韓國經營科學會誌
第31권 第1號
2006年 3月

$M/M/c/K$ 대기행렬 시스템의 바쁜 기간 분석*

†임대은** · 채경철**

A Busy Period Analysis for the $M/M/c/K$ Queueing System*

Dae-Eun Lim** · Kyung-Chul Chae**

■ Abstract ■

By defining the partial busy period of the $M/M/c/K$ queueing system as the time interval during which at least one server is in service, we derive the first two moments of both the partial busy period and the number of customers served during it. All expressions are given in explicit forms

Keyword : Multiserver Queue, Finite Queue, Partial Busy Period

1. 서 론

단수 서버 대기행렬 시스템에서는 바쁜 기간(busy period)을 서버가 서비스 중인 기간으로 쉽게 정의할 수 있다. 반면에 복수 서버 대기행렬 시스템에서는 바쁜 기간을 한 가지로 규정할 수 없으나 크게 전체 바쁜 기간(full busy period)와 부분 바쁜 기간(partial busy period)로 나눌 수 있다[1]. 전체 바쁜 기간은 모든 서버가 서비스하는 순간부터 하나의 서버라도 유휴하게 될 때까지의 기간을 의미하고, 후자는 유휴한 시스템에 고객이 한 명 도착하여 서비스를 시작하는 순간부터 처음으로 다시 시스템이 유휴하게 될 때까지의 기간을 의미한다. 본 논문에서는 유한용량 $M/M/c/K$ 대기행렬 시스템의 부분 바쁜 기간을 분석하고자 한다.

기존의 연구 결과들을 살펴볼 때 바쁜 기간 길이의 분포를 제시한 것들은 주로 무한용량 $M/M/c$ 대기행렬 시스템을 분석했다. 일반적으로 $M/M/c$ 대기행렬 시스템의 전체 바쁜 기간의 분포는 서비스율이 $c\mu$인 $M/M/1$ 대기행렬 시스템의 부분 바쁜

논문접수일 : 2005년 8월 10일　　논문게재확정일 : 2006년 3월 3일
* 이 논문은 2004년도 학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음(KRF-2004-015-C00084).
** 한국과학기술원 산업공학과
† 교신저자

기간의 분포와 같음이 알려져 있다. 그런데 $M/M/1$ 대기행렬 시스템의 경우 부분 바쁜 기간의 확률 밀도 함수(probability density function, PDF)는 1차 수정 베셀 함수(the modified Bessel function of the first kind of order 1)의 형태로 나타낼 수 있다. 따라서 서비스율만 바꿔 쓰면 $M/M/c$ 대기행렬 시스템의 전체 바쁜 기간 분포를 쉽게 구할 수 있다. 분포를 제시한 결과들 중 Chaudhry and Templeton [2]의 결과는 방정식 형태로 제시되어 있어 직접 사용이 어렵다. 또 다른 결과들은[8, 9] 전체 바쁜 기간과 관련이 있어 부분 바쁜 기간의 분포는 구할 수 없다. 유한용량 $M/M/c/K$ 대기행렬 시스템에 대해서 Sharma[7]가 부분 바쁜 기간의 길이를 분석했으나 PDF만을 제시했다.

본 연구와 관련이 있는 모멘트를 제시한 결과로는 Natvig[5]가 일반 출생 사멸 대기행렬 시스템(general birth-and-death queueing system)을 분석했다. 그런데 시스템의 상태에 따라 입력률과 서비스율이 달라지는 이 시스템을 다룬 결과는 식을 사용하기가 간단하지 않다. 후에 Daley and Servi[3]는 위 시스템보다 특수한 경우인 무한용량 $M/M/c$ 대기행렬 시스템을 다루었다. 최근의 연구결과로 Artalejo and Lopez-Herrero[1]는 부분 바쁜 기간의 길이와 그동안 서비스 받는 고객수의 n차 모멘트를 얻을 수 있는 식을 발표했으나 무한용량 $M/M/c$ 대기행렬 시스템으로 그 사용이 제한된다.

위에서 언급했듯이 유한용량 $M/M/c/K$ 대기행렬 시스템의 부분 바쁜 기간에 대한 연구는 거의 찾아볼 수 없고, 또한 $M/M/c/K$ 대기행렬 시스템의 부분 바쁜 기간에 관련된 모멘트를 구하는 명시적 형태(explicit form)의 식을 제시한 결과는 (저자가 아는 한)존재하지 않는다. 일찍이 Omahen and Marathe [6, lemma 1]는 k명이 되는 순간부터 $k-1$명이 될 때까지 기간을 라플라스 변환(Laplace-Stieltjes transform, LST)의 순환식(recursive formula) 형태로 제시했다. 이 경우에 $k=1$이면 부분 바쁜 기간을 의미한다. 본 논문에서는 Omahen and Marathe[6]의 접근 방법를 확장하여 $M/M/c$ 대기행렬 시스템보다 일반적인 $M/M/c/K$ 모형의 부분 바쁜 기간의 길이와 그동안 서비스 받는 고객수의 모멘트를 얻을수 있는 명시적 형태의 식을 제시하고자 한다. $M/M/c/K$ 대기행렬 시스템을 분석하는 것은 실제 시스템의 용량이 현실적으로 유한인 경우가 많고, $K \to \infty$를 취하면 $M/M/c$ 모형의 결과를 얻을 수 있으며, 또한 안정하지 않은 시스템, 즉 $\lambda E[S] \geq 1$인 시스템에 대해서도 분석할 수 있는 장점이 있다.

본 논문은 다음과 같이 구성된다. 2장에서는 바쁜 기간 길이의 LST와 그동안 서비스 받는 사람수의 확률생성함수(probability generating function, PGF)를 결합변환(joint transform)형태로 제시한다. 3장, 4장에서는 결합변환을 활용하여 바쁜 기간의 길이와 서비스 받는 사람의 주변변환(marginal transform)을 통해 1, 2차 모멘트를 제시하고, 5장에서는 본 논문을 요약, 정리한다.

2. 바쁜 기간 길이와 서비스 받는 고객수의 결합변환

본 연구에서 분석하는 $M/M/c/K$ 대기행렬 시스템에 대한 가정은 다음과 같다. 서버가 c개인 시스템에 고객은 한 명씩 도착하는데 고객들의 도착과정은 도착률이 λ인 포아송 과정이다. 고객들의 대기 공간은 $(K-c)$개로 유한하고 시스템의 고객수가 K명이 된 후에 도착하는 고객들은 시스템에 들어오지 못하고 재입장하지 않는다(blocked & lost). 고객들의 도착한 순서에 따라 서비스를 받는데 (FIFO), 서비스 시간의 분포는 각각 iid(independent and identically distributed) $\exp(\mu)$를 따르고, 도착과정과 독립이다. 본 연구에서 사용할 기호는 다음과 같다.

- S_k : $k(1 \leq k \leq c)$개 $\exp(\mu)$들의 minimum을 나타내는 확률변수, $S_k \sim \exp(k\mu)$.
- $S_k^*(\theta)$: S_k의 LST
- A : 고객의 도착간격을 나타내는 확률 변수, $A \sim \exp(\lambda)$

B_k : 시스템 내 고객수가 k명이 되는 순간부터 $k-1$명이 될 때까지 기간의 길이를 나타내는 확률변수($1 \le k \le K$)

$B_k^*(\theta)$: B_k의 LST

N_k : B_k동안 서비스를 받고 나가는 고객수를 나타내는 확률변수

$N_k(z)$: N_k의 PGF

$I_k = \min\{A, S_k\}$, $I_k^*(\theta)$: I_k의 LST

$\Omega_k(\theta,z) = E[e^{-\theta B_k} \cdot z^{N_k}]$: B_k의 LST과 N_k의 PGF의 결합변환

a : 제공 로드(offered load) $a = \lambda/\mu$

ρ : 교통 밀도(traffic intensity) $\rho = a/c$

[정리 1] 임의의 k에 대해 B_k와 그동안 서비스 받는 고객수 N_k의 결합 변환은 k의 범위에 따라 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Omega_k(\theta,z) = \begin{cases} zS_k^*(\theta+\lambda-\lambda\Omega_{k+1}(\theta,z)), & 1 \le k \le c-1 \\ zS_c^*(\theta+\lambda-\lambda\Omega_{k+1}(\theta,z)), & c \le k \le K-1 \\ zS_c^*(\theta), & k = K \end{cases} \quad (1)$$

<증명>

(a) $1 \le k \le c-1$

B_k가 시작되면 그 길이와 서비스 받는 고객수는 새로운 고객의 도착 또는 서비스 받는 고객의 이탈 둘 중 먼저 일어나는 사건에 따라 결정된다. 도착이 먼저 일어나면, 즉, 확률 $\frac{\lambda}{\lambda+k\mu}$로 $I_k = A$일 때 B_k는

(i) B_k가 시작돼서 새로운 고객 도착 때까지 진행된 기간(I_k)

(ii) 고객이 $k+1$명에서 다시 k명이 될 때까지의 기간(B_{k+1})

(iii) 다시 k명이 된 순간부터 $k-1$명이 될 때까지의 기간(B_k')의 합으로 구성된다.

B_k동안 서비스 받고 나간 고객수는 기간 (i)에서 0명, 기간 (ii)에서는 N_{k+1}명, (iii)에서 N_k'명으로 구성되므로 $N_k = 0 + N_{k+1} + N_k'$이다.

반면, 확률 $\frac{k\mu}{\lambda+k\mu}$로 $I_k = S_k$이면 B_k는 B_k가 시작되어 서비스가 끝날 때까지 진행된 기간(I_k)이고, 서비스 받고 나간 고객수는 한 명($N_k = 1$)이다. 따라서, B_k가 시작된 후 먼저 일어나는 사건에 조건을 걸어 결합변환 $\Omega_k(\theta,z)$을 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
&\Omega_k(\theta,z) \\
&= \Omega_k(\theta,z|I_k = A)\Pr(I_k = A) \\
&\quad + \Omega_k(\theta,z|I_k = S_k)\Pr(I_k = S_k) \\
&= E\left[e^{-\theta(I_k+B_{k+1}+B_k')}z^{(0+N_{k+1}+N_k')}\middle|I_k = A\right]\Pr(I_k = A) \\
&\quad + E\left[e^{-\theta I_k}z^1\middle|I_k = S_k\right]\Pr(I_k = S_k) \\
&= \frac{\lambda}{\lambda+k\mu}\frac{\lambda+k\mu}{\theta+\lambda+k\mu}\Omega_{k+1}(\theta,z)\Omega_k(\theta,z) \\
&\quad + \frac{k\mu}{\lambda+k\mu}\frac{\lambda+k\mu}{\theta+\lambda+k\mu}z
\end{aligned}$$

($\because B_k$와 B_k', N_k와 N_k'은 각각 iid이고, I_k는 A, S_k 중 어느 것이 min인지에 상관없이 분포가 같음)

위 식을 $\Omega_k(\theta,z)$에 대해 정리하면 다음과 같다.

$$\Omega_k(\theta,z) = z\frac{k\mu}{\theta+\lambda+k\mu-\lambda\Omega_{k+1}(\theta,z)}$$

$S_k^*(\theta) = \frac{k\mu}{\theta+k\mu}$이므로 Omahen and Marathe[6]의 lemma 1을 이용하면 $\Omega_k(\theta,z) = zS_k^*(\theta+\lambda-\lambda\Omega_{k+1}(\theta,z))$ 얻을 수 있다.

(b) $c \le k \le K-1$

(i)과 같은 방법을 적용할 수 있는데 이 경우에는 모든 서버가 서비스 중이므로 $k\mu$대신 $c\mu$를 대입한다.

(c) $k = K$

$B_K = S_c$이고, B_K가 얼마나 지속되는 가에 관계없이 서비스 받고 나가는 고객수는 1명이다. 즉, $E[e^{-\theta B_K} \cdot z^{N_K}] = zE[e^{-\theta S_c}]$이므로 $\Omega_K(\theta,z) = zS_c^*(\theta)$이 된다.

결합 변환에 $\theta=0$또는 $z=1$을 대입하여 얻는 주변 변환을 각각 $N_k(z)$, $B_k^*(\theta)$라 하면 각각 B_k 동안 서비스 받고 나가는 고객수의 PGF와 그 기간 길이의 LST를 나타낸다.

[비고 1] [정리 1]은 다음과 같이 직관적인 방법으로도 증명이 가능하다. 먼저 식 (1)에서 $1 \le k \le c-1$인 경우에 다음과 같이 서비스 순서를 바꿔 보자. B_k가 시작하여 한 명이 감소할 때까지의 시간은 S_k이다. S_k도중에 첫 고객 C_1이 도착한다고 하자. 이때 S_k를 중단하고 한 명이 증가했으므로 B_{k+1}을 시작한다. 그리고 B_{k+1}가 끝나면 중단되었던 S_k를 계속 진행한다. 이런 과정을 반복하여 S_k가 결국 종료되면 B_k가 끝나게 된다. 도착과정이 포아송이므로 위 과정은 다음과 같다. 먼저 S_k만큼 서비스를 하고 도중에 도착하는 고객(특별 고객)을 일단 상자에 넣어둔다고 하자. S_k가 종료된 뒤 도착한 특별 고객 중 한 명을 꺼내어 서비스를 시작하면 B_{k+1}이 시작하게 된다. 모든 특별 고객에 대해 이를 적용할 수 있으므로 S_k와 그동안 도착하는 고객수의 결합 변환인 $S_k^*(\theta+\lambda-\lambda z)$에서 z 대신 $\Omega_{k+1}(\theta,z)$를 대입한다. 그리고 S_k의 종료점에서 1명이 서비스 받고 이탈했으므로 z를 곱해준다. $c \le k \le K-1$인 경우는 k에 관계없이 S_c를 적용하고, $k=K$의 경우에는 [정리 1]의 증명 내용과 같다.

3. B_k의 모멘트

식 (1)의 양변에 $z=1$을 대입하여 B_k에 관한 주변 변환을 얻으면 k의 범위에 따라 다음과 같다.

$$B_k^*(\theta) = S_k^*\left(\theta+\lambda-\lambda B_{k+1}^*(\theta)\right) \quad ,1 \le k \le c-1 \qquad (2.a)$$

$$B_k^*(\theta) = S_c^*\left(\theta+\lambda-\lambda B_{k+1}^*(\theta)\right) \quad ,c \le k \le K-1 \qquad (2.b)$$

$$B_K^*(\theta) = S_c^*(\theta) \quad ,k=K \qquad (2.c)$$

식 (2.a)~(2.c)의 1, 2계 도함수를 구해 $\theta=0$을 대입하면 B_k의 1, 2차 모멘트를 얻을 수 있다. 수식 표현의 편의를 위해 1차 모멘트와 2차 모멘트일 때로 나누어 분석해보자.

3.1 B_k의 1차 모멘트

식 (2.a)~(2.c)의 1차 모멘트는 다음과 같다.

$$E[B_k] = E[S_k] \times (1+\lambda E[B_{k+1}]) \quad ,1 \le k \le c-1 \qquad (3.a)$$

$$E[B_k] = E[S_c] \times (1+\lambda E[B_{k+1}]) \quad ,c \le k \le K-1 \qquad (3.b)$$

$$E[B_K] = \frac{1}{c\mu} \quad ,k=K \qquad (3.c)$$

위와 같이 임의의 $k(<K)$에 대해 $E[B_k]$를 얻으려면 연쇄적으로 $k=K$가 될 때까지 항이 늘어나는 형태이다. $c \le k \le K-1$에서는 곱하는 항이 $E[S_c]$로 일정한 것과 $E[B_K] = \frac{1}{c\mu}$를 이용하여 먼저 $E[B_c]$를 구해보면 다음과 같이 표현할 수 있다(부록 A 참조).

$$E[B_c] = \frac{1}{c\mu}\left(\frac{1-\rho^{K-c+1}}{1-\rho}\right) \qquad (4)$$

이를 이용하여 $1 \le k \le c-1$의 식 (3.a)의 우변을 $k=c-1$까지 전개한 후 식 (4)를 대입하면 $E[B_k]$를 얻을 수 있다. 따라서 임의의 $k(1 \le k \le K)$에 대한 결과는 다음과 같다.

$$E[B_k] = \frac{1}{k\mu}\left(\Sigma_{i=0}^{c-k-1} a^i \frac{k!}{(k+i)!} + a^{c-k-1}\frac{k!}{(c-1)!}\frac{1-\rho^{K-c+1}}{1-\rho}\rho\right) \quad ,1 \le k \le c-1 \qquad (5.a)$$

$$E[B_k] = \frac{1}{c\mu}\left(\frac{1-\rho^{K-k+1}}{1-\rho}\right) \quad ,c \le k \le K-1 \qquad (5.b)$$

$$E[B_K] = \frac{1}{c\mu} \quad ,k=K \qquad (5.c)$$

[비고 2] $M/M/c$ 모형에서는, 즉 $K=\infty$이면 시스템이 안정적일 때$(\rho<1)$ $k \ge c$이면 식 (4)는 $E[B_c] = E[S_c](1+\lambda E[S_c]+(\lambda E[S_c])^2+\cdots) = \frac{1}{c\mu(1-\rho)}$이 된다. 이는 $M/M/c$ 모형의 전체 바쁜 기간은 서비스율이 $c\mu$인 $M/M/1$ 모형의 전체 바쁜 기간과 같다는 알려진 결과와 같다.

3.2 B_k의 2차 모멘트

식 (2.a)~(2.c)의 2계 도함수를 구하고 $\theta=0$을 대입하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$E[B_k^2] = E[S_k^2](1+\lambda E[B_{k+1}])^2 + \lambda E[S_k]E[B_{k+1}^2] \quad ,1 \le k \le c-1 \qquad (6.a)$$

$$E[B_k^2] = E[S_c^2](1+\lambda E[B_{k+1}])^2 + \lambda E[S_c]E[B_{k+1}^2] \quad ,c \le k \le K-1 \qquad (6.b)$$

$$E[B_k^2] = \frac{2}{(c\mu)^2} \quad ,k=K \qquad (6.c)$$

식 (6.a), (6.b)에 $1+\lambda E[B_{k+1}] = \frac{E[B_k]}{E[S_k]}$과 $E[S_k^n] = \frac{\Gamma(k+1)}{(k\mu)^n}$[4]를 이용하면 다음 결과들을 얻을 수 있다.

$$E[B_k^2] = 2E[B_k]^2 + \lambda E[S_k]E[B_{k+1}^2] \quad ,1 \le k \le c-1 \quad (7.a)$$

$$\begin{aligned} E[B_k^2] &= 2E[B_k]^2 + \lambda E[S_c]E[B_{k+1}^2] \\ &= 2E[B_k]^2 + \rho E[B_{k+1}^2] \quad ,c \le k \le K-1 \quad (7.b) \end{aligned}$$

$$E[B_k^2] = \frac{2}{(c\mu)^2} \quad ,k=K \qquad (7.c)$$

1차 모멘트를 구할 때와 같은 방법으로 다음을 얻을 수 있다(부록 B 참조).

$$\begin{aligned} E[B_k^2] = 2\Big\{&\Sigma_{i=0}^{c-k-1} E[B_{k+i}]^2 \frac{(k-1)!}{(k-1+i)!} a^i \\ &+ a^{c-k}\frac{(k-1)!}{(c-1)!}\left(\Sigma_{i=0}^{K-c-1} \rho^i E[B_{c+i}]^2 + \frac{\rho^{K-c}}{(c\mu)^2}\right)\Big\} \\ &,1 \le k \le c-1 \qquad (8.a) \end{aligned}$$

$$E[B_k^2] = 2\left[\Sigma_{i=0}^{K-k-1} \rho^i E[B_{k+i}]^2 + \frac{\rho^{K-k}}{(c\mu)^2}\right] \quad ,c \le k \le K-1 \qquad (8.b)$$

3.3 부분 바쁜 기간의 모멘트

고객수가 k명이 되는 순간부터 고객수가 0명이 될 때까지(유휴하게 될 때까지) 기간의 길이를 나타내는 확률 변수를 Φ_k($\Phi_k^*(\theta)$는 Φ_k의 LST)라고 두면 $\Phi_k = \Sigma_{i=1}^k B_i$, $\Phi_k^*(\theta) = \Pi_{i=1}^k B_i^*(\theta)$가 된다. 이 식에 $k=1$을 대입하면 부분 바쁜 기간의 모멘트를 얻을 수 있다.

Φ_k의 1, 2차 모멘트는 식 (5.a)와 (8.a)를 이용하면 다음 식을 얻을 수 있다($c \ge 2$).

$$\frac{d}{d\theta}\Phi_k^*(\theta)\Big|_{\theta=0} = E[B_k] + \cdots + E[B_1]$$

$$\begin{aligned} E[\Phi_k] = \Sigma_{j=1}^k \frac{1}{j\mu}\Big\{&\Sigma_{i=0}^{c-j-1} a^i \frac{j!}{(j+i)!} \\ &+ a^{c-j-1}\frac{j!}{(c-1)!}\frac{1-\rho^{K-c+1}}{1-\rho}\rho\Big\} \\ &,1 \le k \le c-1 \quad (9.a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[\Phi_k] = \Sigma_{j=1}^{c-1} \frac{1}{j\mu}\Big\{&\Sigma_{i=0}^{c-j-1} a^i \frac{j!}{(j+i)!} \\ &+ a^{c-j-1}\frac{j!}{(c-1)!}\frac{1-\rho^{K-c+1}}{1-\rho}\rho\Big\} \\ &+ \Sigma_{j=c}^k \frac{1}{c\mu}\left(\frac{1-\rho^{K-j+1}}{1-\rho}\right) \quad ,c \le k \le K-1 \quad (9.b) \end{aligned}$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\Phi_k^*(\theta)\Big|_{\theta=0} = \Sigma_{i=1}^k E[B_i^2] + 2\Sigma_{i=1}^k \Sigma_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^k E[B_i]E[B_j]$$

$$\begin{aligned} E[\Phi_k^2] = &2\Sigma_{i=1}^k \Sigma_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^k E[B_i]E[B_j] \\ &+ 2\Big[\Sigma_{j=1}^k \Sigma_{i=0}^{c-j-1} E[B_{j+i}]^2 \frac{(j-1)!}{(j-1+i)!} a^i \\ &+ \Sigma_{j=1}^k \Big\{a^{c-j}\frac{(j-1)!}{(c-1)!}\left(\Sigma_{i=0}^{K-c-1}\rho^i E[B_{c+i}]^2 + \frac{\rho^{K-c}}{(c\mu)^2}\right)\Big\}\Big] \\ &,1 \le k \le c-1 \qquad (10.a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[\Phi_k^2] = &2\Sigma_{i=1}^{c-1} \Sigma_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^{c-1} E[B_i]E[B_j] \\ &+ 2\Big[\Sigma_{j=1}^{c-1} \Sigma_{i=0}^{c-j-1} E[B_{j+i}]^2 \frac{(j-1)!}{(j-1+i)!} a^i \\ &+ \Sigma_{j=1}^{c-1} \Big\{a^{c-j}\frac{(j-1)!}{(c-1)!}\left(\Sigma_{i=0}^{K-c-1}\rho^i E[B_{c+i}]^2 + \frac{\rho^{K-c}}{(c\mu)^2}\right)\Big\}\Big] \\ &+ 2\left(\Sigma_{j=c}^k \Sigma_{i=0}^{K-j-1}\rho^i E[B_{c+i}]^2 + \frac{\rho^{K-j}}{(c\mu)^2}\right) \\ &,c \le k \le K-1 \qquad (10.b) \end{aligned}$$

[비고 3] 식 (9.a)~(10.b)은 복수 서버($c \ge 2$)를 가정해서 $c=1$일 때는 성립하지 않으므로, $c=1$일 때는 식(5.b), (8.b)를 이용해야한다. 예로 $M/M/1/K$ 부분 바쁜 기간의 1차 모멘트는 식 (5.b)에서 $E[B_1] = \frac{1}{\mu}\left(\frac{1-\rho^K}{1-\rho}\right)$이고 $K \to \infty$이면 $\frac{1}{\mu-\lambda}$가 되어 $M/M/1$의 결과[2, appendix A]와 일치한다.

4. N_k의 계승 적률

식 (1)의 양변에 $\theta=0$을 대입하여 B_k 동안 서비스 받는 고객수에 관한 주변 변환을 얻으면 k의 범위에 따라 다음과 같다.

$$N_k(z)=zS_k^*(\lambda-\lambda N_{k+1}(z)) \qquad ,1\le k\le c-1 \qquad (11.a)$$

$$N_k(z)=zS_c^*(\lambda-\lambda N_{k+1}(z)) \qquad ,c\le k\le K-1 \qquad (11.b)$$

$$N_k(z)=z \qquad ,k=K \qquad (11.c)$$

B_k 길이의 모멘트를 구할 때와 마찬가지로 계승 적률(factorial moment)을 1, 2차로 나누어 구한다.

4.1 N_k의 1차 계승 적률

식 (11.a)~(11.c)의 1계 도함수를 구해 $z=1$을 대입하면 k의 범위에 따라 다음 식들을 얻는다.

$$E[N_k]=1+\lambda E[S_k]E[N_{k+1}] \qquad ,1\le k\le c-1 \qquad (12.a)$$

$$E[N_k]=1+\lambda E[S_c]E[N_{k+1}] \qquad ,c\le k\le K-1 \qquad (12.b)$$

$$E[N_k]=1 \qquad ,k=K \qquad (12.c)$$

B_k 길이의 모멘트를 얻을 때와 같은 방법을 사용하면 임의의 $k(1\le k\le K-1)$에 따라 다음 결과를 얻을 수 있다(동일한 방법이므로 과정 생략).

$$E[N_k]=\Sigma_{i=0}^{c-k-1}\frac{(k-1)!}{(k+i-1)!}a^i+\frac{(k-1)!}{(c-1)!}a^{c-k}\times\frac{1-\rho^{K-c+1}}{1-\rho} \qquad ,1\le k\le c-1 \qquad (13.a)$$

$$E[N_k]=\frac{1-\rho^{K-k+1}}{1-\rho} \qquad ,c\le k\le K-1 \qquad (13.b)$$

4.2 N_k의 2차 계승 적률

먼저, 식 (12.a)의 2계 도함수를 구해 $z=1$을 대입하면,

$$E[N_k(N_k-1)]=2\lambda E[S_k]E[N_{k+1}]+\lambda^2E[S_k^2]E[N_{k+1}]^2+\lambda E[S_k]E[N_{k+1}(N_{k+1}-1)]$$

이 때 $\frac{E[S_k^2]}{E[S_k]^2}=2$와 $E[N_k]-1=\lambda E[S_k]E[N_{k+1}]$임을 이용하면,

$$\begin{aligned}E[N_k(N_k-1)]&=2\{(E[N_k]-1)+(\lambda E[S_k]E[N_{k+1}])^2\}\\&\quad+\lambda E[S_k]E[N_{k+1}(N_{k+1}-1)]\\&=2E[N_k](E[N_k]-1)+\lambda E[S_k]E[N_{k+1}^2]\end{aligned}$$

$N_k^d=E[N_k]^2-E[N_k]$이라 놓으면 다음을 얻을 수 있다.

$$E[N_k(N_k-1)]=2N_k^d+\lambda E[S_k]E[N_{k+1}(N_{k+1}-1)]$$

위 식은 B_k 길이의 2차 모멘트에서 등장한 식과 같은 형태이므로 $E[B_k]^2$를 N_k^d로 바꾸기만 하면 같은 식을 그대로 이용할 수 있다. 같은 방법으로 $c\le k\le K-1$에 대해서는 $E[N_k(N_k-1)]=2N_k^d+\lambda E[S_c]E[N_{k+1}^2]$가 된다. $k=K$인 $E[N_K(N_K-1)]=0$이므로 $E[N_c(N_c-1)]=2\Sigma_{i=0}^{K-c-1}\rho^iN_{k+i}^d$을 얻는다. 따라서, 임의의 $k(<K)$에 대해 2차 계승 적률을 구하는 식은 다음과 같다.

$$E[N_k(N_k-1)]=2\left\{\Sigma_{i=0}^{c-k-1}N_{k+i}^d\frac{(k-1)!}{(k-1+i)!}a^i+a^{c-k}\frac{(k-1)!}{(c-1)!}\left(\Sigma_{i=0}^{K-c-1}\rho^iN_{c+i}\right)\right\} \qquad ,1\le k\le c-1 \qquad (14.a)$$

$$E[N_k(N_k-1)]=2\Sigma_{i=0}^{K-k-1}\rho^iN_{k+i}^d \qquad ,c\le k\le K-1 \qquad (14.b)$$

4.3 부분 바쁜 기간 동안 서비스 받는 고객수의 계승 적률

고객수가 k명이 되는 순간부터 0명이 될 때까지 서비스 받고 나가는 고객수를 Γ_k(PGF는 $\Gamma_k(z)$)라고 하면 $\Gamma_k=\Sigma_{i=1}^kN_i$이고, $\Gamma_k(z)=\Pi_{i=1}^kN_i(z)$가 된다. Γ_k의 1, 2차 계승 적률은 다음과 같고 $k=1$을 대입하면 부분 바쁜 기간에 관한 식을 얻을 수 있다 $(c\ge2)$.

$$E[\Gamma_k] = \Sigma_{j=1}^{k}\left\{\left(\Sigma_{i=0}^{c-j-1}\frac{(j-1)!}{(j+i-1)!}a^i\right) + a^{c-j}\frac{(j-1)!}{(c-1)!}\frac{1-\rho^{K-c-1}}{1-\rho}\right\}, 1 \le k \le c-1 \quad (15.a)$$

$$E[\Gamma_k] = \Sigma_{j=1}^{c-1}\left\{\left(\Sigma_{i=0}^{c-j-1}\frac{(j-1)!}{(j+i-1)!}a^i\right) + a^{c-j}\frac{(j-1)!}{(c-1)!}\frac{1-\rho^{K-c-1}}{1-\rho}\right\} + \Sigma_{j=c}^{k}\frac{1-\rho^{K-j+1}}{1-\rho}, c \le k \le K-1 \quad (15.b)$$

$$E[\Gamma_k(\Gamma_k-1)] = 2\Sigma_{i=1}^{k}\Sigma_{\substack{j=1 \\ i\ne j}}^{k}E[N_i]E[N_j] + 2\Sigma_{j=1}^{k}\left\{\Sigma_{i=0}^{c-j-1}N_{j+i}^{d}\frac{(j-1)!}{(j-1+i)!}a^i + a^{c-j}\frac{(j-1)!}{(c-1)!}\left(\Sigma_{i=0}^{K-c-1}\rho^i N_{c+i}\right)\right\}, 1 \le k \le c-1 \quad (16.a)$$

$$E[\Gamma_k(\Gamma_k-1)] = 2\Sigma_{i=1}^{c-1}\Sigma_{\substack{j=1 \\ i\ne j}}^{c-1}E[N_i]E[N_j] + 2\Sigma_{j=1}^{c-1}\left\{\Sigma_{i=0}^{c-j-1}N_{j+i}^{d}\frac{(j-1)!}{(j-1+i)!}a^i + a^{c-j}\frac{(j-1)!}{(c-1)!}\left(\Sigma_{i=0}^{K-c-1}\rho^i N_{c+i}\right)\right\} + 2\Sigma_{j=c}^{k}\Sigma_{i=0}^{K-j-1}\rho^i N_{c+i}^{d}, c \le k \le K-1 \quad (16.b)$$

5. 결 론

본 논문에서는 $M/M/c/K$ 대기행렬 시스템에서 임의의 서버 개수 c에 대해 임의의 고객수 k명으로 시작해서 시스템이 유휴해질 때까지의 기간과 그동안 서비스 받는 고객수의 1, 2차 모멘트를 얻을 수 있는 식을 제시했고, 이를 이용해서 부분 바쁜 기간의 길이와 서비스받는 고객수의 1, 2차 모멘트를 얻을 수 있는 명시적인 식을 제시했다. 순환식 형태를 이용하는 본 논문의 방법으로 3차 이상의 모멘트를 얻는 것이 불가능하지는 않으나 식이 복잡해져 명시적 형태로 식을 쓰기 어렵다. 그러나 컴퓨터를 이용하면 충분히 가능하리라 예상한다. 또한, 본 방법은 일반적 도착과정을 갖는 대기 행렬 시스템에도 적용될 수 있을 것으로 사료된다.

감사의 글

[정리 1]에 대한 직관적인 증명([비고 1] 참조)을 제시해 주신 심사위원께 감사드립니다.

참 고 문 헌

[1] Artalejo, J.R. and M.J. Lopez-Herroro, "Analysis of the Busy Period for the $M/M/c$ Queue : An Algorithmic Approach," *Journal of Applied Probability*, Vol.38(2001), pp. 209-222.

[2] Chaudhry, M.L. and J.G.C. Templeton, "A Note on the Distribution of a Busy Period for $M/M/c$ Queueing System," *Math. Oper. Stat.*, Vol.4(1973), pp.75-79.

[3] Daley, D.J. and L.D. Servi, "Idle and Busy Periods in Stable $M/M/k$ Queues," *Journal of Applied Probability*, Vol.35(1998), pp. 950-962

[4] Mood, A.M., F.A. Graybill, and D.C. Boes, *Introduction to the theory of statistics (Third Edition)*, McGraw-Hill.

[5] Natvig, B., "On the Waiting-Time and Busy Period Distributions for a General Birth-and-Death Queueing Model," *Journal of Applied Probability*, Vol.12(1975), pp.524-532.

[6] Omahen, K. and V. Marathe, "Analysis and Applications of the Delay Cycle for the $M/M/c$ Queueing System," *Journal of the Association for Computing Machinery*, Vol. 25, No.2(1978), pp.283-303.

[7] Sharma, O.P., *Markovian Queues*, Ellis Horwood, New York, 1990.

[8] Sharma, O.P. and A.M.K Tarabia, "On the Busy Period of a Multichannel Markovian Queue," *Stochastic Analysis and Applications*, Vol.18, No.5(2000), pp.859-869.

[9] Tarabia, A.M.K., "A New Formula for the Busy Period of a Non-empty Multiserver Queueing System," *Applied Mathematics and Computation*, Vol.143(2003), pp.401-408.

〈부록〉 A : B_k의 1차 모멘트 유도

식 (3.b)을 이용하면 임의의 $k(c \le k \le K-1)$에 대해 다음이 성립한다.

$$E[B_k] = E[S_c]\left(1 + \lambda E[S_c] + (\lambda E[S_c])^2 + \cdots + (\lambda E[S_c])^{K-k-1} + \lambda^{K-k} E[S_c]^{K-k-1} E[B_K]\right)$$

$E[B_K] = E[S_c]$를 이용하고 위 식에 $k=c$를 대입하면 다음을 얻을 수 있다.

$$E[B_c] = \frac{1}{c\mu}\left(\frac{1-\rho^{K-c+1}}{1-\rho}\right)$$

$k(1 \le k \le c-1)$의 경우를 살펴보면

$$\begin{aligned} E[B_k] &= E[S_k]\left(1 + \lambda E[S_{k+1}] + \lambda^2 E[S_{k+1}]E[S_{k+2}] + \cdots + \lambda^{c-k-1} E[S_{k+1}] \times \cdots \times E[S_{c-1}]\lambda E[B_c]\right) \\ &= E[S_k]\left(1 + \frac{\lambda}{k+1} + \frac{\lambda^2}{(k+1)(k+2)} + \cdots + \frac{\lambda^{c-k-1}}{(k+1)\cdots(c-1)} + \frac{\lambda^{c-k-1}}{(k+1)\cdots(c-1)}\lambda E[B_c]\right) \\ &= \frac{1}{k\mu}\left(\Sigma_{i=0}^{c-k-1} a^i \frac{k!}{(k+i)!} + a^{c-k-1}\frac{k!}{(c-1)!}\lambda E[B_c]\right) \end{aligned}$$

위 식에 $E[B_c]$ 결과를 대입하면 다음을 얻을 수 있다$(1 \le k \le c-1)$.

$$\begin{aligned} E[B_k] &= \frac{1}{k\mu}\left(\Sigma_{i=0}^{c-k-1} a^i \frac{k!}{(k+i)!} + a^{c-k-1}\frac{k!}{(c-1)!}\frac{\lambda}{c\mu}\left(\frac{1-\rho^{K-c+1}}{1-\rho}\right)\right) \\ \therefore E[B_k] &= \frac{1}{k\mu}\left(\Sigma_{i=0}^{c-k-1} a^i \frac{k!}{(k+i)!} + a^{c-k-1}\frac{k!}{(c-1)!}\frac{1-\rho^{K-c+1}}{1-\rho}\rho\right) \end{aligned}$$

〈부록〉 B : B_k의 2차 모멘트 유도

식 (7.b)를 전개하면,

$$E[B_k^2] = 2\left(E[B_k]^2 + \rho E[B_{k+1}]^2 + \cdots + \rho^{K-k-1}E[B_{K-1}]^2\right) + \rho^{K-k}E[B_K^2] = 2\Sigma_{i=0}^{K-k-1}\rho^i E[B_{k+i}]^2 + \rho^{K-k}E[B_K^2]$$

$E[B_K^2] = \frac{2}{(c\mu)^2}$이므로, 위 식에 $k=c$를 대입하면 $E[B_c^2]$는 다음과 같다.

$$E[B_c^2] = 2\left[\Sigma_{i=0}^{K-c-1}\rho^i E[B_{c+i}]^2 + \frac{\rho^{K-c}}{(c\mu)^2}\right]$$

식 (7.a)을 $k=c-1$까지 전개하면,

$$\begin{aligned} E[B_k^2] &= 2E[B_k]^2 + \lambda E[S_k]E[B_{k+1}^2] \\ &= 2\left[E[B_k]^2 + \lambda E[S_k]E[B_{k+1}]^2 + \cdots + \lambda^{c-k-1}E[S_k] \times \cdots \times E[S_{c-2}]E[B_{c-1}]^2\right] + \lambda^{c-k}E[B_c^2]\Pi_{i=k}^{c-1}E[S_i] \\ &= 2\left(\Sigma_{i=0}^{c-k-1}E[B_{k+i}]^2\frac{a^i(k-1)!}{(k-1+i)!}\right) + a^{c-k}\frac{(k-1)!}{(c-1)!}E[B_c^2] \end{aligned}$$

위 식에 $E[B_c^2]$를 대입하면 다음 식을 얻는다.

$$\therefore E[B_k^2] = 2\left\{\Sigma_{i=0}^{c-k-1}E[B_{k+i}]^2\frac{(k-1)!}{(k-1+i)!}a^i + a^{c-k}\frac{(k-1)!}{(c-1)!}\left(\Sigma_{i=0}^{K-c-1}\rho^i E[B_{c+i}]^2 + \frac{\rho^{K-c}}{(c\mu)^2}\right)\right\}$$