경우와 그의 직상위 선행노드를 생산하는 생산시설을 고려하는 경우인 2가지 경우가 항상 존재함을 알 수 있다(예를 들어 (i)과 (vi)의 경우). 따라서 이러한 모든 경우를 효율적으로 나타낼 수 있는 기호를 정의함으로써(아래에 정의된 b_{lij} 참조) 본 장에서 제시한 0-1 선형 정수계획 모형의 제약식 또한 매우 효율적으로 도출할 수 있다. 아울러 위 예제에서 모든 경우에 대하여 각각에 해당하는 생산비용과 수송비용이 결정되며 또한 완제품에 해당하는 노드 0의 서비스 수준을 충족시키기 위해 각 노드에 대한 생산인도시간 및 인바운드 서비스시간과 아웃바운드 서비스시간을 고려하여 각 노드에 대한 안전재고를 보유해야 하는데 이와 관련된 재고유지비용이 발생한다. 결과적으로 위 예제에 대한 (FLP&SSOP)의 최적해는 위의 8가지 경우 중 생산비용, 재고유지비용, 수송비용의 합을 최소로 하는 경우임을 알 수 있다.

이제 (FLP&SSOP)를 지수적으로 많은 변수를 갖는 0-1 LIP 모형을 제시하기 위하여 편의상 다음과 같은 기호들을 정의한다. 이 때 각 변수는 총비용을 최소로 하는 T의 부분나무 분할방법 및 각 부분나무의 생산시설 할당과 관련하여 지수적으로 많은 경우들의 선택여부를 결정하며 또한 각 변수의 계수에는 목적함수의 계수인 총비용과 제약식에 나타나는 계수인 부분나무의 형태, 부분나무를 생산하는 생산시설의 위치, 부분나무의 루트노드가 수송되어져야 할 생산시설의 위치 등이 있다. 따라서 주어진 변수(경우)에 대하여 이러한 계수들을 모아 놓은 열벡터를 정의할 수 있으며 이를 간략히 '열'이라 부르기로 하고 또한 다음에서 'j번째 열에 대응되는'이라 함은 'j번째 변수(경우)와 관련된'을 의미한다.



[그림 6] $b_{lij}=1$인 경우



[그림 7] $b_{lij}=-1$인 경우

$r(j)$: j번째 열에 대응되는 부분나무의 루트노드

$l(j)$: j번째 열에 대응되는 부분나무를 생산하는 생산시설

$s(j)$: $r(j)$의 직상위 선행노드를 생산하는 생산시설

c_j = j번째 열에 대응되는 총비용(즉, 생산비용, 재고유지비용, 수송비용의 합)

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{if 부분품 } i\text{가 생산시설 } l(j)\text{에서 생산되면}\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$b_{lij} = \begin{cases} 1, \text{ if } i = r(j)\text{이고 } l = s(j)\text{이면} \\ -1, \text{if } i \in \{i \in D(k)|a_{kj} = 1\}\text{이면서 } a_{ij} = 0\text{이고} \\ \quad l = l(j)\text{이면} \\ 0, \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

이 때 a_{ij}는 j번째 열에 대응되는 부분나무(즉, $l(j)$에서 생산되는 부분나무)의 형태를 결정하며 b_{lij}는 j번째 열에 대응되는 부분나무의 생산시설의 위치, 부분나무의 루트노드, 루트노드가 수송되어져야 할 생산시설의 위치 등을 결정한다. 참고로 $b_{lij}=1$은 노드 i가 j번째 열에 대응되는 부분나무의 루트노드이면서 노드 i의 직상위 선행노드 $p(i)$가 생산되는 생산시설 $l=s(j)$로 수송되어짐을 나타낸다([그림 6] 참조). $b_{lij}=-1$은 노드 i가 j번째 열에 대응되는 부분나무에 없으나 노드 i의 직상위 선행노드 $p(i)=k$는 부분나무에 있고 또한 생산시설 l에서 생산되어짐을 나타내며 결과적으로 노드 i는 생산시설 $l=l(j)$로 수송되어짐을 나타낸다([그림 7] 참조).

또한 만약 $l=l(j)$, $l'=s(j)$가 각각 주어져 있다고 가정하면 c_j는 다음과 같이 구해짐을 알 수 있다.

$$c_j = \sum_{i \in N}(c_{il} \cdot \mu)a_{ij} + \sum_{i \in N}(h_{il} \cdot \alpha\sigma)\sqrt{SI_i + T_i - S_i} \cdot a_{ij} + b_{r(j)} \cdot \mu \cdot t^{ll'} \quad (10)$$

식 (10)에서 첫 번째 항은 생산시설 l에서 생산되는 모든 부분품들의 총 생산비용을 나타내고 두 번째 항은 생산시설 l에서 보유하는 총 안전재고 유지비용을 나타내며 세 번째 항은 생산시설 l에서 생산되는 부분나무의 루트노드인 $r(j)$가 $r(j)$의 직상위 선행노드인 $p(r(j))$를 생산하는 생산시설 l'으로 수송될 때 소요되는 총 수송비용을 나타낸다. 아울러 3장에서 소개된 (FLP&SSOP)에 대한 NLIP 모형에서는 총비용 식 (1)을 최소화하도록 각 부분품들을 생산하는 생산시설의 위치(즉, 결정변수 z_{il}값)를 결정해야 하므로 당연히 SI_i와 S_i도 z_{il}값에 따라 변하며 결정되는 결정변수인 반면 식 (10)에서는 주어진 j번째 열에 대해 j번째 열에 대응되는 부분나무를 생산하는 생산시설 $l(j)$와 부분나무의 루트노드 $r(j)$의 직상위 선행노드를 생산하는 생산시설 $l'=s(j)$가 각각 주어져 있다고 가정하고 있기 때문에 생산시설의 위치에 따라 결정되어지는 SI_i와 S_i는 당연히 상수값(constant value)임을 알 수 있다.

이제 결정변수 x_j를 다음과 같이 정의할 때

$$x_j = \begin{cases} 1, \text{ if } j\text{번째 열이 선택되면} \\ 0, \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

(FLP&SSOP)는 다음과 같은 0-1 LIP 모형으로 공식화될 수 있다.

$$(P) \quad \min \sum_j c_j x_j \quad (11)$$

$$\text{s.t.} \sum_j a_{ij} x_j = 1, \ \forall \ i \in N \quad (12)$$

$$\sum_j b_{lij} x_j = 0, \ \forall \ i \in N \setminus \{0\}, \ l \in V \quad (13)$$

$$x_j \in \{0,1\} \quad (14)$$

이 때 (P)는 앞에서도 언급하였듯이 지수적으로 많은 변수를 가진다. 또한 3장의 (FLP&SSOP)에 대한 NLIP 모형에서와 마찬가지로 식 (11)은 총 비용을 최소화하는 목적함수를 나타내며 식 (12)는 모든 부분품이 정확히 한 생산시설에서만 생산되어져야 함을 나타내는 것으로 모든 실행가능해(feasible solution)에 대하여 $a_{ij}=1$을 만족하는 열 j는 유일하게 존재함을 의미한다. 식 (13)은 부분품 i와 직상위 부분품 $p(i)$가 같은 생산시설 l에서 생산되든지(즉, $b_{lij}=0$) 혹은 부분품 i가 직상위 부분품 $p(i)$가 생산되는 생산시설로 수송되어져야 함을 의미하는데 주어진 부분품 $i(i \neq 0)$와 생산시설 l에 대하여 다음과 같은 세 가지 경우가 발생한다.

1) 부분품 i가 생산시설 l에서 생산되는 경우
2) 부분품 i는 생산시설 l에서 생산되지 않고 직상위 부분품 $p(i)$는 생산시설 l에서 생산되는 경우
3) 부분품 i와 직상위 부분품 $p(i)$가 모두 생산시설 l에서 생산되지 않는 경우

먼저 1)과 3)의 경우에는 명백히 b_{lij}의 정의에 의해 모든 열 j에 대해서 $b_{lij}=0$이므로 식 (13)이 성립하며 2)의 경우에는 $a_{ij_1}=1$과 $l=s(j_1)$을 만족하는 열 j_1이 존재하고 또한 동시에 $a_{p(i)j_2}=1$, $l=l(j_2)$, $a_{ij_2}=0$을 만족하는 열 j_2가 존재한다. 따라서 b_{lij}의 정의에 의해 $b_{lij_1}=1$, $b_{lij_2}=-1$이므로 2)의 경우에 대해서도 식 (13)이 성립함을 알 수 있다.

이제 다음과 같은 (P)의 선형계획 완화식 $(\overline{P})$가 정수해 성질을 가짐을 증명하고자 한다.

$$\min \sum_j c_j x_j \quad (15)$$

$$(\overline{P}) \quad \text{s.t.} \sum_j a_{ij} x_j = 1, \ \forall \ i \in N \quad (16)$$

$$\sum_j b_{lij} x_j = 0, \ \forall \ i \in N \setminus \{0\}, \ l \in V \quad (17)$$

$$0 \leq x_j \leq 1 \quad (18)$$

임의의 두 노드 $i,k \in N(i<k)$를 연결하는 노드들의 집합을 경로(path) $\gamma[i,k]$라 하고 노드 i를 루트노드로 갖는 T의 완전 부분나무(complete subtree)를 $T(i)$라 할 때 $T(i)$의 노드들의 집합 $N(i)$는 $N(i)=\{k \in N | i \in \gamma[k,0]\}$임을 알 수 있다. 먼저 논의의 편의를 위해 j 번째 열이 '완전형(completion)'이라는 개념을 정의한 후 $(\overline{P})$가 정수해 성질을 가짐을 증명하고자 한다.

[정의 1] j번째 열이 다음과 같은 성질을 만족하면 '*완전형(completion)*'이라고 정의한다.

1) $x_j>0$

2) $a_{ij}=1$, $a_{kj}=0$인 모든 노드 $k \in N(i)$에 대하여 $(\overline{P})$에 대한 실행가능해(feasible solution)가 존재하며 이 실행가능해에 j 번째 열이 포함된다.

앞에서도 논의되었듯이 $a_{ij}=1$, $a_{kj}=0$인 모든 노드 $k \in N(i)$에 대하여 다음의 두 가지 경우가 존재한다.

i) k의 직상위 선행노드 $p(k)$가 $l=l(j)$에서 생산되는 경우(즉, $a_{p(k)j}=1$인 경우)

ii) k의 직상위 선행노드 $p(k)$가 $l=l(j)$에서 생산되지 않는 경우(즉, $a_{p(k)j}=0$인 경우)

이 때 $a_{p(k)j}=1$인 경우에는 b_{lkj}의 정의에 의해 $b_{lkj}=-1$임을 알 수 있으며 $a_{p(k)j}=0$인 경우에는 $b_{lkj}=0$임을 알 수 있다.

이제 $(\overline{P})$의 실행가능해 중에서 $x_j>0$이라고 하자. 이 때 $a_{ij}=1$, $a_{kj}=0$인 모든 노드 $k \in N(i)$에 대하여 식 (16)에 의해 $\sum_j a_{kj} x_j = 1$이 성립하므로 $a_{k\bar{j}}=1$인 $\bar{j}$가 존재하며 또한 $a_{p(k)j}=1$인 경우에는 $b_{lkj}=-1$, $b_{lk\bar{j}}=1$이 성립하고 $a_{p(k)j}=0$인 경우에는 $b_{lkj}=0$, $b_{lk\bar{j}}=0$이 성립한다. 따라서

$$x_e = \begin{cases} x_j, & \text{if } e=\bar{j} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

로 정의하면 $\{x_e\}$는 식 (18)은 물론 $i=k$일 때 대응되는 식 (16)과 식 (17)인 $\sum_j b_{lkj} x_j = 0$을 만족하므로 $\{x_e\}$는 $(\overline{P})$에 대한 실행가능해임을 알 수 있다. 따라서 $(\overline{P})$의 실행가능해 중에서 $x_j>0$에 대응되는 j 번째 열은 [정의 1]을 만족하므로 완전형이다.

[정리 1] 만약 $(\overline{P})$가 실행가능해를 가지면 $(\overline{P})$는 정수해 성질을 가진다.

<증명> 만약 $(\overline{P})$가 실행가능해를 가짐에도 불구하고 정수해 성질을 갖지 않는다고 가정하면 정수(integer)가 아닌 값을 갖는 극점(extreme point) $\{x_j^* | j \in N\}$이 존재하며 다음과 같은 두 가지 경우가 발생한다.

i) 루트노드 0에 대응된 열(또는 변수)이 정수값을 갖지 않는 경우

ii) 루트노드 0에 대응된 열(또는 변수)이 정수값을 갖는 경우

i)의 경우 루트노드 0에 대응된 열(또는 변수)이 정수값을 갖지 않는 모든 열들의 집합을 $F_0=\{j | r(j) = 0 \text{ and } 0<x_j^*<1\} \equiv \{j_1, j_2, \cdots, j_k\}$라고 하면 루트노

드 0에 대응되는 제약식 (16)에 의해

$$\sum_{t=1}^{k} x_{j_t}^{*} = 1 \qquad (19)$$

이 성립한다. 또한 모든 극점은 실행가능해이므로 모든 열 $j \in F_0$는 완전형이다. 따라서 임의의 열 $j_t \in F_0$에 대하여 다음과 같이 정의된 $\{x_j^* \mid j \in N\}$는 $(\overline{P})$에 대한 실행가능해가 된다.

$$x_j^* = \begin{cases} 1, & \text{if } j = j_t \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

또한 극점 $\{x_j^* \mid j \in N\}$에서 $F_1 = \{j \mid x_j^* = 0\}$, $F_2 = \{j \mid x_j^* = 1\}$이라고 하면 $N = \bigcup_{i=0}^{2} F_i$이며 극점은 식 (19)와 위에서 정의된 실행가능해들을 이용함으로써 다음과 같은 볼록 결합(convex combination)으로 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} (x_j^*)_{j \in N} &= ((x_j^*)_{j \in F_0}, (x_j^*)_{j \in F_1}, (x_j^*)_{j \in F_2}) \\ &= x_{j_1}^*(1, 0, \cdots, 0, (x_j^*)_{j \in F_1}, (x_j^*)_{j \in F_2}) \\ &\quad + x_{j_2}^*(0, 1, \cdots, 0, (x_j^*)_{j \in F_1}, (x_j^*)_{j \in F_2}) \\ &\quad \cdots \\ &\quad + x_{j_k}^*(0, 0, \cdots, 1, (x_j^*)_{j \in F_1}, (x_j^*)_{j \in F_2}) \end{aligned}$$

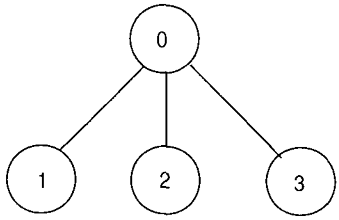
이는 극점의 정의에 모순이므로 초기에 가정한 $(\overline{P})$가 실행가능해를 가짐에도 불구하고 정수해 성질을 갖지 않는다는 가정은 잘못이다. 따라서 만약 $(\overline{P})$가 실행가능해를 가지면 $(\overline{P})$는 정수해 성질을 가진다.

ii)의 경우 루트노드가 아닌 노드 i에 대응된 열(또는 변수)이 정수값을 갖지 않는 경우가 존재하며 이와 관련된 모든 열들의 집합을 $F_{il} = \{j \mid r(j) = i, s(j) = l \text{ and } 0 < x_j^* < 1\}$이라고 하면 노드 i에 대응되는 제약식 (16)에 의해

$$\sum_{j \in F_{il}} x_j^* = 1 \qquad (20)$$

이 성립한다. 따라서 i)의 경우에서와 동일한 논거에 의해 극점을 실행가능해들의 볼록 결합으로 표현할 수 있으며 이 또한 극점의 정의에 모순이므로 만약 $(\overline{P})$가 실행가능해를 가지면 $(\overline{P})$는 정수해 성질을 가진다. □

따라서 (FLP&SSOP)에 대한 0-1 LIP 모형 (P)는 지수적으로 많은 변수를 가지면서 정수해 성질을 가지므로 열생성기법을 활용하여 효율적으로 풀 수 있음을 알 수 있다.



[그림 8] BOM

[관찰 1] $(\overline{P})$의 제약식 행렬을 A라고 할 때 만약 A가 토탈리 유니모듈러(totally unimodular : TU)이면 $(\overline{P})$는 정수해 성질을 가진다는 것은 이미 잘 알려져 있는 사실이나 A는 토탈리 유니모듈러가 아니다. 예컨대 [그림 8]과 같은 BOM과 한 생산시설 l이 주어져 있다고 가정하자. 이 때 첫 번째 열은 루트노드 0과 노드 1로 구성된 부분나무가 생산시설 l에서 생산되는 경우에 대응되고(즉, $a_{01} = a_{11} = 1$, $a_{21} = a_{31} = 0$, $b_{l11} = 0$, $b_{l21} = b_{l31} = -1$), 두 번째 열은 루트노드 0과 노드 2로 구성된 부분나무가 생산시설 l에서 생산되는 경우에 대응되며(즉, $a_{02} = a_{22} = 1$, $a_{12} = a_{32} = 0$, $b_{l22} = 0$, $b_{l12} = b_{l32} = -1$), 세 번째 열은 루트노드 0과 노드 3으로 구성된 부분나무가 생산시설 l에서 생산되는 경우에 대응되는(즉, $a_{03} = a_{33} = 1$, $a_{13} = a_{23} = 0$, $b_{l33} = 0$, $b_{l13} = b_{l23} = -1$) A의 부분행렬(submatrix) $\overline{A}$를 구하면 다음과 같다.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

그런데 $\overline{A}$의 3×3 행렬식(determinant)중에서 $\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ $=-2$이므로 A는 토탈리 유니모듈러가 아님을 알 수 있다.

5. 결론 및 향후 연구과제

오늘날 매우 중요한 이슈로 부각되고 있는 공급사슬관리에서 치열한 경쟁, 제품 수명주기의 단축, 고객 기대수준의 향상 등으로 인하여 생산입지선정 문제와 안전재고 최적화 문제를 동시에 다루는 문제(facility location problem and safety stock optimization problem : FLP&SSOP)가 다양한 형태로 빈번히 발생되고 있음에도 불구하고 문제 자체의 복잡성으로 인하여 이에 대한 연구가 국내·외를 막론하고 지금까지 거의 전무한 실정이다. 따라서 본 연구에서는 (FLP&SSOP)에 대한 연구 활성화에 핵심적인 기초연구결과를 확보할 목적으로 먼저 현실적이고 합리적인 가정 하에서 (FLP&SSOP)를 명확히 정의한 후 (FLP&SSOP)에 대한 NLIP 모형을 개발하였으며 이를 지수적으로 많은 변수를 이용하여 좀 더 풀기 쉬운 0-1 LIP 모형으로 재공식화 할 수 있음을 보였다. 또한 (FLP&SSOP)에 대한 0-1 LIP 모형의 선형완화식에 대한 제약식 행렬이 토탈리 유니모듈러가 아님에도 불구하고 극점의 정의를 이용하여 0-1 LIP 모형의 선형완화식이 정수해 성질을 갖는다는 사실을 증명함으로써 열생성기법을 활용하여 최적해를 구할 수 있음을 보였다.

아울러 (FLP&SSOP)에 대한 0-1 LIP 모형을 열생성기법을 활용하여 풀기 위해서는 진입기저변수에 해당하는 열(entering column into the basis)을 찾아야 하며 이는 감소비용(reduced cost)을 계산하는 부분문제를 풀어야 하는데 이를 푸는 효율적인 알고리즘의 개발은 매우 중요한 연구과제 중의 하나로써 이에 대한 연구가 현재 진행 중에 있다. 이를 좀 더 구체적으로 소개하기 위하여 편의상 다음과 같은 열벡터(column vector) A_j(혹은 행벡터(row vector) A_j^T)를 정의한 후 $i\in A_j$는 $a_{ij}=1$을 의미하며 $B_{ij}=\{k\in D(i) \mid i\in A_j \text{ and } k\not\in A_j\}$라고 정의한다.

$$A_j=(c_j, a_{0j}, a_{1j}, \cdots, a_{nj}, b_{11j}, \cdots, b_{m1j}, b_{12j}, \cdots, b_{m2j}, \cdots, b_{1nj}, \cdots, b_{mnj})^T$$

여기서 A_j는 (FLP&SSOP)와 관련된 총비용, 부분나무의 형태, 생산시설의 위치, 부분나무의 루트노드가 수송되어져야 할 생산시설의 위치(즉, 부분나무의 루트노드의 직상위 선행노드를 생산하는 생산시설의 위치) 등에 관한 정보들을 포함한다. 4장에서도 살펴보았듯이 $\bar{l}=l(j)$, $l'=s(j)$가 주어져 있다고 가정할 때 c_j는 식 (10)과 같이 구할 수 있으며 (P)의 제약식 (12), 식 (13)에 대응되는 쌍대변수(dual variables)를 각각 β_i, γ_{li}라고 하면 감소비용 z_j-c_j는 다음과 같은 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} z_j-c_j &= \sum_{i\in N} a_{ij}\beta_i + \sum_{i\in N}\sum_{l\in V} b_{lij}\gamma_{li} - c_j \\ &= \sum_{i\in N} a_{ij}\beta_i + \gamma_{l'r(j)} + \sum_{i\in N}\sum_{k\in B_{ij}} (-1)\gamma_{lk} - c_j \\ &= \sum_{i\in A_j}\Big(\beta_i - \sum_{k\in B_{ij}}\gamma_{lk} - c_{i\bar{l}}\mu - h_{i\bar{l}}\cdot\alpha\sigma\sqrt{SI_i+T_i-S_i}\Big) \\ &\quad + \gamma_{l'r(j)} - b_{r(j)}\mu t^{\bar{l}l'} \end{aligned}$$

그런데 진입기저변수에 해당하는 열은 양의 감소비용을 갖기 때문에 만약 모든 생산시설 l에 대하여 주어진 제반 제약식들을 만족하면서 $\max_j z_j-c_j\le 0$이면 문제 (P)의 현재해(current solution)가 바로 (P)의 최적해(optimal solution)임을 알 수 있지만, 그렇지 않으면 $j^*=\operatorname{argmax}_j z_j-c_j$ 혹은 $z_j-c_j>0$을 만족하는 하나의 열 j를 찾아 이를 문제 (P)에 추가하여 얻어진 새로운 문제를 다시 풀어야 한다. 결국 문제 (P)의 최적해는 $z_j-c_j>0$을 만족하는 열 j가 존재하지 않을 때까지(즉, $\max_j z_j-c_j\le 0$을 만족할 때까지) 계속 반복함으로써 구해지며 이를 효율적으로 구하는 알고리즘 개발에 관한 연구가 현재 진행 중에 있다.

또한 본 연구에서 제시한 (FLP&SSOP) 문제에서는 노동시간, 자본, 생산시설의 생산능력 등과 같은 다양한 제약요인들을 고려하지 않음으로써 이에

대한 0-1 LIP 모형의 선형완화식이 정수해 성질을 갖는다는 사실을 증명할 수 있었던 반면 이러한 제약요인들이 추가된 (FLP&SSOP) 문제에 대한 0-1 LIP 모형의 선형완화식은 일반적으로 정수해 성질을 갖는다는 보장이 없다. 따라서 앞으로 이러한 다양한 형태의 (FLP&SSOP) 문제에 대한 0-1 LIP 모형의 선형완화식이 정수해 성질을 갖는지의 여부에 대한 연구뿐 만 아니라 이를 푸는 효율적인 알고리즘 개발에 관한 연구도 추가적으로 수행되어져야 할 것으로 생각된다.

참 고 문 헌

[1] Balinski, M.L. and P. Wolfe, "On Benders Decomposition and a Plant Location Problem," Working paper ARO-27, Mathematica, Inc., Princeton, New Jersey, 1963.

[2] Barcelo, J. and J. Casanovas, "A Heuristic Lagrangean Algorithm for the Capacitated Plant Location Problem," *European Journal of Operational Research*, Vol.15(1984), pp. 212-226.

[3] Barnhart, C., E.L. Johnson, G.L. Nemhauser, M.W.P. Savelsbergh, P.H. Vance, "Branch-and-price : Column Generation for Solving Huge Integer Programs," *Operations Research*, Vol.46(1998), pp.316-329.

[4] Cho, G., "A Pseudopolynomial-time Algorithm for Solving a Capacitated Subtree of a Tree Problem in a Telecommunication System," *Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers*, Vol.22, No.3(1996), pp.485-498.

[5] Cho, G., "An Efficient Algorithm for an Uncapacitated Facility Location Problem on a Tree Structured Network," *DAEHAN Journal of Business*, Vol.18(1998), pp.97-109.

[6] Conn, A.R. and G. Cornuejols, "A Projection Method for the Uncapacitated Facility Location Problem," CS-87-19, Computer Science Department, University of Waterloo, 1987.

[7] Cornuejols, G. and J.M. Thizy, "Some Facets of the Simple Plant Location Polytope," *Mathematical Programming*, Vol. 23(1982), pp. 50-74.

[8] Graves, S.C. and S.P. Willems, "Optimizing Strategic Safety Stock Placement in Supply Chains," *Manufacturing & Service Operations Management*, Vol.2, No.1(2000), pp. 68-83.

[9] Holmberg, K., M. Rönnqvist, and D. Yuan, "An Exact Algorithm for the Capacitated Facility Location Problems with Single Sourcing," *European Journal of Operational Research*, Vol.113(1999), pp.544-559.

[10] Inderfurth, K., "Safety Stock Optimisation in Multi Stage Inventory Systems," *International Journal of Production Economics*, Vol.24(1991), pp.103-113.

[11] Klincewicz, J. and H. Luss, "A Lagrangian Relaxation Heuristic for Capacitated Facility Location with Single-source Constraints," *Journal of Operational Research Society*, Vol.37(1986), pp.495-500.

[12] Magnanti, T.L. and R.T. Wong, "Accelerated Benders Decomposition : Algorithmic Enhancement and Model Selection Criteria," *Operations Research*, Vol.29(1981), pp.464-484.

[13] Mirchandani, P.B. and R.L. Francis, *Discrete Location Theory*, John Wiley and Sons, Inc. New York, U.S.A, 1990.

[14] Pirkul, H., "Efficient Algorithm for the Capacitated Concentrator Location Problem," *Computers and Operations Research*, Vol.

14(1987), pp.197-208.

[15] Savelsbergh, M., "A Branch-and-Price Algorithm for the Generalized Assignment Problem," *Operations Research*, Vol.45(1997), pp.831-841.

[16] Shaw, D.X., "Reformulation and Column Generation for Several Telecommunication Network Design Problems, Technical Report, School of Industrial Engineering, Purdue University, West Lafayette, IN47907, U.S.A., 1993.

[17] Shen, Z.M., C. Coullard, and M.S. Daskin, "A Joint Location-inventory Model," to appear in *Transportation Science*, 2001.

[18] Simpson, K.F., "In-process Inventories," *Operations Research*, Vol.6(1958), pp.863-873.

[19] Sridharan, R., "A Lagrangian Heuristic for the Capacitated Plant Location Problem with Single Source Constraints," *European Journal of Operational Research*, Vol.66 (1993), pp.305-312.