

다열 커튼월-파일 방파제에 의한 규칙파의 반사 및 투과 Reflection and Transmission of Regular Waves by Multiple-Row Curtainwall-Pile Breakwaters

서경덕* · 지창환**

Kyung-Duck Suh* and Chang-Hwan Ji**

요 지 : 고유함수전개법을 이용하여 다열 커튼월-파일 방파제로부터의 규칙파의 반사율과 투과율을 계산할 수 있는 수학적 모형을 제안하였으며, 파일 부분의 유공율, 커튼월의 흘수 그리고 방파제 열 사이의 간격 등을 다르게 하면서 수리모형실험을 실시하였다. 상대수심이 감소하면서 반사율은 감소하고 투과율은 증가하는 경향을 보이다가, 상대수심이 아주 작아지면 반사율은 다시 증가하고 투과율은 감소하는 경향을 보였다. 다른 실험 변수들은 고정시킨 상태에서, 커튼월의 흘수만 변화시키거나 파일 부분의 유공율만 변화시키는 경우에는 반사율과 투과율의 상대적인 크기는 달라지지만 전반적인 거동은 유사했다. 입사파의 파장과 열 사이의 간격이 일치하는 경우에는 반사율과 투과율이 급격하게 변화하였다. 3열로 구성된 방파제의 경우에도 수학적 모형과 실험 결과가 대체로 잘 일치하였다.

핵심용어 : 커튼월-파일 방파제, 반사율, 투과율, 고유함수전개법

Abstract : Using the eigenfunction expansion method, a mathematical model has been developed to calculate the reflection and transmission of regular waves from a multiple-row curtainwall-pile breakwater. In addition, hydraulic model experiments have been conducted with different values of porosities between the piles, drafts of the curtain walls, and distances between the rows of the breakwater. It is found that the reflection and transmission coefficients decrease and increase, respectively, with decreasing relative water depth, but they bounce to increase and decrease, respectively, as the relative water depth decreases further. When either the porosity between the piles or the draft of the curtain wall is changed with other parameters fixed, the relative magnitudes of the reflection and transmission coefficients have been changed, but the general trend remained the same. When the wavelength is the same as the distance between the rows of the breakwater, a rapid change was observed for the reflection and transmission coefficients. A good agreement between the measurement and prediction was also founded for three-row breakwaters.

Keywords: curtainwall-pile breakwaters, reflection coefficients, transmission coefficients, eigenfunction expansion method

1. 서 론

중력식 방파제는 파를 막는 효과는 탁월하지만 일반적으로 수심에 비례해서 방파제의 폭이 증가한다. 따라서 수심이 깊어질수록 공사에 필요한 자재 등이 급격하게 증가하여 비용의 부담이 커진다. 또한 중력식 방파제가 설치된

항만은 해수의 순환이 잘 이루어지지 않아 항 내 오염이 심화되고, 해저생물의 생태통로가 차단되어 해양 생태계를 파괴하기도 한다. 뿐만 아니라 기초지반이 연약한 곳에서는 지반이 방파제의 중량을 견디지 못하여 중력식 방파제의 건설이 어렵다는 단점도 있다. 이와 같은 문제점들을 해결하기 위해 투과성 구조물에 대한 관심이 높아지고 있다.

*서울대학교 지구환경시스템공학부 및 공학연구소(Corresponding author: Kyung-Duck Suh, School of Civil, Urban and Geosystem Engineering and Engineering Research Institute, Seoul National University, Seoul 151-742, Korea. kdsuh@snu.ac.kr)

**서울대학교 지구환경시스템공학부(School of Civil, Urban and Geosystem Engineering, Seoul National University)

투과성 구조물의 가장 간단한 형태로는 수면에서 일정 깊이까지 커튼월을 설치하는 커튼월(curtain-wall) 방파제가 있으며, 또 다른 간단한 형태의 투과성 구조로는, 본 연구에서 파일 방파제라고 부르는 수직 파일들의 배열을 생각할 수 있다. Suh *et al.*(2006)은 상부는 커튼월 방파제이며, 하부는 파일 방파제로 구성된 커튼월-파일 방파제를 제안하였다. 이러한 형태의 방파제는 수주(water column)의 하부에서 파의 운동이 아주 작은 단파의 경우에는 기존의 커튼월 방파제와 같은 형태로 거동하며, 수주의 하부에서도 상부와 마찬가지로 파의 수평운동이 활발한 장파의 경우에는 파일 주위에서 흐름 분리에 의한 에너지 소산이 일어나기 때문에 기존의 커튼월 방파제보다 투과파가 줄어들게 된다. Suh *et al.*(2006)이 제안한 형태를 파일 방파제와 비교하면, 장파의 경우는 투과파가 조금 적어지는 것을 기대할 수 있으며, 단파의 경우는 상부의 커튼월이 파의 진행을 막기 때문에 투과파가 훨씬 줄어드는 효과를 기대할 수 있다.

일반적으로 투과성 방파제는 장파에 취약하다. 장파의 에너지는 수면부터 바닥까지 거의 균일하게 분포하므로 장파를 차단하기 위해서는 커튼월의 홀수를 증가시키거나 파일의 유공율을 감소시켜야 한다. 하지만 이러한 경우에는 방파제에 작용하는 파력과 모멘트가 커진다는 문제점이 있다. 또한, 최근에는 방파제가 파랑차단이라는 본래의 기능만을 수행하는 것이 아니라 낚시터나 전망대와 같은 해양 위락시설 등으로 이용되는 등의 부가적인 기능도 할 수 있도록 요구되고 있다. 따라서 다양한 용도로 사용될 수 있는 방파제 상부의 공간도 필요하다.

본 연구에서는 Suh *et al.*(2006)이 제안한 커튼월-파일 방파제를 2열 이상 배열하되, 파가 입사하는 쪽의 열부터 각 열에서 커튼월의 홀수는 점점 증가시키고 파일의 유공율은 점점 감소시켜서 방파제의 각 열에 작용하는 파력이 크게 증가하지 않으면서도 투과파를 줄일 수 있고, 방파제의 각 열을 수면 위에서 서로 연결하여 방파제 상부에 여러 가지 용도로 이용할 수 있는 공간을 확보하는 형태의 다열 커튼월-파일 방파제에 대한 연구를 하였다. 이를 위해, 방파제의 열이 1열인 Suh *et al.*(2006)의 수학적 모형을 다열로 확장하였으며, 규칙파에 대해서 수리모형실험을 실시하여 규칙파에서의 반사율과 투과율을 비교 분석하였다.

2. 수학적 모형

2.1 경계치 문제

Fig. 1에 다열 커튼월-파일 방파제의 개략적인 모습을 나

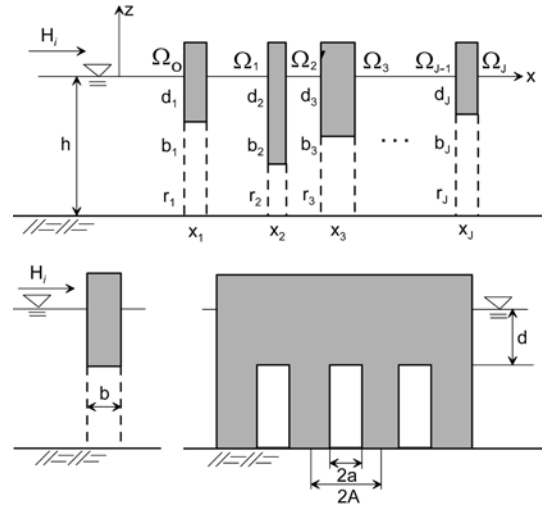


Fig. 1. Definition sketches of multiple-row curtainwall-pile breakwaters.

타내었다. 그림에서 수평좌표 x 는 파봉선에 직각으로, 파가 진행하는 방향으로 양의 값을 가지며, 수직좌표 z 는 정수면에서 연직 상방으로 양의 값을 가진다. 수심은 h 로 일정하고, 방파제 각 열의 중심은 $x = x_j$ 에 있다. d_j 는 커튼월이 정수면 아래로 연장된 길이이며, b_j 는 방파제 각 열의 두께이다. $2A_j$ 는 인접한 두 파일의 중심거리, $2a_j$ 는 인접한 두 파일 사이의 간격, 그리고 $r_j = a_j/A_j$ 는 파일 부분의 유공율(porosity)이다. 아래첨자 j 는 방파제의 열을 나타낸다. J 개의 방파제 열에 의해 유체는 $J+1$ 개의 유체영역으로 나뉘며, j 번째 열에 대해서 파가 입사하는 방향의 영역을 Ω_{j-1} , 반대방향의 영역을 Ω_j 로 정의한다. 입사파는 파고 H_1 인 규칙파이며, x 값이 커지는 방향으로 진행한다.

유체를 비압축성, 비회전 흐름이라고 가정하면 속도포텐셜은 리플라스 방정식을 만족시킨다. 자유수면 경계조건들을 선형화하면, 각 유체영역에서의 속도포텐셜 $\Phi_j(x, z, t)$ ($j=0, 1, 2, \dots, J$)에 대한 다음과 같은 경계치 문제를 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \Phi_j = 0 \quad \text{at } z = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = -h \quad (3)$$

여기서, ω 는 파의 각주파수이고, g 는 중력가속도이다. 시간 t 에 대한 주기적인 운동을 가정하면, 위의 경계치 문제의 해를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\Phi_j(x, z, t) = \text{Re} \left\{ -\frac{igH_j}{2\omega} \frac{1}{\cosh(kh)} \phi_j(x, z) \exp(-i\omega t) \right\} \quad (4)$$

여기서, Re는 복소수의 실수부를 나타내며, 파수 k 는 다음과 같은 분산관계식을 만족시킨다.

$$\omega^2 = gk \tanh(kh) \quad (5)$$

해석해를 구하기 위해서는, 각각의 유체영역에서 속도포텐셜의 공간변화 $\phi_j(x, z)$ 를 결정하여야 한다.

2.2 고유함수전개법

경계치 문제를 풀기 위해 고유함수전개법을 사용하며, 이 방법에서는 속도포텐셜이 무한히 많은 해들의 합으로 나타내어진다. 영역 Ω_0 와 Ω_j 에서 식 (2)와 (3)을 만족하는 식 (1)의 해는

$$\begin{aligned} \phi_0 = & A_{00} \cos[\mu_0(h+z)] \exp[-\mu_0(x-x_1)] \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} B_{0m} \cos[\mu_m(h+z)] \exp[\mu_m(x-x_1)] \end{aligned} \quad (6)$$

$$\phi_j = \sum_{m=0}^{\infty} A_{jm} \cos[\mu_m(h+z)] \exp[-\mu_m(x-x_j)] \quad (7)$$

와 같다. 여기서 A_{jm} 은 입사파의 진행방향, B_{jm} 은 반사파의 진행방향 성분파의 파고를 나타내는 계수이며, 두 개의 아래첨자 중 앞의 것(j)은 방파제의 열을, 뒤의 것(m)은 성분파를 나타낸다.

파수 μ_m 은 다음과 같은 분산관계식

$$\omega^2 = -g\mu_m \tan(\mu_m h) \quad (8)$$

의 해이다. 이 때, 파수 μ_m 은 비진행파(non-propagating wave)에 대해서는 무수하게 많은 실근, $\pm\mu_m(m \geq 1)$ 을 가지고, 진행파(propagating wave)에 대해서는 한 쌍의 허근, $\mu_0 = \pm ik$ 을 가진다. 식 (6)과 (7)에서의 진행파가 각각 반사파와 투과파가 되려면 $\cos[\mu_0(h+z)] = \cosh[k(h+z)]$ 이 되어야 하므로 $\mu_0 = -ik$ 를 택한다. 또한 비진행파는 방파제에서 떨어진 거리에 따라 지수함수적으로 증가해서는 안되므로 $m \geq 1$ 일 경우는 양의 근을 선택한다. 위의 식 (6)과 (7)에서 $A_{00}=1$, $|B_{00}|$ =반사율, $|A_{j0}|$ =투과율이다. 영역 Ω_1 부터 Ω_{j-1} 까지에서 식 (1)을 만족하는 해는

$$\begin{aligned} \phi_j = & \sum_{m=0}^{\infty} \{A_{jm} \exp[-\mu_m(x-x_j)] + B_{jm} \exp[-\mu_m(x-x_{j+1})]\} \\ & \cdot \cos[\mu_m(h+z)] \quad j = 1, 2, \dots, J-1 \end{aligned} \quad (9)$$

이다.

파장에 비해 방파제의 두께는 아주 작기 때문에, 수학적으로 방파제는 두께를 가지지 않는다고 생각할 수 있으며, 이 때 ϕ_{j-1} 과 ϕ_j 는 $x=x_j(j=1,2,\dots,J)$ 에서 다음의 정합조건을 만족시켜야 한다.

$$\frac{\partial \phi_{j-1}}{\partial x} = \frac{\partial \phi_j}{\partial x} = 0 \quad \text{for } -d_j \leq z \leq 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial \phi_{j-1}}{\partial x} = \frac{\partial \phi_j}{\partial x} = iG_j(\phi_{j-1} - \phi_j) \quad \text{for } -h \leq z \leq -d_j \quad (11)$$

첫 번째 정합조건은 방파제 상부에 있는 불투과성 커튼월의 양쪽에서 수평방향 유속이 0이 된다는 것을 의미한다. 두 번째 정합조건은 방파제 하부의 파일 부분에서 방파제 양쪽의 수평방향 유속이 같으며, 그 값은 양쪽의 속도포텐셜의 차, 즉 압력 차에 비례한다는 것을 의미한다. 비례상수인 투수계수 G_j 는 일반적으로 복소수로 나타내어진다. 계수 G_j 를 나타내는 방법은 여러 가지가 있으나(Isaacson *et al.*, 1998), 본 연구에서는 Mei *et al.*(1974)의 방법을 사용하며, 그 값은 다음과 같이 표현된다.

$$G_j = \frac{1}{\frac{\gamma_j}{\omega} - il_j} \quad (12)$$

여기에서 γ_j 는 운동방정식에서 비선형 항인 이류가속도 항을 선형화하여 유도된 에너지 소산계수이고, l_j 는 파일 사이 간격을 통과하여 흐르는 제트(jet)의 길이이다. 식 (12)에서 분모의 실수부는 파일 사이의 흐름 분리에 따른 저항에 해당되며, 허수부는 관성 저항에 의한 파일 방파제 전후의 위상차와 관계가 있다.

Kim(1998)에 의하면 선형화된 소산계수 γ_j 는

$$\gamma_j = \frac{8\alpha_j}{9\pi} H_j A_{j-1,0} \omega \frac{1}{\sqrt{(R_j+2)^2 + P_j^2}} \frac{5 + \cosh(2kh)}{2kh + \sinh(2kh)} \quad (13)$$

이며, $P_j = l_j k$, $R_j = \gamma_j k / \omega$ 그리고 α_j 는 수두 손실계수이다. 식 (9)를 정리하면 γ_j 에 관한 4차 방정식이 되며, 이것을 고유치 방법(예로서, Press *et al.*, 1992)으로 풀 수 있다.

Suh *et al.*(2002)은 제트의 길이 l_j 가 차단계수 C_j 와

$$l_j = 2C_j \quad (14)$$

의 관계가 있다고 했으며, Kakuno and Liu(1993)는 직사각형 파일의 차단계수가

$$C_j = \frac{b_j}{2} \left(\frac{1}{r_j} - 1 \right) + \frac{2A_j}{\pi} \left[1 - \log(4r_j) + \frac{1}{3}r_j^2 + \frac{281}{180}r_j^4 \right] \quad (15)$$

라고 제안했다. 직사각형 파일에서의 수두손실계수 α_j 는 윤 등(2005)에 의해 수정된 다음 식을 사용하였다.

$$\alpha_j = 0.6 \left(\frac{1}{r_j C_{c_j}} - 1 \right)^2 \quad (16)$$

여기서, C_{c_j} 는 Mei *et al.*(1974)가 다음 공식을 사용하여 제안한 수축계수이다.

$$C_{c_j} = 0.6 + 0.4r_j^2 \quad (17)$$

식 (13)과 (16)은 커튼월이 없는 파일 방파제에서 유도되었으나, 파일 사이에서의 에너지 소산 메커니즘이 동일하기 때문에 커튼월 상부를 가진 커튼월-파일 방파제에서도 사용할 수 있을 것이다. 파일 방파제에서는 자유수면에서 추가적인 에너지 소산이 발생하지만, 파일 사이에서의 에너지 소산에 비해 작다고 가정할 수 있을 것이다.

식 (13)에서 $A_{j-1,0}$ 는 입사파고 H_j 에 대한 j 번째 방파제에 입사하는 파의 파고비를 나타낸다. 그러나 $j=1$ 일 때, 즉, $A_{0,0}=1.0$ 을 제외하고는 $A_{j-1,0}$ 의 값을 알지 못한다. 따라서 반복 계산을 통하여 이 값들을 구해야 한다. 에너지는 전 수심에 대해 일정하며 파일 사이의 틈을 통해서 전달된다는 가정 하에 $A_{j-1,0}$ 의 초기값을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A_{j-1,0} = A_{j-2,0} \left(\frac{h-d_{j-1}}{h} r_{j-1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (18)$$

투수계수 G_j 를 구하는 위의 방법은 투수계수를 구하기 위한 매개변수들(입사파고, 주기 그리고 방파제의 형상과 관계된 변수)을 모두 알고 있다는 점에서 다른 방법들에 비해 유리하다. 예를 들면, Isaacson *et al.*(1998)의 방법에서는 마찰이나 부가질량계수를 연역적으로 알 수 없기 때문에 반사율 및 투과율의 예측치와 측정치를 비교하여 이들이 잘 맞도록 계수들을 조정한다.

만일 M 개의 파 성분(1개의 진행파와 $M-1$ 개의 소멸파)만 선택한다면, 미지수의 개수는 $2JM$ 개가 되며, 이를 구하기 위해서는 $2JM$ 개의 방정식이 필요하다. 부록에 제시

한 방법에 따라 다음과 같은 연립 방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} [\{\mu_m f_{mn}(-d_1, 0) + (\mu_m - iG_1) f_{mn}(-h, -d_1)\} B_{0m} \\ & + iG_1 f_{mn}(-h, -d_1) A_{1m} \\ & + iG_1 \exp(-\mu_m \Delta x_1) f_{mn}(-h, -d_1) B_{1m}] \\ & = \mu_0 A_{00} \{f_{0n}(-d_1, 0) + f_{0n}(-h, -d_1)\} + iG_1 A_{00} f_{0n}(-h, -d_1) \\ & \text{for } n = 0, 1, 2, \dots, \infty \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} [\mu_m \{f_{mn}(-d_1, 0) + f_{mn}(-h, -d_1)\} B_{0m} \\ & + \mu_m \{f_{mn}(-d_1, 0) + f_{mn}(-h, -d_1)\} A_{1m} \\ & - \mu_m \exp(-\mu_m \Delta x_1) \{f_{mn}(-d_1, 0) + f_{mn}(-h, -d_1)\} B_{1m}] \\ & = \mu_0 A_{00} \{f_{0n}(-d_1, 0) + f_{0n}(-h, -d_1)\} \\ & \text{for } n = 0, 1, 2, \dots, \infty \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} [\exp(-\mu_m \Delta x_{j-1}) \{-\mu_m f_{mn}(-d_j, 0) + \mu_m f_{mn}(-h, -d_j)\} \\ & + iG_j f_{mn}(-h, -d_j) A_{j-1,m} + \{\mu_m f_{mn}(-d_j, 0) - \mu_m f_{mn}(-h, -d_j)\} \\ & + iG_j f_{mn}(-h, -d_j) B_{j-1,m} - iG_j f_{mn}(-h, -d_j) A_{jm} \\ & - iG_j \exp(-\mu_m \Delta x_j) f_{mn}(-h, -d_j) B_{jm}] = 0 \\ & \text{for } n = 0, 1, 2, \dots, \infty \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} [\mu_m \exp(-\mu_m \Delta x_{j-1}) \{f_{mn}(-d_j, 0) + f_{mn}(-h, -d_j)\} A_{j-1,m} \\ & - \mu_m \{f_{mn}(-d_j, 0) + f_{mn}(-h, -d_j)\} B_{j-1,m} \\ & - \mu_m \{f_{mn}(-d_j, 0) + f_{mn}(-h, -d_j)\} A_{jm} \\ & + \mu_m \exp(-\mu_m \Delta x_j) \{f_{mn}(-d_j, 0) + f_{mn}(-h, -d_j)\} B_{jm}] = 0 \\ & \text{for } n = 0, 1, 2, \dots, \infty \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} [\exp(-\mu_m \Delta x_{j-1}) \{-\mu_m f_{mn}(-d_j, 0) + \mu_m f_{mn}(-h, -d_j)\} \\ & + iG_j f_{mn}(-h, -d_j) A_{j-1,m} + \{\mu_m f_{mn}(-d_j, 0) - \mu_m f_{mn}(-h, -d_j)\} \\ & + iG_j f_{mn}(-h, -d_j) B_{j-1,m} - iG_j f_{mn}(-h, -d_j) A_{jm}] = 0 \\ & \text{for } n = 0, 1, 2, \dots, \infty \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} [\mu_m \exp(-\mu_m \Delta x_{j-1}) \{f_{mn}(-d_j, 0) + f_{mn}(-h, -d_j)\} A_{j-1,m} \\ & - \mu_m \{f_{mn}(-d_j, 0) + f_{mn}(-h, -d_j)\} B_{j-1,m} \\ & - \mu_m \{f_{mn}(-d_j, 0) + f_{mn}(-h, -d_j)\} A_{jM}] = 0 \\ & \text{for } n = 0, 1, 2, \dots, \infty \end{aligned} \quad (24)$$

여기서,

$$\Delta x_j = x_{j+1} - x_j \quad (25)$$

$$f_{mn}(p, q) = \int_p^q \cos[\mu_m(h+z)] \cos[\mu_n(h+z)] dz$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\frac{\sin[(\mu_m + \mu_n)(h+z)]}{\mu_m + \mu_n} + \frac{\sin[(\mu_m - \mu_n)(h+z)]}{\mu_m - \mu_n} \right]_p^q & \text{for } m \neq n \\ \frac{1}{4\mu_m} [2\mu_m(h+z) + \sin[2\mu_m(h+z)]]_p^q & \text{for } m=n \end{cases} \quad (26)$$

이다.

$m=0 \sim M-1, n=0 \sim M-1$ 일 때, 식 (19)부터 (24)로부터 $2JM$ 개의 방정식을 얻게 되며, 이들을 연립해서 풀면 $2JM$ 개의 미지수를 구할 수 있다. 이로부터 반사율과 투과율을 계산할 수 있으며, 이는 각각

$$C_r = |B_{00}| \quad (27)$$

$$C_t = |A_{J0}| \quad (28)$$

으로 주어진다.

3. 수리모형실험

다열 커튼월 파일 방파제의 수학적 모형을 검증하기 위한 수리모형실험을 서울대학교 해안공학연구실의 2차원 조파수조(길이 30 m, 폭 0.6 m, 높이 1 m)에서 수행하였다. 방파제 모형은 가로, 세로가 각각 30 mm인 정사각형 알루미늄 봉을 이용하여 하부의 파일 부분과 상부의 커튼월 부분을 분리하여 제작하였으며, 두 부분을 결합하여 사용하였다. 파일 부분의 유공율이 각각 50%, 40%, 25%가 되도록 제작하였으며, 파일 부분의 높이가 125 mm, 200 mm, 250 mm 가 되도록 하여 커튼월의 홀수를 조절하였다. 커튼월 부분은 알루미늄 봉으로 뼈대를 만든 후 두께 3 mm 인 플라스틱 재질의 판재를 뼈대 양쪽에 부착하였으며, 높이는 650 mm 로 하여 파일 부분의 높이가 낮아지는 경우에도 월파가 일어나지 않게 제작하였다.

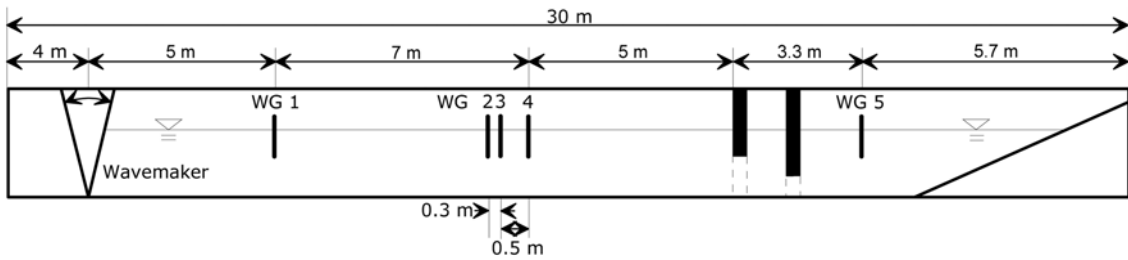


Fig. 2. Sketch of experimental setup.

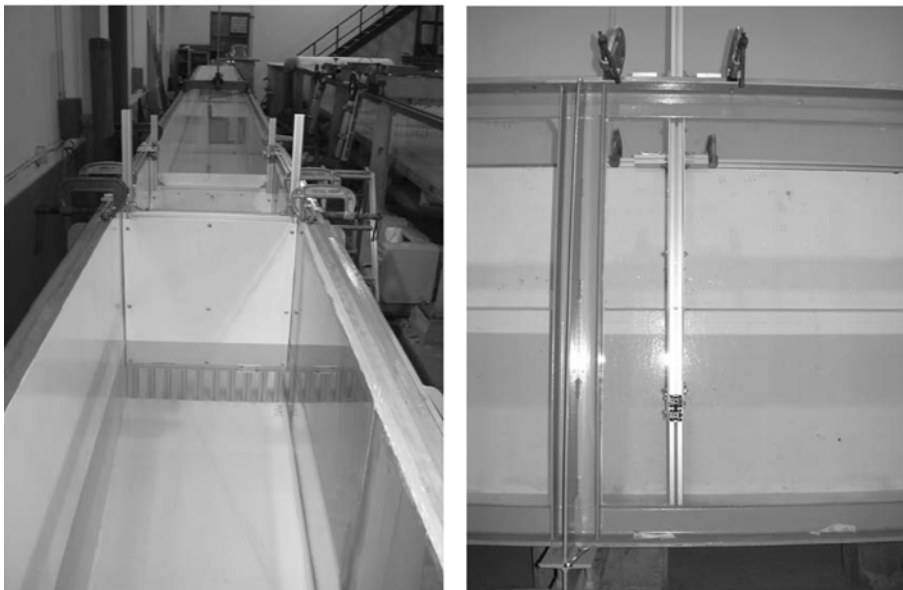


Fig. 3. Front and side views of breakwater model.

방파제 모형은 Fig. 2에서 보는 것과 같이 방파제의 첫 번째 열이 조파기로부터 17 m 떨어진 곳에 위치하도록 설치하였다. 방파제 모형과 수조벽면은 클램프를 이용하여 고정시켰으며, Fig. 3은 방파제 모형이 설치된 모습을 정면과 측면에서 본 사진이다. 파고계는 총 5개를 설치하였는데, 입사파를 측정하기 위하여 조파기에서 5 m 떨어진 곳에 1개, 반사파를 측정하기 위하여 소멸파의 영향을 거의 받지 않는 위치한 방파제 첫 번째 열의 전면으로부터 5 m 이상 떨어진 위치에 총 3개, 그리고 투과파를 측정하기 위하여 방파제의 첫 번째 열의 후면으로부터 3.3 m 떨어진 곳에 1개를 설치하였다. 반사파 측정을 위한 파고계 사이의 간격은 G2와 G3가 0.3 m, G3와 G4가 0.5 m 떨어지도록 파고계를 설치하였다. 이는 최소자승법에 기초한 3점 분리법(Suh *et al.*, 2001)을 이용하기 위한 것으로 입, 반사파를 분리하여 반사율을 산정할 때 모든 실험 파랑조건에 대해 적용이 가능하고 정확도 면에서도 타당한 결과를 줄 수 있도록 설정한 것이다.

조파수조의 수심은 0.5 m로 일정하게 하였으며, 파형경사가 $H/L=0.03$ 으로 고정된 규칙파를 조파하되 율파 및 쇄파가 발생하지 않도록 하였다. 파의 주기를 1.0초에서 2.0 초까지 0.2초 간격으로 증가시켜 총 6가지 파랑조건에 대해 실험을 실시하였다.

파고계 G1에서는 입사파, G2~G4에서 입·반사파, 그리고 G5에서는 투과파를 측정하였으며, 3점분리법으로 분리한 입사파를 G1에서 측정된 입사파와 비교하여 입·반사

분리가 정확하게 되었는지도 확인하였다. 파랑관측은 각각의 파고계에서 1초에 20개의 데이터를 취득하였으며, 조파기 가동 후 1500개의 데이터를 취득하였다. 입·반사파고 및 투과파고의 계산에서 입사파는 조파기를 가동하여 파가 생성된 후 파가 파고계 G1을 지나 방파제에서 반사되어 다시 G1까지 되돌아오는 시간을, 반사파는 방파제에서 반사된 파가 G2를 지나 조파판에서 재반사되어 G2에 도달하는 시간을 각각 파의 주기 별로 계산하여 파랑 관측 후 그 시간 동안의 데이터만을 이용하였다.

4. 수학적 모형과 실험 결과의 비교

수리모형실험의 결과와 수학적 모형에 의한 결과를 비교하기 위하여 파의 반사율과 투과율을 상대수심(kh)의 함수로 나타내었다. 식 (13)의 에너지 소산계수 γ_j 는 상대수심 kh 가 0으로 가까워지면 무한대로 커지게 된다. 이 때, 투수계수 G_j 는 γ_j 와 역수관계이므로 아주 작아지게 되는데, 이는 장파로 갈수록 투과율이 감소하고 반사율이 증가하는, 실제 물리현상과는 반대의 결과를 초래한다. 식 (13)의 적용 가능구간을 결정하는 것은 쉽지 않다. 본 실험은 $kh \geq 0.75$ 에 대하여 실시하였기 때문에 수치계산 결과도 $kh \geq 0.75$ 의 범위에 대해서만 제시한다.

Fig. 4와 Fig. 5에는 $d_1=0.5$ h, $r_1=0.5$, $r_2=0.5$, $x_2-x_1=0.5$ h로 고정하고, d_2 만 각각 0.6 h와 0.75 h로 다르게 한 경우의 파의 반사율과 투과율을 나타내었다. 전체적으로 수리모형

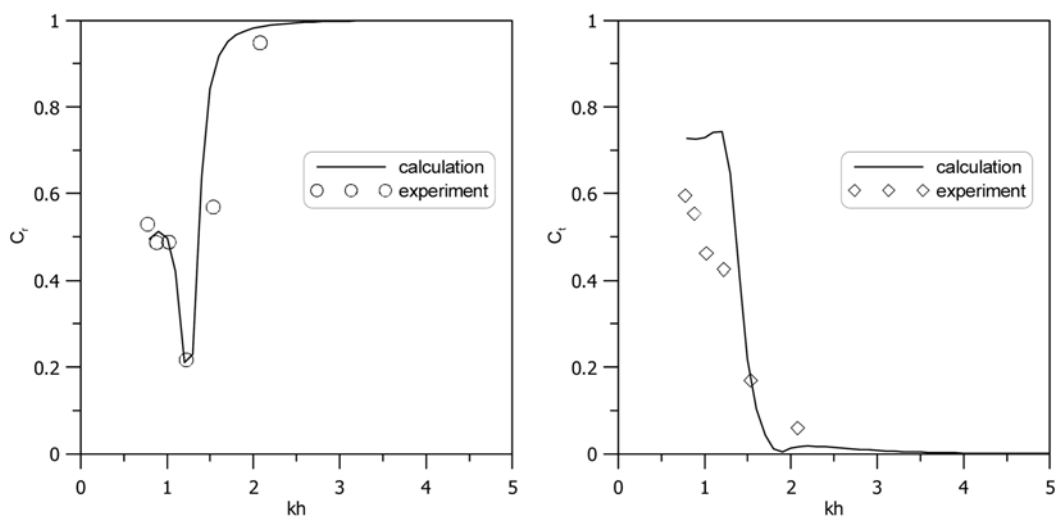


Fig. 4. Reflection and transmission coefficients as a function of kh ($d_1=0.5$ h, $d_2=0.6$ h, $r_1=0.5$, $r_2=0.5$, $x_2-x_1=0.5$ h).

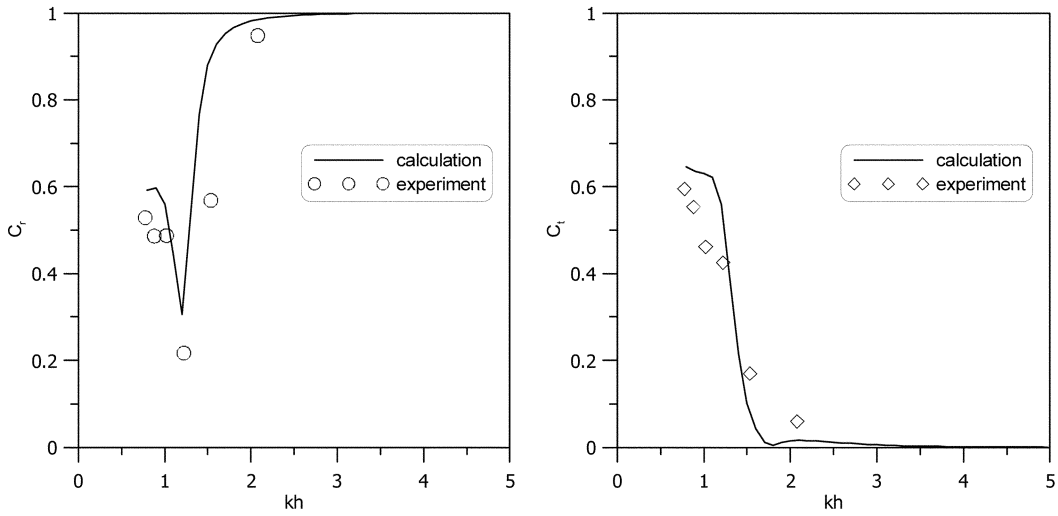


Fig. 5. Reflection and transmission coefficients as a function of kh ($d_1=0.5$ h, $d_2=0.75$ h, $r_1=0.5$, $r_2=0.5$, $x_2-x_1=0.5$ h).

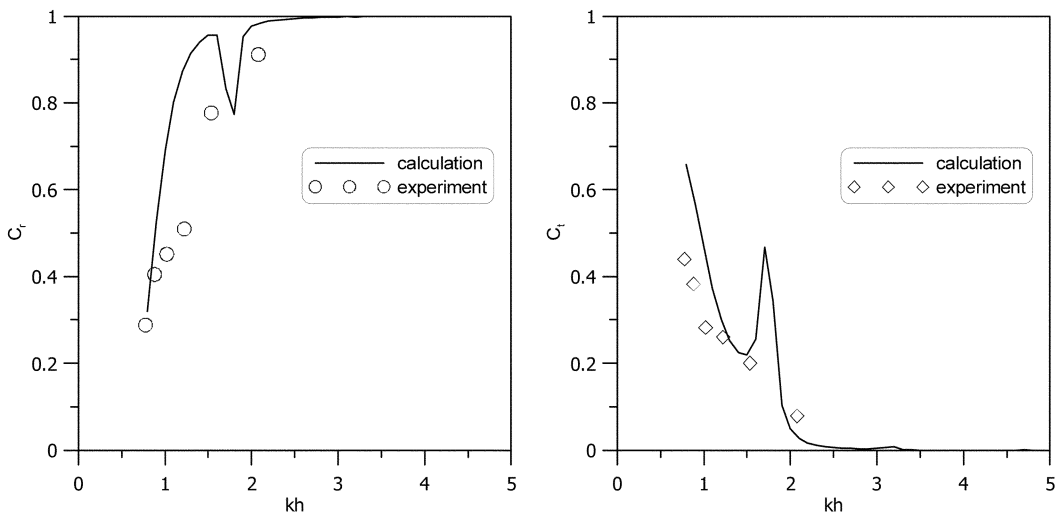


Fig. 6. Reflection and transmission coefficients as a function of kh ($d_1=0.5$ h, $d_2=0.6$ h, $r_1=0.5$, $r_2=0.5$, $x_2-x_1=2.0$ h).

실험의 결과들이 수학적 모형에서의 반사율 및 투과율의 특성들을 잘 재현하고 있다. 장파의 경우, 수학적 모형으로 얻은 예측치보다 수리실험을 통해 얻은 관측치가 투과율에서 조금 작게 측정되었다. 두 그림의 비교를 통해서 2열에서의 커튼월의 홀수가 커짐에 따라 반사율은 조금 더 커지며, 투과율은 조금 더 작아지는 것을 확인할 수 있다.

Fig. 6에는 Fig. 4의 실험조건에서 두 열 사이의 간격 (x_2-x_1)만 2.0h로 바뀐 경우의 결과를 나타내었다. 이 두 그림을 비교해 보면 반사율 및 투과율의 크기가 두 열 사이의 간격에 크게 영향을 받지 않은 것을 알 수 있다. 다만

특정 상대수심($kh \approx 1.7$)에서 반사율과 투과율이 급격하게 변하는 것을 볼 수 있는데, 이러한 현상은 파의 파장과 방파제 두 열 사이의 간격이 거의 일치하면서 방파제 열 사이에서 파의 공명이 발생하여 나타나는 것이다.

유공율의 변화에 따른 반사율 및 투과율의 변화를 살펴 보기 위하여 $d_1=0.5$ h, $d_2=0.5$ h, $r_1=0.5$, $x_2-x_1=0.5$ h이고, r_2 만 0.4와 0.25인 경우의 결과를 각각 Fig. 7과 Fig. 8에 나타내었다. 이 두 그림을 비교해보면 2열에서의 유공율이 더 작은 경우에 반사율은 더 크게 그리고 투과율은 더 작게 나타난다. 이것은 유공율은 일정하고 커튼월의 홀수만

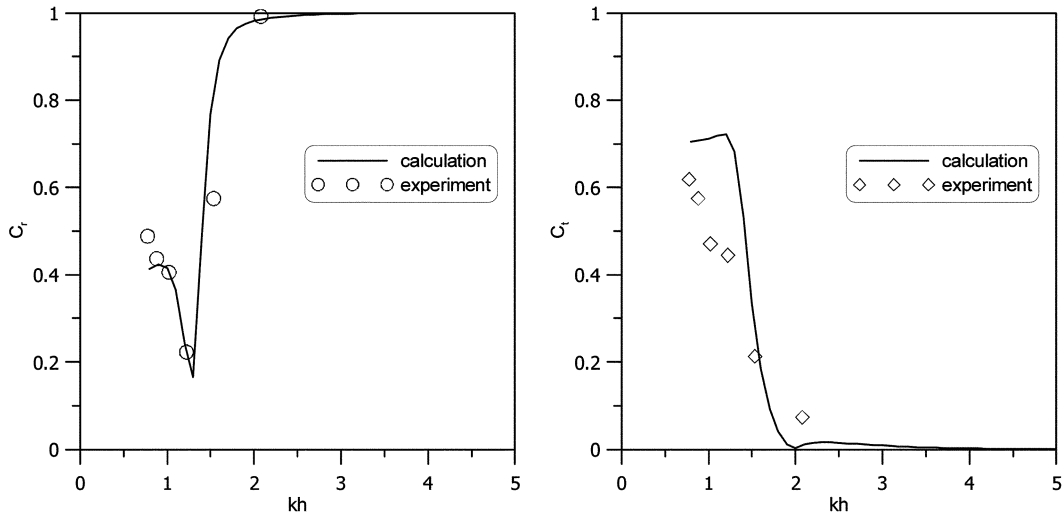


Fig. 7. Reflection and transmission coefficients as a function of kh ($d_1=0.5$ h, $d_2=0.5$ h, $r_1=0.5$, $r_2=0.4$, $x_2-x_1=0.5$ h).

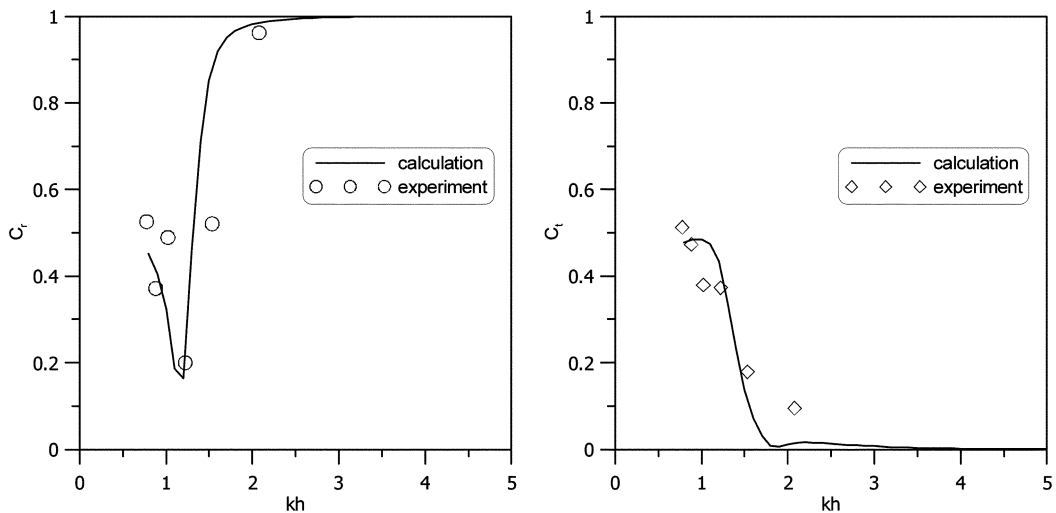


Fig. 8. Reflection and transmission coefficients as a function of kh ($d_1=0.5$ h, $d_2=0.6$ h, $r_1=0.5$, $r_2=0.25$, $x_2-x_1=0.5$ h).

달라졌을 경우의 결과와 유사한 결과이다. 물론 이러한 현상은 복잡한 수학적 모형을 사용하거나 수리실험을 수행하지 않아도 직관적으로 얻을 수 있는 결과이지만, 본 연구에서의 수학적 모형 및 실험결과가 물리적 현상을 잘 모의하고 있음을 보여주는 증거이기도 하다.

한편, 방파제가 3열로 구성되어 있을 경우에 대한 실험도 실시하였다. 3열 방파제에서 파일 부분의 유공율은 일정하게 고정시키고 커튼월의 홀수만을 변화시킨 경우와 커튼월의 홀수를 고정시키고 유공율을 변화시킨 경우에도 2열 방파제에서 나타나는 현상들이 거의 동일하게 재현되

었으며, 관측값과 모형의 예측값이 2열 방파제에서와 마찬가지로 서로 잘 일치하였다. Fig. 9에는 $d_1=0.5$ h, $d_2=0.5$ h, $d_3=0.5$ h, $r_1=0.5$, $r_2=0.4$, $r_3=0.25$, $x_2-x_1=0.5$ h, $x_3-x_2=1.5$ 인 경우의 결과를 도시하였다. 이는 Fig. 7의 조건에 3열을 더 붙인 경우로, 투과율이 상당히 줄어들었음을 볼 수 있다. 또한, 이 밖의 다른 경우에서도 수학적 모형이 수리모형실험의 결과를 잘 반영함을 볼 수 있었다(지, 2005).

일반적으로 투과성 방파제의 투과율 및 반사율은 파의 주기의 영향을 주로 받는다. 본 연구에서 제안한 다열 커튼월-파일 방파제의 주기에 따른 방파 성능을 개략적으로

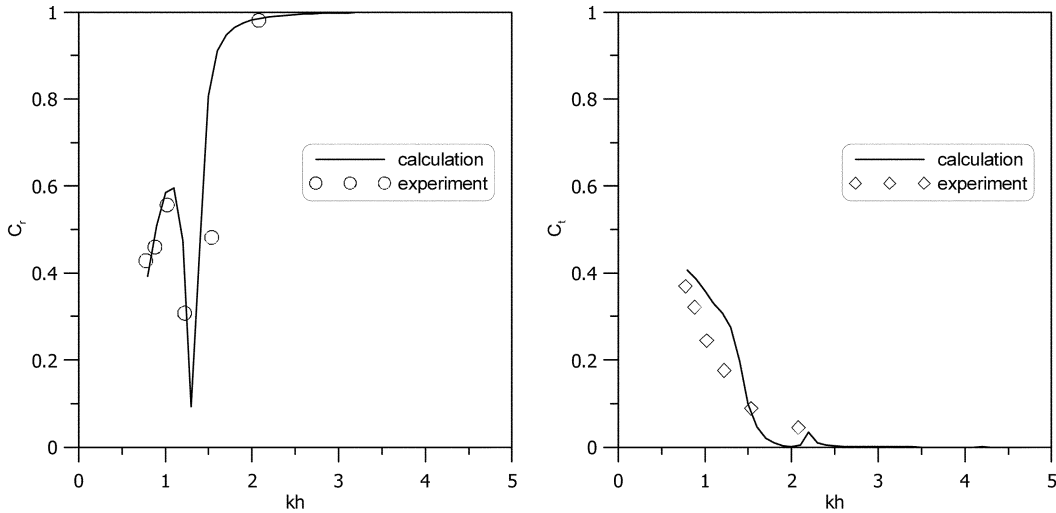


Fig. 9. Reflection and transmission coefficients as a function of kh ($d_1=0.5$ h, $d_2=0.5$ h, $d_3=0.5$, $r_1=0.5$, $r_2=0.4$, $r_2=0.25$, $x_2-x_1=0.5$ h, $x_3-x_2=1.5$ h).

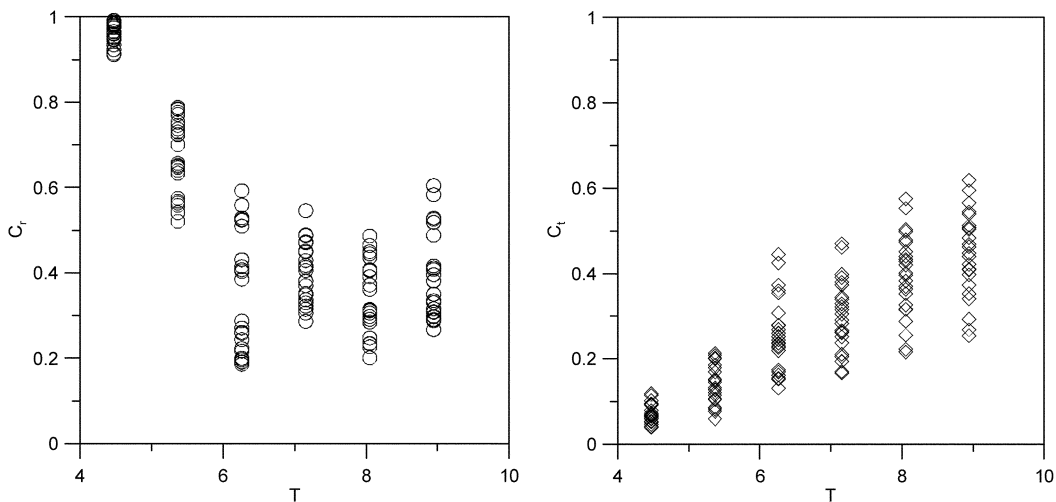


Fig. 10. Reflection and transmission coefficients versus wave periods in prototype breakwaters.

검토하기 위하여 2열 방파제에 대한 모든 실험 결과를 주기의 함수로 Fig. 10에 제시하였다. 실험 축척은 1:20으로 가정하여 현장에서의 수심은 10 m, 파고는 0.9~2.4 m, 주기는 4.5~8.9초가 된다. 동일한 주기에 대해서도 커튼월의 홀수, 파일 부분의 유공율, 방파제 열 사이의 간격 등이 다르기 때문에 반사율 및 투과율이 큰 범위에서 변동한다. 전체적인 경향은 주기가 증가함에 따라 반사율은 감소하고 투과율은 증가하는 경향을 보인다. 평균적으로 보았을 때 주기 6초 이하에서는 투과율이 0.2 미만이며, 주기 9초에

서도 약 0.4의 투과율을 보인다.

5. 방파제의 각종 변수들의 영향

수학적 모형을 이용하여 다열 커튼월-파일 방파제의 특성을 좀 더 자세히 살펴보기 위해 $d_1=0.5$ h, $d_2=0.5$ h, $r_1=0.5$, $r_2=0.5$ 그리고 $x_2-x_1=0.5$ h를 기준으로 열의 배치로 설정하고 d_2 , r_2 그리고 x_2-x_1 를 각각 변화시키면서 반사율 및 투과율의 변화를 알아보았다.

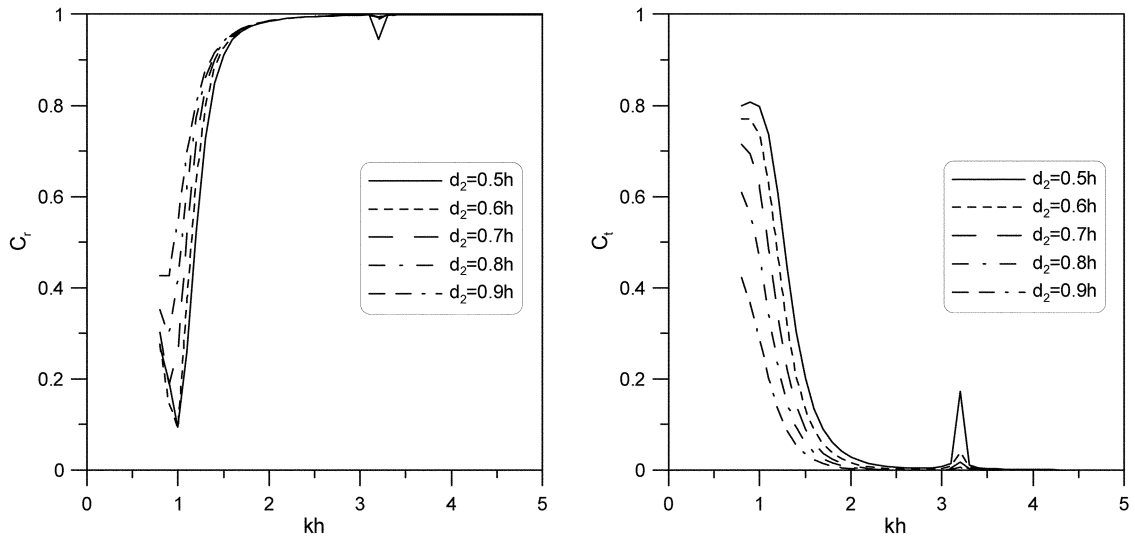


Fig. 11. Predicted hydrodynamic coefficients as a function of kh for various drafts of upper wall of second row.

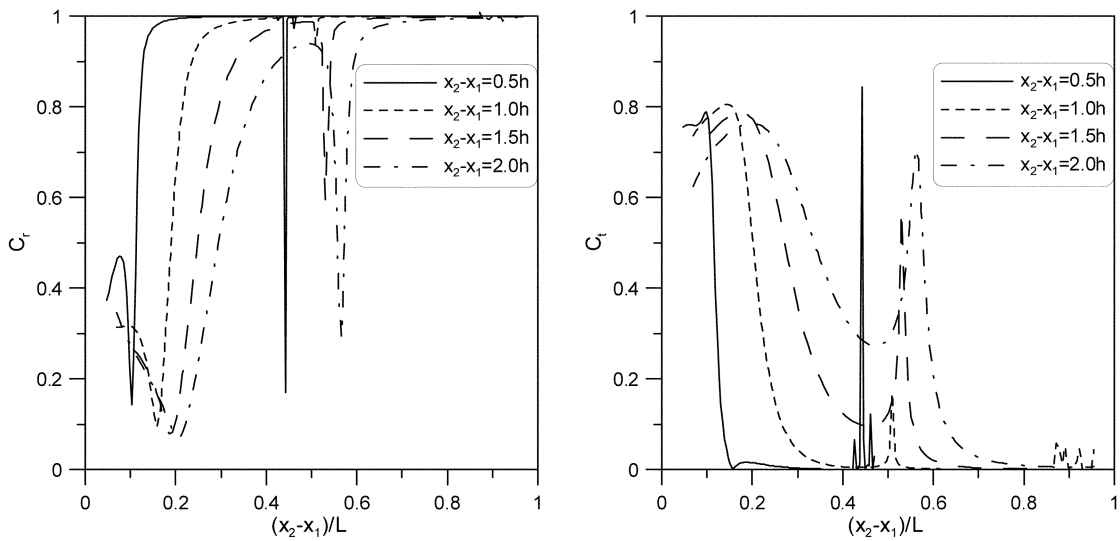


Fig. 12. Predicted hydrodynamic coefficients as a function of $(x_2 - x_1)/L$ for various distance between two rows.

우선 Fig. 11에서는 방파제 두 번째 열에서의 커튼월의 홀수(d_2)의 변화에 따른 반사율 및 투과율의 변화를 나타내었다. 반사율과 투과율의 전반적인 경향을 살펴보면, 파의 주기가 감소할수록, 즉 파의 상대수심이 증가할수록 반사율은 증가하고, 투과율은 감소하는 것을 볼 수 있다. 또한, 반사율은 상대수심이 감소함에 따라 감소하다가 다시 증가하는 것을 볼 수 있다. 특히 반사율에 비해서 투과율이 홀수의 변화에 따른 값의 상대적인 차이가 크다는 것도 알 수 있다. 상대수심(kh)이 약 3.2인 곳에서 반사율과

투과율이 다소 크게 변하는 것을 볼 수 있는데 이 때의 파장을 계산해보면 두 방파제 사이의 간격이 입사파 파장의 1/2이 되어 공명하는 지점임을 알 수 있다. 이를 확인하기 위하여 두 열 사이의 간격과 파장의 비에 따른 파의 반사율 및 투과율을 Fig. 12에 나타내었다. 이 그림에 나타난 모든 계산결과에 대해 반사율과 투과율이 $(x_2 - x_1)/L = 0.5$ 부근에서 급격하게 변화하는 것으로 보아 이러한 현상은 공명에 의한 증폭이라는 것을 다시 확인할 수 있었다.

Fig. 13에 방파제 두 번째 열의 파일부분의 유공율(r_2)

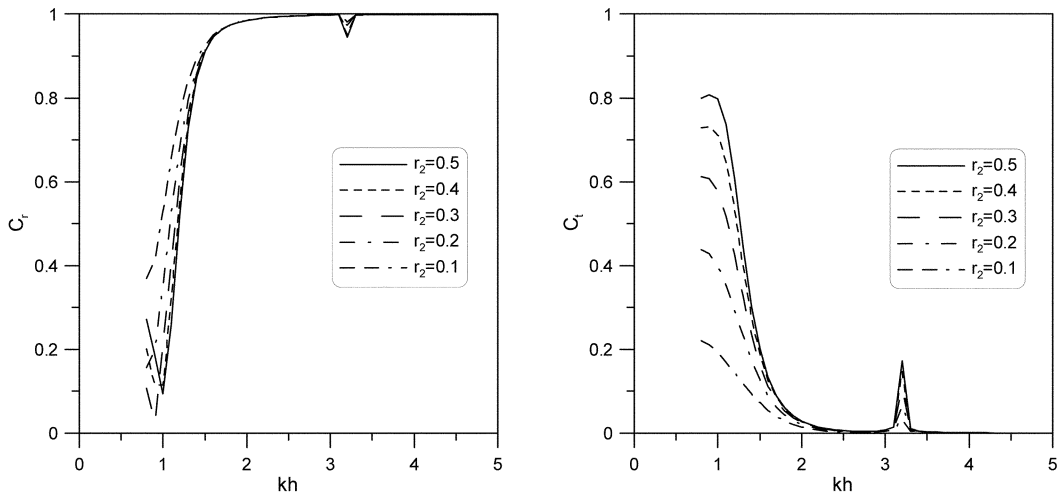


Fig. 13. Predicted hydrodynamic coefficients as a function of kh for various porosities between piles of second row.

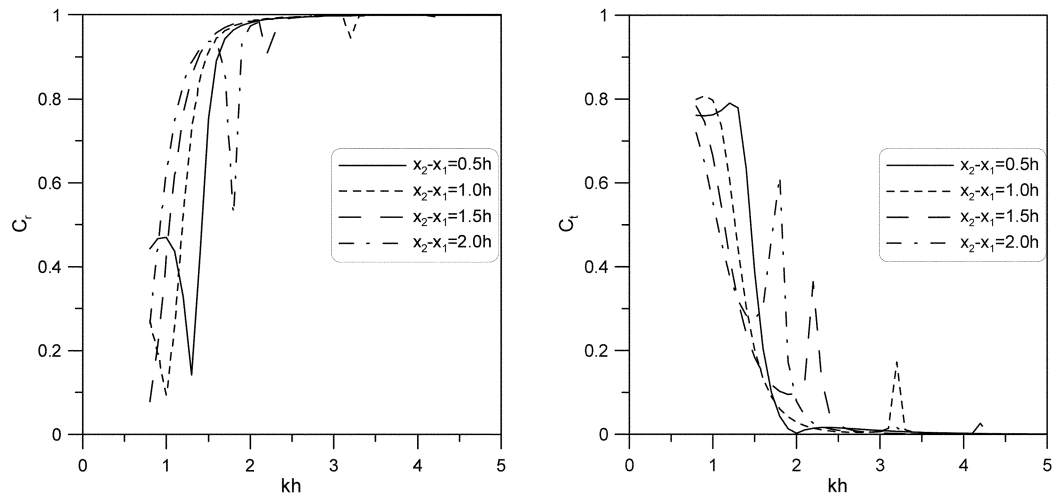


Fig. 14. Predicted hydrodynamic coefficients as a function of kh for various distances between two rows.

에 따른 반사율 및 투과율을 나타내었다. 파일의 유공율이 감소할수록 파의 반사율은 증가하고 투과율은 감소하는 것을 볼 수 있는데, 이는 Fig. 10에 도시한 커튼월의 홀수를 증가시키는 경우와 유사한 결과이다. Fig. 11과 13으로부터 반사율보다 투과율이 방파제 변수들의 변화에 더 민감한 것을 볼 수 있다.

방파제 두 열 사이의 간격(x_2-x_1)의 변화에 따른 반사율 및 투과율의 변화는 Fig. 14에 나타내었다. 두 열 사이의 간격이 커질수록 반사율 및 투과율을 나타낸 그래프가 전체적으로 저주파수 쪽으로 이동하는 현상을 보인다. 이는

두 열 사이의 간격이 달라지면서 이와 공명하는 파의 파장이 다르게 되어 반사율 및 투과율이 증폭되는 상대수심이 달라지기 때문이다. 또한, 반사율 및 투과율의 증폭 비율이 상대수심이 얇은 곳에서 더 크다. 이로 미루어 보아 장주기파의 경우는 파장과 열 사이 간격에 의한 공명이 반사율 및 투과율에 미치는 영향이 단주기파에 비해 상대적으로 크다는 것을 알 수 있다. 하지만, 공명에 의해 증폭된 부분을 제외하고는 각각의 경우에서 반사율과 투과율의 크기는 그다지 다르지 않음을 알 수 있다.

6. 결 론

Suh *et al.*(2006)이 제안한 커튼월-파일 방파제를 다열로 확장한 방파제에 대한 수학적 모형을 제안하였다. 또한 이를 검증하기 위해 규칙파 수리모형실험을 실시하였으며, 반사율과 투과율을 상대수심의 함수로 표현하여 분석하였다. 전체적으로 수리모형실험의 결과는 수학적 모형이 나타내는 특성들을 잘 재현하였다.

다열 커튼월-파일 방파제의 커튼월의 흡수, 파일 부분의 유공을 그리고 두 파일 사이의 간격을 변화시키면서 다열 커튼월-파일 방파제에서의 규칙파의 반사 및 투과 특성을 살펴보았다. 상대수심이 감소하면서 반사율은 감소하고 투과율은 증가하는 경향을 보였다. 다른 실험 조건들을 모두 고정시키고, 2열에서의 커튼월의 흡수만을 증가시키는 경우, 반사율은 조금 커지고 투과율은 조금 작아지지만, 상대수심에 따른 경향은 거의 일치하였다. 또한, 2열의 유공을만 변화시키는 경우에는, 유공율이 작을 때가 클 때보다 반사율은 크고 투과율은 작았는데, 이것은 커튼월의 흡수만을 변화시켰을 경우와 유사한 결과이다. 두 열 사이의 간격을 증가시키는 경우, 반사율 및 투과율의 그림이 전체적으로 상대수심이 작은 쪽으로 이동한 것을 제외하고는 그 영향이 크지 않았다. 한편, 파장이 두 열 사이의 간격의 2배가 되어 파가 공명하는 경우, 반사율과 투과율이 급격하게 변하는 현상이 관찰되었다. 3열 방파제의 경우에도 수학적 모형과 실험 결과가 대체로 잘 일치하였다.

본 실험 결과를 현장에서의 값으로 환산하여 보았을 때, 방파제의 기하학적 변수들에 의해 차이가 있기는 하지만, 평균적으로 주기 6초 이하에서는 투과율이 0.2 미만이며 주기 9초에서도 약 0.4의 투과율을 보여서 방파 성능이 양호하다.

이번 연구에서는 다열 커튼월-파일 방파제의 반사 및 투과 특성만을 분석하였다. 하지만 실제 현장에 적용하기 위해서는 방파제 전면에서 작용하는 파력과 모멘트, 그리고 처오름 높이 등의 기타 공학적 특성에 대한 실험을 실시하여 1열 방파제에서 다열 방파제로 확장함에 따른 장점을 검토할 필요가 있으며, 궁극적으로 불규칙파 모형 및 비스듬히 입사하는 파에 대한 모형으로 확장하여야 할 것이다.

감사의 글

본 논문은 해양수산부에서 시행한 “해양한국발전프로그램(KSGP) 연구개발사업”의 연구 결과임.

참고문헌

- 윤성범, 남두현, 한상철, 이종인 (2005). 유공벽의 파에너지 소모계수. 한국해양과학기술협의회 공동학술대회, 1890-1895.
- 지창환 (2005). 파일 지지된 다열 연직벽 방파제로부터의 규칙파의 반사 및 투과. 석사학위논문, 서울대학교.
- Isaacson, M., Premasiri, S. and Yang, G. (1998). Wave interactions with vertical slotted barrier. *J. Waterw., Port, Coastal Ocean Eng.*, ASCE, 124(3), 118-126.
- Kakuno, S. and Liu, P.L.-F. (1993). Scattering of water waves by vertical cylinders, *J. Waterw., Port, Coastal Ocean Eng.*, ASCE, 119(3), 302-322.
- Kim, B.H. (1998). Interactions of waves, seabed and structures. Ph.D. Dissertation, Seoul National University.
- Mei, C.C., Liu, P.L.-F. and Ippen, A.T. (1974). Quadratic loss and scattering of long waves, *J. Waterw., Harbors, and Coastal Eng. Div.*, ASCE, 100(3), 217-239.
- Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T. and Flannery, B.P. (1992). *Numerical Recipes in FORTRAN: the Art of Scientific Computing*. Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- Suh, K.D., Park, W.S. and Park, B.S. (2001). Separation of incident and reflected waves in wave-current flumes, *Coastal Engineering*, 43, 149-159.
- Suh, K.D., Shin, S. and Cox, D.T. (2006). Hydrodynamic Characteristics of Pile-Supported Vertical Wall Breakwaters. *J. Waterw., Port, Coastal Ocean Eng.*, 132(2), 83-96.
- Suh, K.D., Son, S. Y., Lee, J.I. and Lee, T.H. (2002). Calculation of irregular wave reflection from perforated-wall caisson breakwaters using a regular wave model. *Proc., 28th Int. Conf. Coast. Engrg.*, ASCE, Reston, Va., 1709-1721.

Received November 21, 2005

Accepted March 10, 2006

부록: 연립 방정식의 유도

$x=x_1$ 일 때, 즉 $j=1$ 일 때, 식 (6)과 (9)를 식 (10)에 대입하면,

$$-\mu_0 A_{00} \cos[\mu_0(h+z)] + \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m B_{0m} \cos[\mu_m(h+z)] = 0 \quad (29)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} -\mu_m A_{1m} \cos[\mu_m(h+z)] + \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m B_{1m} \exp[\mu_m(x_1-x_2)] \cos[\mu_m(h+z)]$$

$$= -\mu_0 A_{00} \cos[\mu_0(h+z)] + \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m B_{0m} \cos[\mu_m(h+z)] \quad (30)$$

이 성립한다. 식 (29)와 식 (30)에 $\cos[\mu_n(h+z)]$ 를 곱하여 적분구간 $-d_1$ 에서 0까지 적분하면,

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} B_{0m} \mu_m \int_{-d_1}^0 \cos[\mu_m(h+z)] \cos[\mu_n(h+z)] dz \\ &= \mu_0 A_{00} \int_{-d_1}^0 \cos[\mu_0(h+z)] \cos[\mu_n(h+z)] dz \quad (31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} \{B_{0m} + A_{1m} - B_{1m} \exp[\mu_m(x_1 - x_2)]\} \\ & \mu_m \int_{-d_1}^0 \cos[\mu_m(h+z)] \cos[\mu_n(h+z)] dz \\ &= \mu_0 A_{00} \int_{-d_1}^0 \cos[\mu_0(h+z)] \cos[\mu_n(h+z)] dz \quad (32) \end{aligned}$$

가 된다. 같은 방법으로 식 (6)과 (9)를 식 (11)에 대입하면,

$$\begin{aligned} & -\mu_0 A_{00} \cos[\mu_0(h+z)] + \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m B_{0m} \cos[\mu_m(h+z)] \\ &= iG_1 \left\{ A_{00} \cos[\mu_0(h+z)] + \sum_{m=0}^{\infty} B_{0m} \cos[\mu_m(h+z)] \right. \\ & \left. - \sum_{m=0}^{\infty} A_{1m} \cos[\mu_m(h+z)] \right. \\ & \left. - \sum_{m=0}^{\infty} B_{1m} \exp[\mu_m(x_1 - x_2)] \cos[\mu_m(h+z)] \right\} \quad (33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\mu_0 A_{00} \cos[\mu_0(h+z)] + \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m B_{0m} \cos[\mu_m(h+z)] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} -\mu_m A_{1m} \cos[\mu_m(h+z)] \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m B_{1m} \exp[\mu_m(x_1 - x_2)] \cos[\mu_m(h+z)] \quad (34) \end{aligned}$$

가 된다. 역시 같은 방법으로 식 (33)과 식 (34)에 $\cos[\mu_m(h+z)]$ 를 곱하여 적분구간 $-h$ 에서 $-d_1$ 까지 적분하면,

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} \{B_{0m} (\mu_m - iG_1) + iG_1 A_{1m} + iG_1 B_{1m} \exp[\mu_m(x_1 - x_2)]\} \\ & \cdot \int_{-d_1}^{-h} \cos[\mu_m(h+z)] \cos[\mu_n(h+z)] dz \\ &= (\mu_0 + iG_1) A_{00} \int_{-d_1}^{-h} \cos[\mu_0(h+z)] \cos[\mu_n(h+z)] dz \quad (35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} \{B_{0m} + A_{1m} - B_{1m} \exp[\mu_m(x_1 - x_2)]\} \\ & \cdot \mu_m \int_{-h}^{-d_1} \cos[\mu_m(h+z)] \cos[\mu_n(h+z)] dz \quad (36) \\ &= \mu_0 A_{00} \int_{-h}^{-d_1} \cos[\mu_0(h+z)] \cos[\mu_n(h+z)] dz \end{aligned}$$

이 된다.

다음으로 일 때 $x=x_2 \sim x_{j-1}$, 식 (9)를 식 (10)에 대입하면,

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} \{-\mu_m A_{j-1,m} \exp[-\mu_m(x_j - x_{j-1})] + \mu_m B_{j-1,m}\} \\ & \cdot \cos[\mu_m(h+z)] = 0 \quad (37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} \{-\mu_m A_{jm} + \mu_m B_{jm} \exp[\mu_m(x_j - x_{j+1})]\} \cdot \cos[\mu_m(h+z)] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \{-\mu_m A_{j-1,m} \exp[-\mu_m(x_j - x_{j-1})] + \mu_m B_{j-1,m}\} \\ & \cdot \cos[\mu_m(h+z)] \quad (38) \end{aligned}$$

와 같이 된다. 마찬가지로 식 (37)과 식 (38)에 $\cos[\mu_n(h+z)]$ 를 곱하여 적분구간 $-d_j$ 에서 0까지 적분하면,

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} \{-A_{j-1,m} \exp[-\mu_m(x_j - x_{j-1})] + B_{j-1,m}\} \mu_m \\ & \cdot \int_{-d_j}^0 \cos[\mu_m(h+z)] \cos[\mu_n(h+z)] dz = 0 \quad (39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} \{-A_{jm} + B_{jm} \exp[\mu_m(x_j - x_{j+1})]\} \\ & + A_{j-1,m} \exp[-\mu_m(x_j - x_{j-1})] - B_{j-1,m} \} \mu_m \\ & \cdot \int_{-d_j}^0 \cos[\mu_m(h+z)] \cos[\mu_n(h+z)] dz = 0 \quad (40) \end{aligned}$$

가 된다. $x=x_2 \sim x_{j-1}$ 일 때, 식 (9)를 식 (11)에 대입하면,

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} \{-\mu_m A_{j-1,m} \exp[-\mu_m(x_j - x_{j-1})] + \mu_m B_{j-1,m}\} \cos[\mu_m(h+z)] \\ &= iG_j \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} A_{j-1,m} \exp[-\mu_m(x_j - x_{j-1})] \cos[\mu_m(h+z)] \right. \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} B_{j-1,m} \cos[\mu_m(h+z)] \\ & - \sum_{m=0}^{\infty} A_{jm} \cos[\mu_m(h+z)] - \sum_{m=0}^{\infty} B_{jm} \exp[\mu_m(x_j - x_{j+1})] \\ & \left. \cos[\mu_m(h+z)] \right\} \quad (41) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ -\mu_m A_{jm} + \mu_m B_{jm} \exp[\mu_m(x_j - x_{j+1})] \cos[\mu_m(h+z)] \right\} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ -\mu_m A_{j-1,m} \exp[-\mu_m(x_j - x_{j-1})] + \mu_m B_{j-1,m} \right\} \\ & \quad \cos[\mu_m(h+z)] \end{aligned} \quad (42)$$

가 된다. 다시 식 (41)과 식 (42)에 $\cos[\mu_n(h+z)]$ 를 곱하여 적분구간 $-h$ 에서 $-d_j$ 까지 적분하면,

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \mu_m A_{j-1,m} \exp[-\mu_m(x_j - x_{j-1})] - \mu_m B_{j-1,m} \right. \\ & \quad + iG_j A_{j-1,m} \exp[-\mu_m(x_j - x_{j-1})] \\ & \quad + iG_j B_{j-1,m} - iG_j A_{jm} - iG_j B_{jm} \exp[\mu_m(x_j - x_{j+1})] \left. \right\} \\ & \quad \cdot \int_{-h}^{-d_j} \cos[\mu_m(h+z)] \cos[\mu_n(h+z)] dz = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ -A_{jm} + B_{jm} \exp[\mu_m(x_j - x_{j+1})] \right. \\ & \quad + A_{j-1,m} \exp[-\mu_m(x_j - x_{j-1})] - B_{j-1,m} \left. \right\} \\ & \quad \cdot \mu_m \int_{-h}^{-d_j} \cos[\mu_m(h+z)] \cos[\mu_n(h+z)] dz = 0 \end{aligned} \quad (44)$$

가 된다.

마지막으로 $x=x_j$ 일 때, 정합방정식 (10)은

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left\{ -\mu_m A_{j-1,m} \exp[-\mu_m(x_j - x_{j-1})] + \mu_m B_{j-1,m} \right\} \cos[\mu_m(h+z)] = 0 \quad (45)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} -\mu_m A_{jm} \cos[\mu_m(h+z)] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ -\mu_m A_{j-1,m} \exp[-\mu_m(x_j - x_{j-1})] + \mu_m B_{j-1,m} \right\} \\ & \quad \cos[\mu_m(h+z)] \end{aligned} \quad (46)$$

가 된다. 이 두 식에 $\cos[\mu_n(h+z)]$ 를 곱하여 적분구간 $-d_j$ 에서 0까지 적분하면,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left\{ -A_{j-1,m} \exp[-\mu_m(x_j - x_{j-1})] + B_{j-1,m} \right\} \mu_m \int_{-d_j}^0 \cos[\mu_m(h+z)] \cos[\mu_n(h+z)] dz = 0 \quad (47)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left\{ A_{j-1,m} \exp[-\mu_m(x_j - x_{j-1})] + B_{j-1,m} - A_{jm} \right\} \mu_m \int_{-d_j}^0 \cos[\mu_m(h+z)] \cos[\mu_n(h+z)] dz = 0 \quad (48)$$

가 된다. $x=x_j$ 일 때, 정합방정식 (11)은

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ -\mu_m A_{j-1,m} \exp[-\mu_m(x_j - x_{j-1})] + \mu_m B_{j-1,m} \right\} \\ & \quad \cos[\mu_m(h+z)] \\ &= iG_j \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} A_{j-1,m} \exp[-\mu_m(x_j - x_{j-1})] \cos[\mu_m(h+z)] \right. \\ & \quad \left. + \sum_{m=0}^{\infty} B_{j-1,m} \cos[\mu_m(h+z)] - \sum_{m=0}^{\infty} A_{jm} \cos[\mu_m(h+z)] \right\} \quad (49) \\ & \quad \sum_{m=0}^{\infty} -\mu_m A_{jm} \cos[\mu_m(h+z)] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ -\mu_m A_{j-1,m} \exp[-\mu_m(x_j - x_{j-1})] + \mu_m B_{j-1,m} \right\} \\ & \quad \cos[\mu_m(h+z)] dz = 0 \end{aligned} \quad (50)$$

로 나타낼 수 있다. 식 (49)와 식 (50)에 $\cos[\mu_n(h+z)]$ 를 곱하여 적분구간을 $-h$ 에서 $-d_j$ 로 적분하면

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \mu_m A_{j-1,m} \exp[-\mu_m(x_j - x_{j-1})] - \mu_m B_{j-1,m} \right. \\ & \quad + iG_j A_{j-1,m} \exp[-\mu_m(x_j - x_{j-1})] + iG_j B_{j-1,m} - iG_j A_{jm} \left. \right\} \\ & \quad \int_{-h}^{-d_j} \cos[\mu_m(h+z)] \cos[\mu_n(h+z)] dz = 0 \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ -A_{jm} + A_{j-1,m} \exp[-\mu_m(x_j - x_{j-1})] - B_{j-1,m} \right\} \mu_m \\ & \quad \int_{-h}^{-d_j} \cos[\mu_m(h+z)] \cos[\mu_n(h+z)] dz = 0 \end{aligned} \quad (52)$$

가 된다.

식 (31)과 식 (35)를 더하면

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} [\mu_m f_{mn}(-d_1, 0) + (\mu_m - iG_1) f_{mn}(-h, -d_1)] B_{0m} \\ & \quad + iG_1 f_{mn}(-h, -d_1) A_{1m} \\ & \quad + iG_1 \exp(-\mu_m \Delta x_1) f_{mn}(-h, -d_1) B_{1m}] \\ &= \mu_0 A_{00} \{ f_{0n}(-d_1, 0) + f_{0n}(-h, -d_1) \} + iG_1 A_{00} f_{0n}(-h, -d_1) \\ & \quad \text{for } n = 0, 1, 2, \dots, \infty \end{aligned} \quad (53)$$

이다. 같은 방법으로 식 (32)와 식 (36)을 더하면,

$$\sum_{m=0}^{\infty} [\mu_m \{ f_{mn}(-d_1, 0) + f_{mn}(-h, -d_1) \}] B_{0m}$$

$$\begin{aligned}
 & +\mu_m \{ f_{mn}(-d_1, 0) + f_{mn}(-h, -d_1) \} A_{1m} \\
 & -\mu_m \exp(-\mu_m \Delta x_1) \{ f_{mn}(-d_1, 0) + f_{mn}(-h, -d_1) \} B_{1m}] \\
 & = \mu_0 A_{00} \{ f_{0n}(-d_1, 0) + f_{0n}(-h, -d_1) \} \\
 \text{for } n = 0, 1, 2, \dots, \infty
 \end{aligned} \tag{54}$$

을 얻을 수 있으며, 식 (39)와 식 (43), 식 (40)과 식 (44)를 각각 더하면,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=0}^{\infty} [\exp(-\mu_m \Delta x_{j-1}) \{ -\mu_m f_{mn}(-d_j, 0) + \mu_m f_{mn}(-h, -d_j) \\
 & + iG_j f_{mn}(-h, -d_j) \} A_{j-1,m} + \{ \mu_m f_{mn}(-d_j, 0) - \mu_m f_{mn}(-h, -d_j) \\
 & + iG_j f_{mn}(-h, -d_j) \} B_{j-1,m} - iG_j f_{mn}(-h, -d_j) A_{jm} \\
 & - iG_j \exp(-\mu_m \Delta x_j) f_{mn}(-h, -d_j) B_{jm}] = 0 \\
 \text{for } n = 0, 1, 2, \dots, \infty
 \end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=0}^{\infty} [\mu_m \exp(-\mu_m \Delta x_{j-1}) \{ f_{mn}(-d_j, 0) + f_{mn}(-h, -d_j) \} A_{j-1,m} \\
 & - \mu_m \{ f_{mn}(-d_j, 0) + f_{mn}(-h, -d_j) \} B_{j-1,m} \\
 & - \mu_m \{ f_{mn}(-d_j, 0) + f_{mn}(-h, -d_j) \} A_{jm} \\
 & + \mu_m \exp(-\mu_m \Delta x_j) \{ f_{mn}(-d_j, 0) + f_{mn}(-h, -d_j) \} B_{jm}] = 0
 \end{aligned}$$

$$\text{for } n = 0, 1, 2, \dots, \infty \tag{56}$$

을 얻을 수 있다. 마지막으로, 식 (47)과 식 (51), 식 (48)과 식 (52)를 각각 더하면, 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=0}^{\infty} [\exp(-\mu_m \Delta x_{j-1}) \{ -\mu_m f_{mn}(-d_j, 0) + \mu_m f_{mn}(-h, -d_j) \\
 & + iG_j f_{mn}(-h, -d_j) \} A_{j-1,m} + \{ \mu_m f_{mn}(-d_j, 0) - \mu_m f_{mn}(-h, -d_j) \\
 & + iG_j f_{mn}(-h, -d_j) \} B_{j-1,m} - iG_j f_{mn}(-h, -d_j) A_{jm}] = 0 \\
 \text{for } n = 0, 1, 2, \dots, \infty
 \end{aligned} \tag{57}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=0}^{\infty} [\mu_m \exp(-\mu_m \Delta x_{j-1}) \{ f_{mn}(-d_j, 0) + f_{mn}(-h, -d_j) \} A_{j-1,m} \\
 & - \mu_m \{ f_{mn}(-d_j, 0) + f_{mn}(-h, -d_j) \} B_{j-1,m} \\
 & - \mu_m \{ f_{mn}(-d_j, 0) + f_{mn}(-h, -d_j) \} A_{jm}] = 0 \\
 \text{for } n = 0, 1, 2, \dots, \infty
 \end{aligned} \tag{58}$$

식 (53)부터 (58)까지가 2절에서 미지수를 구하기 위한 연립 방정식으로 사용된다.