

삼각형 배경 요소를 이용한 새로운 사각형 요소망 생성법

권기연*, 박정민**, 이병채*, 채수원***

A New Indirect Quadrilateral Mesh Generation Scheme from Background Triangular Mesh

Kwon, K. Y.*, Park, J. M.**, Lee, B. C.* and Chae, S. W.***

ABSTRACT

A new quadrilateral mesh generation technique from an existing triangle mesh is proposed in this paper. The proposed method is based on advancing front method and zero-thickness layer. Beginning with an initial triangular mesh, boundary triangular elements are removed and quadrilateral elements with zero thickness are generated. A quality of quadrilateral elements is improved during a mesh smoothing process. Until all initial triangular elements are removed, this procedure is repeated. Sample meshes are constructed to demonstrate the mesh generation capability of proposed algorithm.

Key words: Quadrilateral mesh, Zero-thickness layer, Advancing front method, Smoothing, Surface meshing, Indirect Method

1. 서 론

사각형 요소는 삼각형 요소에 비해 더 정확한 해석 결과를 얻을 수 있어 곡면 형상 유한 요소 모델링에 주로 이용된다. 또한 이를 이용하여 육면체 요소망을 생성시킬 수 있다. 사각형 요소망 생성 기법은 CAD 데이터를 이용하여 직접 요소망을 생성시키는 것(direct method)^[1-6]과 삼각형 요소를 배경으로 이용해서 생성시키는 것(indirect method)^[7-14]이 있다. 전자는 곡면의 경계에 생성된 절점을 2차원으로 투영시킨 후 평면에서 요소망을 생성시키고, 다시 원래의 곡면으로 요소를 변환시키는 것이다. 주요 방법은 외부에서 내부로 요소망을 생성해 나가는 전진경계기법^[1-3]과 영역을 분할하여 오퍼레이터를 적용시켜 요소망을 생성해나가는 영역 분할법^[4-6]이 있다. 이 방법들은 3차원 형상과 투영된 2차원 형상이 유사할 경우에는 양질의 요소를 생성시킬 수 있지만 심하게 왜곡될 경우에는

요소의 품질이 매우 떨어질 수 있다. 후자는 곡면을 표현하는 삼각형 요소를 변환시켜 사각형 요소를 생성하는 것으로 입력데이터가 단순하고, 2차원으로 변환시킬 필요가 없다. 그러나 요소망 생성이 3차원에서 진행되므로 요소 평활화 과정에서 원래의 곡면 형상으로 이동된 절점을 투영시키는 것이 추가적으로 필요하다. 후자는 간접 접근법으로 이는 역공학(reverse engineering)을 이용하여 형상의 점 데이터를 추출하여 얻어진 삼각형 요소를 사각형 요소로 변환시키는 방법으로 활용될 수 있다. 또한 CAD데이터가 삼각형으로 표현되는 STL 형식으로 표현될 때 이를 직접 사각형 요소로 변환시킬 수 있다.

삼각형 배경 요소를 이용하는 사각형 요소망 생성법은 Lo^[7]에 의해 처음으로 제안되었으며 이후 많은 연구가 이루어졌다. 대표적인 방법은 Lee 등^[8]이 제안한 SMT(systemic merging technique) 방법, Shimada 등^[9]이 제안한 버블패킹 방법과 Owen 등^[12]이 제안한 Q-Morph 방법이 있다. 최근에는 Lee 등^[13,14]이 SMT 방법과 Q-Morph 방법을 확장시켜 이방성 요소망 생성(anisotropic mesh generation)에 이용하였다. 이런 방법들은 초기에 이용하는 삼각형 요소에 의해 생성되는 사각형 요소의 품질 및 밀도가 어느 정도 좌우된

*한국과학기술원 기계공학과

**학성회원, 한국과학기술원 기계공학과

***중신회원, 고려대학교 기계공학과

- 논문투고일: 2005. 07. 07

- 심사완료일: 2005. 11. 08

다. 본 연구에서는 배경 삼각형 요소의 품질에 관계없이 우수한 품질의 사각형 요소를 생성시킬 수 있는 새로운 방법을 제시하고자 한다. 이를 위해 무두께 요소층(zero thickness layer)^{13,16}과 외부에서 내부로 요소망을 생성해 나가는 전진경계법을 이용하였다. 무두께 요소층은 Lcc¹³에 의해 제안된 방법으로 경계에 두께가 0인 사각형 요소층을 생성한 후 평활화에 의해 요소 품질을 개선하는 것이다.

2. 개 요

삼각형 요소를 배경으로 사각형 요소를 새롭게 생성시키기 위해 본 논문에서는 다음과 같은 방법을 이용한다. 기본적인 방법은 기존의 연구인 SMI와 Q-Morph 방법과 동일하게 경계에서부터 삼각형 요소를 사각형 요소로 변환시키면서 내부로 요소망 생성이 진행되는 전진경계 기법이다. 아래 단계에서 평활화 단계를 제외하고는 생성된 사각형 요소는 작업에 포함되지 않는다.

1. 요소 에지의 절점이 경계에 한 개가 존재하도록 변경한다(Fig. 1(a)→Fig. 1(b)). 내부에 있는 요소 에지 중에서 두 절점이 모두 경계에 있는 경우 한 절점 만이 경계에 있도록 수정한다.
2. 경계에 한 절점이 존재하는 요소에지를 제거한다(Fig. 1(c)). 요소 에지 중에서 경계에 한 절점이 존재하고, 내부에 한 절점이 존재하는 것을 제거한다. 이 경우 내부에 존재하는 절점은 경계로 이동되고, 요소 에지의 두 절점을 참조하는 삼각형 요소는 제거된다.
3. 전방 에지(front edge)를 업데이트 한다(Fig. 1(d)). 두 절점이 모두 경계에 있는 것은 사각형 요소망 생성에 이용되는 에지이며, 이를 전방 에지로 분류한다. 그리고 전방 에지의 절점에 인접한 에지와 이루는 각도를 계산한다.
4. 두께가 0인 사각형 요소층을 생성한다(Fig. 1(e)). 전방 에지의 절점이 이루는 각도에 따라 타입을 분류하여 사각형 요소를 생성한다. 사각형 요소 생성시에는 새로운 절점이 생성되며 이웃한 전방 에지에서 사각형 요소가 생성된 경우이면 절점을 새롭게 생성시키는 것이 아니라 이미 생성된 절점을 참조하도록 해야 한다.
5. 평활화 작업을 수행한다(Fig. 1(f)). 절점의 주변 요소 정보를 생성하여 평활화를 수행한다. 삼각형 요소 보다는 사각형 요소의 품질에 초점을 맞추

어 평활화가 이루어지도록 해야 한다.

6. 삼각형 요소가 모두 제거될 때까지 1~5작업을 반복 수행한다

작업이 이루어지지 않은 삼각형 요소가 존재하면 단계 1~5작업을 반복해서 수행한다. 생성된 사각형 요소는 단계 1~4에는 적용되지 않으며 평활화 과정에서만 이용된다.

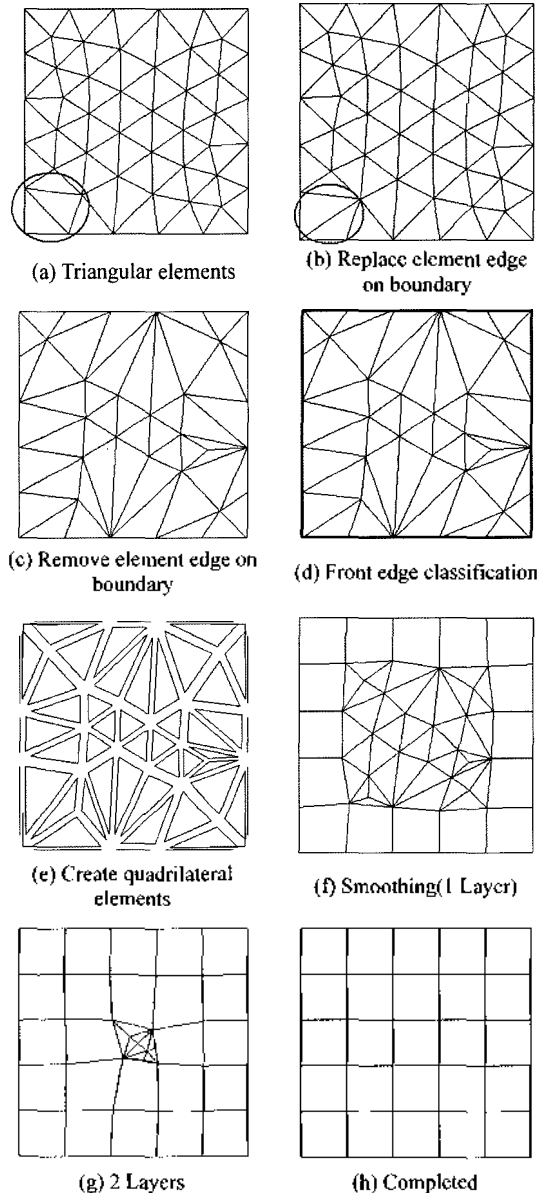


Fig. 1. Progression of a present study.

3. 본 론

3.1 요소 에지 삭제

Fig. 2와 같이 요소 에지 중에서 한 절점은 내부에 있고 나머지 절점이 경계에 있는 경우 이를 제거한다. 요소 에지의 두 절점을 포함하고 있는 삼각형 요소는 삭제되며, 이웃한 나머지 요소는 경계에 있는 절점을 참조하게 된다. 요소 에지를 제거할 때 에지의 두 절점이 이전 작업에 이용되었는지를 체크하여 초기 형상에서 경계에 인접한 요소 에지만이 제거되도록 한다. 또한 에지가 교체 되었을 때 삼각형의 세 절점이 모두 경계에 있는 경우가 발생하지 않도록 한다. 그리고 한 절점에 세 개 또는 네 개의 삼각형 요소가 인접해 있는 경우는 요소 에지 제거 과정에서 중복된 요소가 발생할 수 있다. 따라서 요소 에지 제거 이전에 한 절점에 세 개의 삼각형 요소가 존재하는 경우는 하나의 삼각형으로 변경시키고, 네 개의 삼각형 요소가 존재하는 경우는 내부 절점을 제거시킨 후 요소 에지 작업을 수행한다.

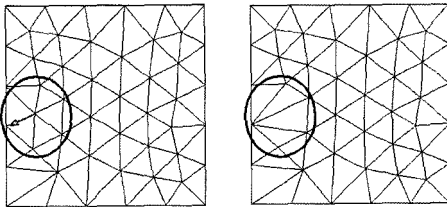


Fig. 2. Deletion of boundary element edge.

3.2 전방 에지 분류

전방 에지는 사각형 요소망 생성에 이용되며 요소 에지 제거 작업이 완료되면 요소 에지 중에서 두 절점이 모두 경계에 있는 에지를 전방 에지로 분류한다. 여기서 사각형 요소는 고려되지 않으며 초기의 삼각형 요소만을 이용한다. 전방 에지의 절점에는 인접한 전방 에지와 이루는 각도를 저장한다. 초기 생성시에는 생성된 사각형 요소가 없어 인접한 삼각형 요소의 내각의 합을 이용해서 계산하고(Fig. 3(a)), 두번째 층이 생성될 때부터는 인접한 사각형 요소의 합을 이용해서 계산한다(Fig. 3(b)). 요소 평활화 과정이 사각형 중심으로 이루어져 삼각형 요소는 서로 교차할 수가 있다. 이런 경우 삼각형 요소의 내각의 합은 정확히 전방 에지가 이루는 각도가 아니다. 이에 반해 사각형 요소는 서로 교차할 확률이 매우 적다. 만약에 사각형 요소가 교차할 경우에는 매우 작은 각도를 대입하여 이 전방에지가 결합되도록 한다.

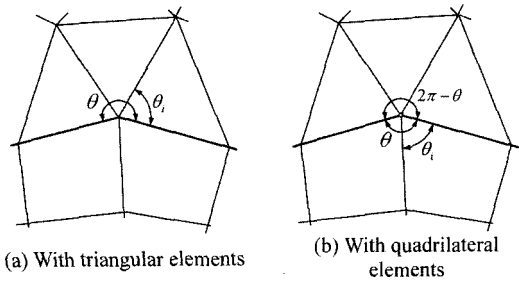


Fig. 3. Calculation angle on the front edge.

3.3 사각형 요소 생성

전방 경계 에지의 절점에 저장된 각도에 따라 Fig. 4와 같이 타입을 분류하여 사각형 요소를 생성한다. 두 절점의 각도가 모두 30° 보다 크고 135° 보다 작으면 타입 1(type 1)이 적용되고, 두 절점 중 한 절점이 이 각도를 만족하면 타입 2(type 2)가 적용된다. 그리고 두 절점 모두가 135° 보다 크고 215° 보다 작으면 타입 3(type 3)가 적용되고, 215° 보다 크면 타입 4(type 4)가 적용된다(식 1).

Type 1: $30^\circ < \theta_1, \theta_2 \leq 135^\circ$

Type 2: $30^\circ < \theta_1 \leq 135^\circ$ or $30^\circ < \theta_2 \leq 135^\circ$

Type 3: $135^\circ < \theta_1, \theta_2 \leq 215^\circ$

Type 4: $215^\circ < \theta_1 \leq 360^\circ$ or $215^\circ < \theta_2 \leq 360^\circ$ (1)

타입 1의 경우는 전방 에지를 이용해서 사각형 요소를 생성하는 경우이며, 나머지는 두께가 0인 사각형 요소를 생성한다. 사각형 요소가 생성된 후에는 전방 에지에 인접한 삼각형 요소들이 새롭게 생성된 사각형 요소의 절점을 참조하도록 변경해야 한다. 타입 1~3는 한 개의 사각형 요소가 생성되며 타입 4는 3개의 사각형 요소와 함께 연결성을 맞추기 위해 2개의 삼각형 요소가 추가적으로 생성된다. 타입 2~4가 적용되는 경우는 새로운 절점이 생성되는데, 이 경우 각 절점에는 초기의 삼각형 요소로부터 계산된 경계 에지의 길이 정보를 저장한다. 타입 1이 적용될 때 각도 조건에서 벗어나더라도 현재 적용되는 전방 에지의 길이가 각 절점에 저장되어 있는 초기 경계 에지의 평균 길이보다 절반보다 작으면 타입 1을 적용시켜 내부로 갈수록 작아지는 요소가 발생하지 않도록 한다. 또한 타입 3가 적용될 때 현재 적용되는 에지의 길이가 두 절점에 저장된 초기 에지 길이의 평균보다 2배 이상 크면 타입 4가 적용되도록 유도한다. 그리고 절점의 각도가 30° 보다 작은 경우는 Fig. 5와 같이 사각형 요소가 생성되는 것이 아니라 전방 에지가 결합

되고 삼각형 요소가 제거된다. 결합되는 두 에지의 길이 차이가 2.5배 이상이면 Blacker^[2]가 제안한 방법을 다소 변형시켜 길이가 큰 에지에 포함된 사각형 요소를 사각형, 삼각형으로 분할하여 에지를 결합한다. 타입 적용 순서는 우선 모든 전방 에지에 대해서 결합되는 것이 있는지를 체크하여 전방 에지를 결합시킨 후 타입 1부터 순차적으로 타입 4까지 적용시킨다.

요소망 생성 진행과정에서 내부 절점에 인접한 에지의 길이가 주변 전방에지에 비해 상대적으로 짧으면 Fig. 6과 같이 절단 타입(cutting operation)을 적용시킨다. 본 연구에서는 에지의 길이가 주변 전방에지의 평균 길이보다 절반 이하이면 적용시킨다. 절단 타입이 적용된 절점에는 0°의 각도를 내입하여 결합 타입(seaming operation)이 적용되도록 한다(Fig. 6(c)).

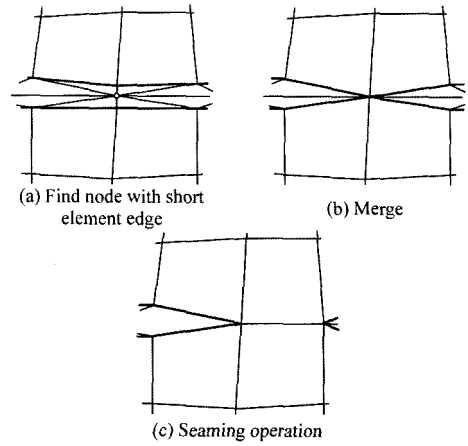


Fig. 6. Cutting operation.

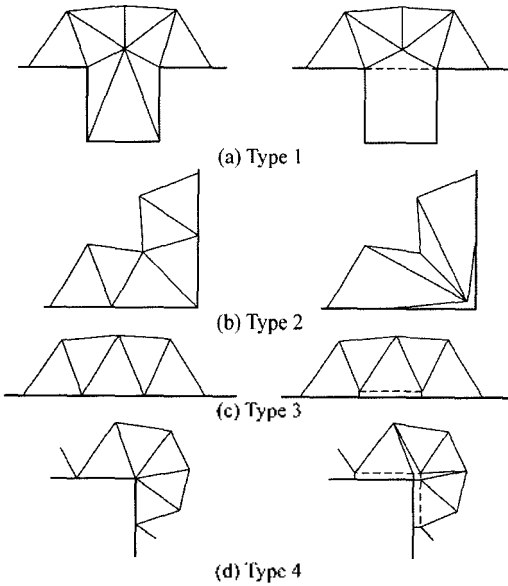


Fig. 4. Generation of quadrilateral elements with zero thickness layer.

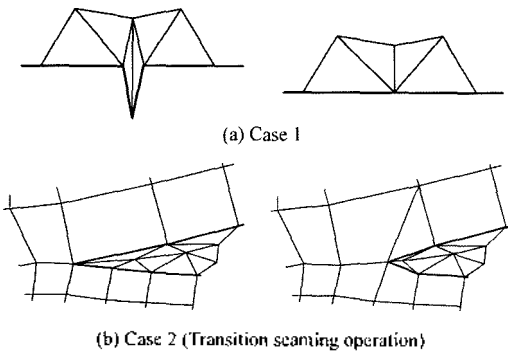


Fig. 5. Seaming operation.

3.4 평활화

경계에 두께가 0인 사각형 요소 한층이 생성되면 평활화 과정을 통해서 사각형 요소의 품질을 개선시킨다. 평활화는 사각형 요소의 품질을 우선적으로 개선시키는 방향으로 진행되며, 다음 단계에서 전방 에지의 모양을 결정짓는 아주 중요한 부분이다. 이를 위해서 Blacker 등이 제안한 기법을 수정하여 이용한다. 우선 현재 평활화가 진행중인 절점 N_k 에서 인접한 사각형 요소의 길이를 계산한다. 이를 평균하여 이동될 길이를 구하고(식 2), 주변절점 N_{j-1} , N_j , N_{j+1} 을 이용해서 이동될 방향을 구해서 새로운 절점의 위치를 계산한다. 평활화 과정에서 형상이 곡면인 경우에는 절점이 왜곡될 수 있다. 따라서 평활화 과정이 완료된 후에는 절점들을 초기의 삼각형 형상위로 투영시킨다.

$$l_D = \frac{|N_{k-1} - N_{j-1}| + |N_{j-1} - N_j| + |N_{k+1} - N_{j+1}| + |N_{j+1} - N_j|}{4} \tag{2}$$

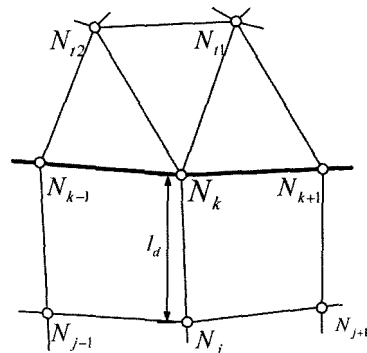


Fig. 7. Definition of edge length l_D at node on front N_k .

5. 적용 예

Fig. 8은 본 연구에서 제시된 방법을 적용시켜 삼각형 요소로부터 사각형 요소를 생성하는 단계를 보여주고 있다. 모두 10회의 반복 작업을 수행한 후 사각형 요소망 생성 작업이 완료되었다. Fig. 9는 품질이 매우 떨어지는 삼각형 요소를 이용하여 사각형 요소를 생성한 모습을 보여주고 있다. 삼각형 요소 품질에 관계없이 우수한 품질의 사각형 요소를 생성할 수 있음을 확인할 수 있다. Fig. 10은 절단 타입이 제대로 적용되는지를 확인하기 위한 모델로 12개의 내부 홀을 가지는 핸드폰 모델의 일부분이다. 생성 결과 41개의 삼각형 요소와 1667개의 사각형 요소가 생성되었다. Fig. 11(a)는 1/4 구에 해당하는 CAD데이터에 사각형 요소망을 생성한 그림이다. 이 형상은 실제형상과 요소망 생성을 위해 변환된 2D평면이 서로 차이가 심해 생성된 사각형 요소의 품질이 매우 떨어진다. 본 연구에서 제시한 방법은 이러한 형상에 생성된 삼각형 요소에 적용시킨 결과 Fig. 11(c)와 같이 우수한 품질의 사각형 요소를 생성시킬 수 있다. Fig. 12는 비균일한 요소 크기를 가지는 삼각형 형상에 사각형 요소망을 생성시킨 모습이며, 7366개의 삼각형 요소에 20개의 삼각형 요소와 2832개의 사각형 요소가 생성되었다. Fig. 13은 10개의 면으로 분류되며 일부 면이 곡면으로 이루어져 있다. 생성 결과 16개의 삼각형 요소와 2837개의 사각형 요소가 생성되었다. 그림 Fig. 13(c)는 상용 프로그램을 이용하여 CAD 데이터에 동일한 요소 크기를 적용시켜 사각형 요소망을 생성시킨 결과이다. 생성된 결과에 대해서 요소에서 가장 긴 변과 가장 짧은 변의 길이비(aspect ratio)와 요소의 최대각도를 사각형인 경우는 90° 로 나누어 주고, 삼각형인 경우는 60° 로 나누어 구한값(max angle)을 비교하였다. 값이 1에 가까울수록 요소의 품질이 우수하다고 할 수 있다. 비교 결과 CAD데이터를 이용한 사각형 요소망 생성과 비슷한 수준의 요소망 품질의 사각형 요소가 생성되었음을 확인할 수 있다. Fig. 14는 이 값을 그래프로 표현한 것이고, 대부분의 요소가 1에 해당하는 값을 가진다. 그래프에서 세로축은 가로축의 값에 해당하는 요소를 각 프로그램에서 전체 생성된 요소를 나누어서 정규화 시킨 값이다. Fig. 15는 하나의 곡면으로 이루어진 형상에 사각형 요소망을 생성시킨 모습이다. 생성결과 초기의 6499개의 삼각형 요소가 25개의 삼각형 요소와 3290개의 사각형 요소가 생성되었다. Fig. 16은 생성된 요소의 품질을 나타낸다. 대부분의

요소가 정사각형에 해당하는 1의 값을 가지는 것을 확인할 수 있다.

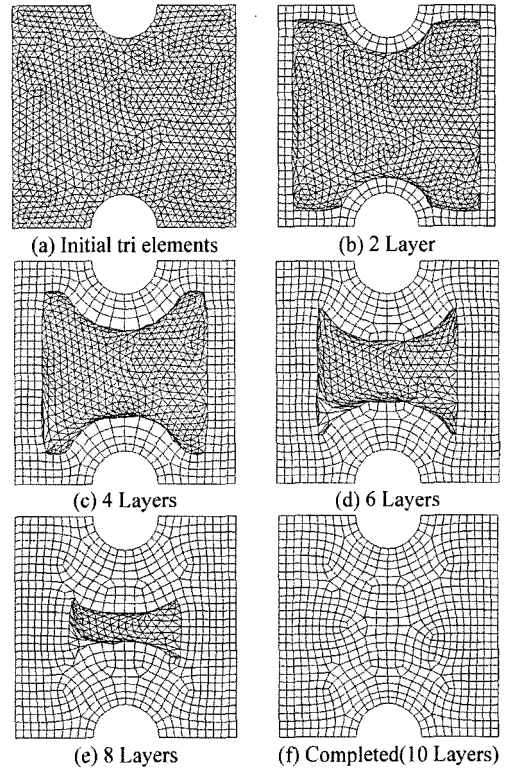


Fig. 8. Progression of present study.

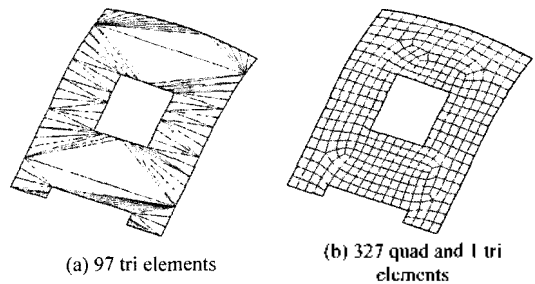


Fig. 9. Quad meshing using poor elements.

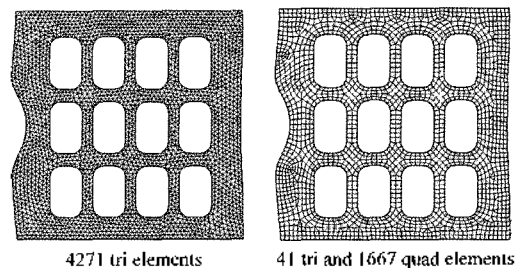


Fig. 10. A phone part with 12 holes.

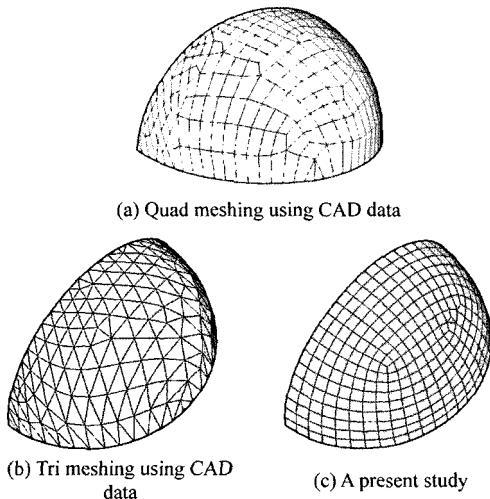
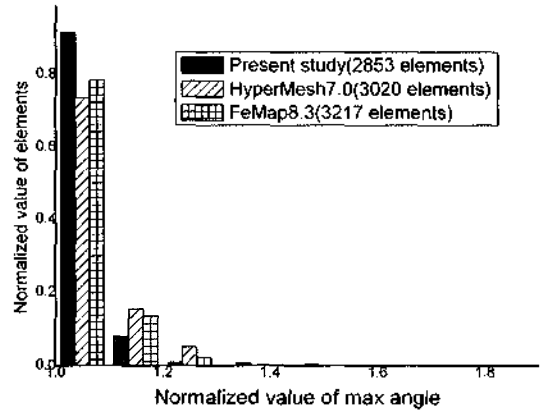


Fig. 11. A quarter sphere model.



(a) Max angle(quad: max angle/90, tri: max angle/60)

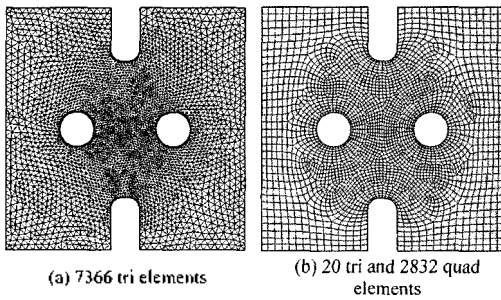
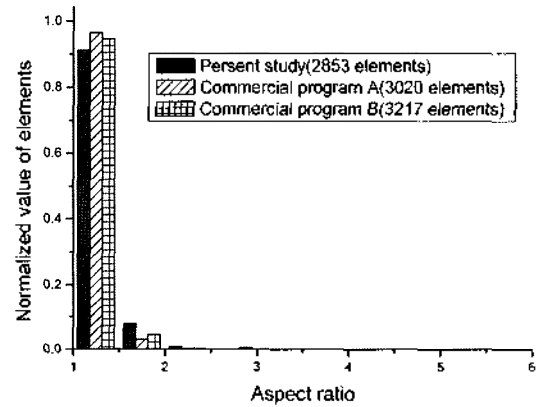


Fig. 12. A plate model with non-uniform mesh size.



(b) Aspect ratio(max edge length/min edge length)

Fig. 14. Comparison of mesh quality with commercial products.

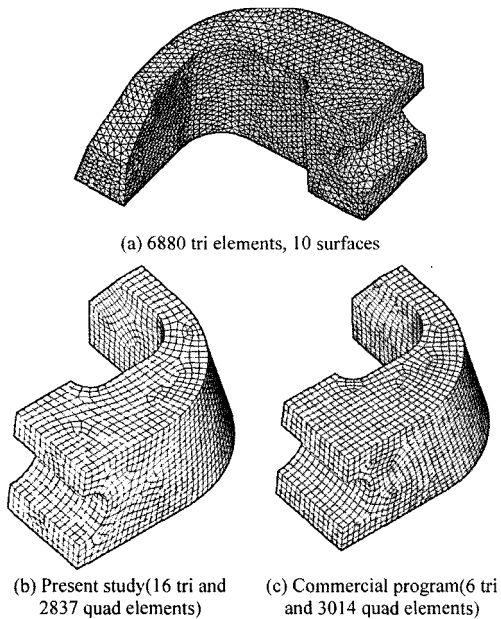


Fig. 13. A cutter model.

6. 결 론

본 논문에서는 삼각형 요소를 사각형 요소로 변환시키는 새로운 방법을 제시하였다. 이는 경계에 있는 삼각형 요소를 제거시킨 후 부누께 요소층을 생성하고, 요소 평활화 과정을 통해 부누께 요소층에 생성된 사각형 요소의 품질을 개선시킨다. 초기의 삼각형 요소가 모두 제거될 때까지 작업을 반복적으로 수행하여 사각형 요소를 생성한다. 생성되는 사각형 요소의 밀도는 곡면을 구성하는 삼각형 요소에서 경계의 절점들에 의해 좌우된다. 본 연구에서 제시한 방법은 기존의 연구들과는 달리 초기에 삼각형 요소의 품질에 관계없이 우수한 품질의 사각형 요소를 생성할 수 있다.

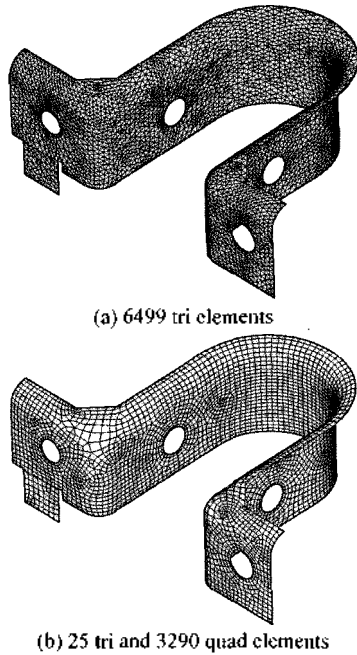
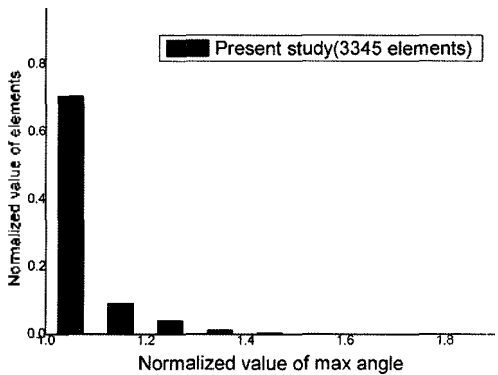
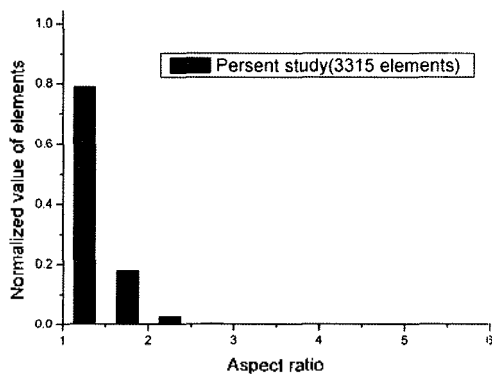


Fig. 15. A metal bracket.



(a) Max angle(quad: max angle/90, tri: max angle/60)



(b) Aspect ratio(max edge length/min edge length)

Fig. 16. Mesh quality of a metal bracket.

감사의 글

본 연구는 산업자원부 공학용 해석 소프트웨어 기술 개발 사업의 연구비 지원에 의해 수행된 것입니다.

참고문헌

- Zhu, J. Z., Zienkiewicz, O. C., Hinton, E. and Wu, J., "A New Approach to the Development of Automatic Quadrilateral Mesh Generation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 32, pp. 849-866, 1991.
- Blacker, T. D. and Stephenson, M. B., "Paving: A New Approach to Automated Quadrilateral Mesh Generation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 32, pp. 811-847, 1991.
- Cass, R. J., Benzley, S. E., Meyers, R. J. and Blacker, T. D., "Generalized 3-D Paving: An Automated Quadrilateral Surface Mesh Generation Algorithm", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 39, pp. 1475-1489, 1996.
- Talbert, J. A. and Parkinson, A. R., "Development of an Automatic, Two Dimensional Finite Element Mesh Generator using Quadrilateral Elements and Bezier Curve Boundary Definitions", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 29, pp. 1551-1567, 1991.
- Chae, S. W. and Jung, J. H., "Unstructured Surface Meshing Using Operators", 5th International Meshing Roundtable, pp. 281-291, 1997.
- Chae, S. W. and Kwon, K. Y., "Quadrilateral Mesh Generation on Trimmed NURBS Surfaces", *KSMF International Journal*, Vol. 15, No. 5, pp. 592-601, 2001.
- Lo, S. H., "A New Mesh Generation Scheme for Arbitrary Planar Domain", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, pp. 1403-1426, 1985.
- Lee, C. K. and Lo, S. H., "A New Scheme for the Generation of a Graded Quadrilateral Mesh", *Computers and Structures*, Vol. 52, pp. 847-857, 1994.
- Lau, T. S., Lo, S. H. and Lee, C. K., "Generation of Quadrilateral Mesh over Analytical Curved Surface", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 27, pp. 251-272, 1997.
- Rees, M., "Combining Quadrilateral and Triangular Meshing Using the Advancing Front Approach", 6th International Meshing Roundtable, pp. 337-348, October 1997.
- Shimada, K., Liao, J. H. and Itoh, T., "Quadrilateral Meshing with Directionality Control through the Packing of Square Cells", 7th International Meshing Roundtable, pp. 61-75, 1998.

12. Owen, S. J., Staten, M. L., Canann, S. A. and Saigal, S., "Q-MORPH: An Indirect Approach to Advancing Front Quad Meshing", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 44, pp. 1317-1340, 1999.
13. Lee, Y. K. and Lee, C. K., "Automatic Generation of Anisotropic Quadrilateral Meshes on Three-dimensional Surfaces Using Metric Specifications", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 53, pp. 2673-2700, 2002.
14. Lee, Y. K. and Lee, C. K., "A New Indirect Anisotropic Quadrilateral Mesh Generation Scheme with Enhanced Local Mesh Smoothing Procedures", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 58, No. 2, pp. 3327-3349, 2003.
15. Lee, Y. K. and Yang, D. Y., "A Grid-Based Approach to Non-regular Mesh Generation for Automatic Remeshing with Metal Forming Analysis", *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 16, pp. 625-635, 2000.
16. Kwak, D. Y., Cheon, J. S. and Im, Y. T., "Remeshing for Metal Forming Simulations-Part I: Two-dimensional Quadrilateral Remeshing", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 53, pp. 2463-2500, 2002.



권 기 연

1999년 고려대학교 기계공학과 학사
2001년 고려대학교 기계공학과 석사
2001~현재 한국과학기술원 기계공학과
박사과정
관심분야: Mesh generation, Geometric
modeling, Computer graphics



박 정 민

2000년 고려대학교 기계공학과 학사
2002년 고려대학교 기계공학과 석사
2002~현재 한국과학기술원 기계공학과
박사과정
관심분야: Mesh generation, Geometric
modeling, Computer graphics



이 병 채

1977년 서울대학교 기계공학과 학사
1979년 한국과학기술원 기계공학과 석사
1984년 한국과학기술원 기계공학과 박사
1984~1988년 한국과학기술연구원 선임
연구원
1988~현재 한국과학기술원 기계공학과
교수
관심분야: 유한요소해석, 최적설계 및 신뢰
성 해석, 내구성해석



채 수 원

1977년 서울공대 기계공학과 학사
1979년 한국과학기술원 기계공학과 석사
1988년 미국 M.I.T. 기계공학과 박사
1979년~1991년 한국기계연구원 선임연
구원, CAD/CAM실 실장
1991년~1996년 홍익대학교 기계공학과
부교수
1996년~현재 고려대학교 기계공학과 교수
관심분야: 유한요소해석, Mesh Genera-
tion, 생체역학, 충돌해석