논문 2006-43IE-3-5

입출력 변환을 이용한 선형 시변 시스템의 제어기 설계

(The Controller Design for a Class of Time-Varying Linear System via I/O Transformation)

조 도 현*, 이 상 훈**, 이 종 용**

(Do-Hyeoun Cho, Sang-Hun Lee, and Jong-Yong Lee)

요 약

본 논문에서는 선형 시변 시스템에 대하여 입출력 변환을 적용하여 선형 시불변 시스템을 얻기 위한, 입출력 변환의 필요충분조건을 제시한다. 변환된 시스템은 다중 적분기를 갖는 시스템으로 표현되며, 예제를 통하여 제안된 알고리즘을 확인하고, 검토하였다.

Abstract

In this paper, we consider the input-output(I/O) transformation for the time-varying linear system and get the time-invariying linear system. And we present the necessary sufficient condition for the I/O transformation. The transformed system represent the system with the multiple integral. We verify the proposal algorithm via the example and examine.

Keywords : Linear Time-Varying Systems, I/O Transformation

I. 서 론

제어 이론이 발달하면서, 선형 시변 시스템에 대한 해석이 꾸준히 제시되어왔다. 매개변수 종속 제어 문제에 대한 전통적인 해석은 대표적으로 매개변수가 천천히 변동되는 경우를 고려하여 왔다. 그러나 선형 시변 시스템에 대한 해석이 기본적으로 매개변수가 천천히 변한다는 조건의 제한을 가지고 있다.[1-2,7] 최근에는 빠른 매개변수의 변화에 대한 문제가 비선형 시스템과 선형 시스템에 대하여 고려되고 있으며, 또한 시변 비선형 시스템에 대한 상태 피드백 선형화 문제가 1990년대 이후부터 연구되어 왔다.

이를 이용하여 선형 시변 시스템에 대한 해석을 가능하게 하였다.[3-5] 그러나 입력과 출력에 대한 시변 시스템에 대한 해석을 이루어지지 않았다.

그래서 본 논문에서는 기존의 비선형 시스템에 대한 입출력 변환을 시간 함수를 가지는 입출력 변환으로 확장하여, 선형 시변 시스템에 대한 입출력 변환을 위한 필요충분조건을 제시하고 증명하였으며, 정규형을 표현하였다. 또한 언급된 입출력 변환 알고리즘에 대하여, Ⅲ장에서는 예제를 통하여 확인하고, Ⅳ장에서는 결론을 서술하였다.

Ⅱ. 선형 시변 시스템의 입출력 변환

다음과 같은 단일 입출력의 선형 시변 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B_2(t)u \\ y &= C_2(t)x \end{aligned} \qquad (1)$$

* 정회원, 인하공업전문대학 디지털전자정보과
(Dept. of Digital Electronic & Information, Inha Technical College)
** 정회원, 광운대학교 교양학부
(Division of General Education, Kwang-woon University)
※ 이 논문은 2006년도 광운대학교 교내 학술 연구비 지원에 의해 연구되었음
접수일자L 2006년5월23일, 수정완료일: 2006년8월28일

여기서, $x \in R^n$, u , y 는 각각 상태 벡터, 제어 입력, 출력을 나타내고, $A(t) \in R^{n \times n}$, $B_2(t) \in R^{n \times 1}$ 이며, $C_2(t) \in R^{1 \times n}$ 이며, 각 요소는 시간 t의 유계함수이다. 시간 $t = t_0$ 일 때, $x(t_0) = x_0$ 이다.

식(1)로 표현된 선형 시변 시스템에 대한 입력-출력 변환을 고려하기 위하여, 식(1)을 다음과 같이 표현하자.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(x,t) + \beta_2(t)u \\ y &= \gamma_2(x,t) \end{aligned} \tag{2}$$

여기서, $A(t)x = [A_1^T, A_2^T, \cdots A_n^T]^T x$ 라 하면, $\alpha_i(x,t) \triangleq A_i x = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, x_j$ 이고, $\alpha(x,t) = [\alpha_1(x,t), \alpha_2(x,t), \cdots, \alpha_n(x,t)]^T \in R^{n \times 1}$ 이다.

그리고 $C_2(t)x = [C_{21}(t), C_{22}(t), \cdots, C_{2n}(t)]^T$ 이면, $\gamma_2(x,t) \triangleq \sum_{j=1}^{n} C_{2j}(t) x_j$ 이다.

표현의 간략화를 위하여 시간 t 를 생략한다.

먼저, 식 (1)에서 출력 y 를 시간에 대하여 미분하면, 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{dy}{dt} = \frac{dC_2}{dt}x + C_2\frac{dx}{dt} \\ &= [\frac{dC_2}{dt} + C_2A]x + C_2B_2u \\ &= \frac{\partial \gamma_2}{\partial t} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial x}\dot{x} \\ &= \frac{\partial \gamma_2}{\partial x}\alpha + \frac{\partial \gamma_2}{\partial t} + \left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial x}\beta + \frac{\partial \gamma_2}{\partial t}0\right)u \end{aligned} \tag{3}$$

여기서, $X = [x^T, t]^T$ 이고, $\overline{A}(x,t) = [\alpha(x,t)^T, 1]^T$ 이며, $\overline{B_2}(x,t) = [\beta_2(t), 0]^T$ 이다. 그리고 기호 L 은 Lie 도함수를 의미한다.

출력의 1차 도함수 식(3)이 입력 u에 대하여 독립이라면, $u \neq 0$ 이므로 다음이 성립한다.

$$C_2B_2 = L_{\overline{B_2}}\gamma_2 = 0 \tag{4}$$

식(4)가 성립하면, 식(3)은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \left(\frac{dC_2}{dt} + C_2A\right)x = \frac{\partial \gamma_2}{\partial X}[\alpha^T, 1]^T \\ &= L_{\overline{A}}\gamma_2 \end{aligned} \tag{5}$$

다시 식(5)를 시간에 대하여 미분하면 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{dC_2}{dt} + C_2A\right)x + \left(\frac{dC_2}{dt} + C_2A\right)\frac{dx}{dt} \\ &= \frac{\partial\left(L_{\overline{A}}\gamma_2\right)}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\left(L_{\overline{A}}\gamma_2\right)}{\partial t} \\ &= L_{\overline{A}}^2\gamma_2 = L_{\overline{B_2}}L_{\overline{A}}\gamma_2 u \end{aligned} \tag{6}$$

식(6)에서 출력 y 의 2차 도함수가 입력 u 에 대하여 독립이라면 다음이 성립한다.

$$\left(\frac{dC_2}{dt} + C_2A\right)B_2 = L_{\overline{B_2}}L_{\overline{A}}\gamma_2 = 0 \tag{7}$$

식(7)이 성립하면 식(6)은 다음과 같이 표현된다.

$$\ddot{y} = \left(\frac{d^2C_2}{dt^2} + \frac{dC_2A}{dt} + \frac{dC_2}{dt}A + C_2A^2\right)x = L_{\overline{A}}^2\gamma_2 \tag{8}$$

식(8)을 다시 시간 t 에 대하여 미분하여 정리하면, 다음과 같다.

$$y^{(3)} = L_{\overline{A}}^3\gamma_2 + L_{\overline{B_2}}L_{\overline{A}}^2\gamma_2 \tag{9}$$

식(9)가 입력 u에 대하여 독립이라면, 다음이 성립한다.

$$L_{\overline{B_2}}L_{\overline{A}}^2\gamma_2 = \left(\frac{d^2C_2}{dt^2} + \frac{dC_2A}{dt} + \frac{dC_2}{dt}A + C_2A^2\right)B_2 = 0 \tag{10}$$

이와 같은 절차를 어떤 양의 정수 r에 대하여, $L_{\overline{B_2}}L_{\overline{A}}^{r-1}\gamma_2 \neq 0$ 이 성립할 때까지 반복 수행한다. 즉, 입력 u 에 대하여 종속인 경우, 식(11)과 식(12)가 성립한다.

$$L_{\overline{B_2}}L^i_{\overline{A}}\gamma_2 = 0\,,\ \forall\ i = 0, 1, 2, \cdots, r-2 \tag{11}$$

$$L_{\overline{B_2}}L_{\overline{A}}^{r-1}\gamma_2 \neq 0 \tag{12}$$

그리고, 입력 u 를 아래와 같이 설정하자.

$$u = \frac{1}{L_{\overline{B_2}}L_{\overline{A}}^{r-1}\gamma_2}\left(-L_{\overline{A}}^r\gamma_2 + v\right) \tag{13}$$

식(13)을 이용하면, 새로운 입력 v 와 출력 y 의 관계는 r 개의 적분기가 직렬로 연결된 선형 시불변 시스템이 된다. 즉, 임의의 개집합(open set) 안의 모든 상태 x 와 시간 t 에 대하여, 식 (11)과 식(12)가 성립하도록 하

는 가장 적은 양의 정수 r이 존재한다면, 선형 시변 시스템 식(1)은 상대차수 r을 가진다고 한다. 또한 $r = n$이면, 다음이 성립한다.

$$y^{(n)} = v \tag{14}$$

여기서, 새로운 입력 v는 다음과 같이 표현된다.

$$v = L_{\overline{A}}^{n}\gamma_2 + L_{\overline{B_2}}L_{\overline{A}}^{n-1}\gamma_2 u \tag{15}$$

식(1)의 선형 시변 시스템이 식(14)의 선형 시불변 시스템으로 입출력 완전 변환은, 상태 피드백 입력 상태 변환과 등가 이며, 이와 같이 유도된 내용은 다음과 같은 결과로 표현된다.

정리 1 : 선형 시변 시스템 식(1)이 입력-출력 선형 시불변으로 변환하기 위한 필요충분조건은, 다음의 식(16)과 식(17)을 만족하는 양의 정수 r이 존재하는 것이다.

$$L_{\overline{B_2}}L^{i}_{\overline{A}}\gamma_2 = 0\,,\ \forall\ i = 0, 1, 2, \cdots, r-2 \tag{16}$$

$$< d\gamma_2, ad_{\overline{A}}^{r-1}(\overline{B_2}) > \ = L_{\overline{B_2}}L_{\overline{A}}^{r-1}\gamma_2 \neq 0 \tag{17}$$

증명 : 이 정리의 증명은 비선형 시스템의 입출력 선형화에 대한 증명을 이용한다[6].

먼저 충분조건에 대하여 살펴보면, 선형 시변 시스템 식(1)을 시간 t에 대하여 연속 미분하고, 조건 식 (16)과 식(17)을 적용하고, 언급한 입력 식(13)을 적용하면, 식(18)이 성립한다.

$$\frac{d^r y}{dt^r} = y^{(r)} = v \tag{18}$$

그러므로 선형 시변 시스템은 입력-출력의 선형 시불변 시스템이 되었다.

다음으로 필요조건에 대하여 살펴보기 위하여 다음과 같이 가정하자.

$$< d\gamma_2, ad_{\overline{A}}^{k-1}(\overline{B_2}) > \ = 0\ ,\ \forall k \in N \tag{19}$$

여기서, N은 임의 양의 정수로 $\gamma - 1$을 포함한다.

식 (19)에 대하여 Leibniz형의 공식을 적용하면 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} &< dL_{\overline{A}}^{k-1}(\gamma_2), \overline{B_2} \geq L_{\overline{A}}^{k-1}(< d\gamma_2, \overline{B_2} >) \\ &-(k-1)L_{\overline{A}}^{k-2}(< d\gamma_2, ad_{\overline{A}}\overline{B_2} >) \\ &+\frac{(k-1)(k-2)}{2!}L_{\overline{A}}^{k-3}(< d\gamma_2, ad_{\overline{A}}^{2}\overline{B_2} >) \\ &-\frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{3!}L_{\overline{A}}^{k-4}(< d\gamma_2, ad_{\overline{A}}^{3}\overline{B_2} >) \\ &+ \cdots + (-1)^{k-1} < d\gamma_2, ad_{\overline{A}}^{k-1}\overline{B_2} > \ = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

식(20)에 식(19)를 대입하면, 다음 식(21)과 식(22)가 성립한다.

$$\frac{d^k y}{dt^k} = L_{\overline{A}}^{k}(\gamma_2)\,,\ \forall\ k \in N \tag{21}$$

$$D_r y = \sum_{k=0}^{r}\lambda_k\frac{d^k y}{dt^k} = \sum_{k=0}^{r}\lambda_k L_{\overline{A}}^{k}(\gamma_2) \tag{22}$$

식(22)에서 D_r은 r회 연속 시간에 대한 미분 연산자를 나타낸다.

모든 r과 집합 $\{\lambda_k\}$에 대하여 , 식 (22)는 상태 x와 시간 t의 함수이므로, 입력 u에 대하여 독립이다. 그리고, $D_r y = v$를 만족하는 새로운 입력 v는 입력 u에 대한 편도함수가 영이며, 입력 u에 대한 가역 함수가 존재하지 않으므로, 선형 시변 시스템은 입출력에 의한 선형 시불변 시스템으로 변환이 불가능 하다. 그러므로 선형 시변 시스템이 입력-출력 선형 시불변 시스템으로 변환하기 위하여는 $< d\gamma_2, ad_{\overline{A}}^{r-1}(\overline{B_2}) > \neq 0$ 이 만족하여야 한다. 이상으로 필요충분조건에 대한 증명하였다.

Q.E.D

식(4), (7) 및 식(10)의 좌변 항에서 B_2 항을 제외한 나머지 항을 정리하면 다음과 같다.

$$C_2\,,\ (\frac{dC_2}{dt} + C_2 A)\,,\ (\frac{d^2 C_2}{dt^2} + \frac{dC_2 A}{dt} + \frac{dC_2}{dt}A + C_2 A^2)$$

상대 차수가 시스템의 차수와 같을 때까지 입출력 변환을 얻기 위한 이 항들을 계속 정리하면, 선형 시변 시스템의 가관측성 행렬과 등가이다.

다음으로, 상대차수의 정의는 일반적으로 모든 시스템에 성립하는 것은 아니며, 시스템의 상대차수 r이 상대차수 n보다 적은 경우는 입출력의 부분 변환만 가능

하다. 이러한 선형 시변 시스템의 정규형(normal form)을 고려한다. 즉, 식(1)의 선형 시변 시스템에 대하여, 입출력 변환 $\gamma_2, L_{\overline{A}}\gamma_2, \cdots, L_{\overline{A}}^{r-1}\gamma_2$ 를 정규형이라 불리 우는 새로운 상태를 사용하면, 시스템의 정규형은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \xi_{r-1}\\ \xi_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\xi_2\\ \xi_3\\ \cdot\\ \cdot\\ \xi_r\\ a(\xi,\eta)+b(\xi,\eta)u\end{bmatrix} \tag{23}$$

$$\dot{\eta}=\omega(\xi,\eta) \tag{24}$$

$$y=\xi_1 \tag{25}$$

정규형의 r 개 방정식 (23)은 표준형(companion form)이고, 다음의 $n-r$ 개 방정식 (24)는 시스템의 입력 u 와 직접 관계없는 방정식이다. 그리고 식 (13)에 의하여 $a(\zeta,\eta)$, $b(\zeta,\eta)$ 는 다음과 같다.

$$a(\xi,\eta)=L_{\overline{A}}^{r}\gamma_2,\ b(\xi,\eta)=L_{\overline{B_2}}L_{\overline{A}}^{r-1}\gamma_2 \tag{26}$$

이와 같이 식(1)의 선형 시변 시스템이 정규형으로 변환되는 것을 보이는 것은, 새로운 상태 ξ 가 독립이라는 것을 보이는 것과 $n-r$ 개의 다른 상태 η 가 발견되어야 한다. 이과정의 증명은 비선형 시스템의 입출력 선형 변환에서 정규형을 증명하는 것과 등가이다[6].

이 과정을 다음 그림 1과 같이 표현된다.

여기서, 식(13)으로부터, 시스템의 입력 u 는 식(27)과 같다.

$$\begin{aligned}u&=\frac{-L_{\overline{A}}^{r}\gamma_2}{L_{\overline{B_2}}L_{\overline{A}}^{r-1}\gamma_2}+\frac{v}{L_{\overline{B_2}}L_{\overline{A}}^{r-1}\gamma_2}\\ &=a_c(x,t)+b_c(x,t)v\end{aligned} \tag{27}$$

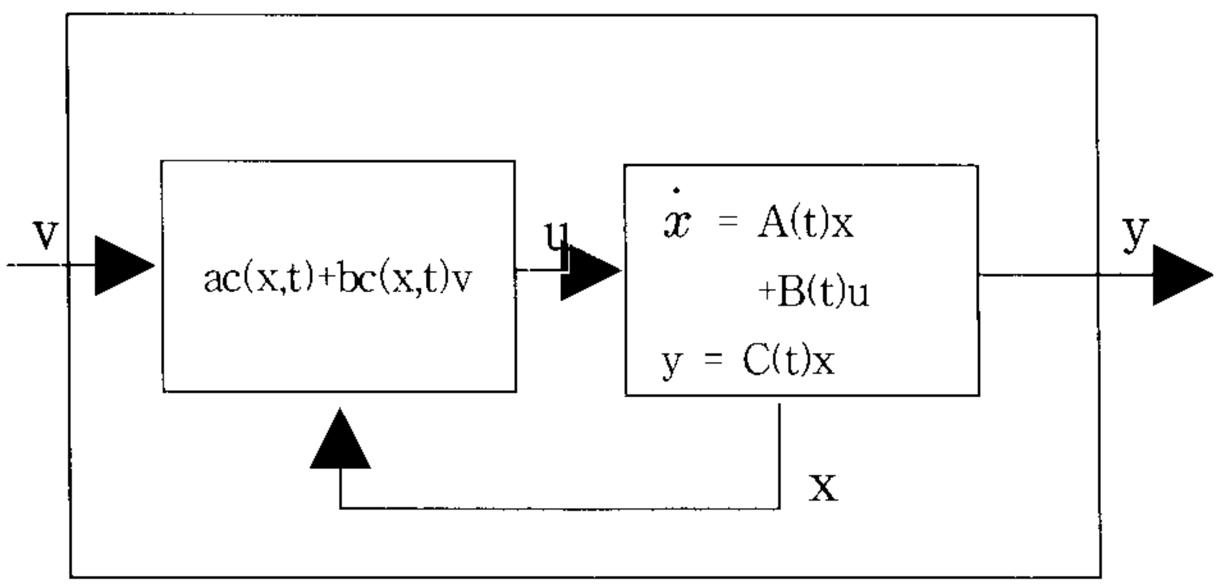


그림 1. 선형 시변 시스템에 대한 입출력 변환 모델
Fig. 1. The Input/Output Transformation Model for Linear Time-Varying System.

이때 입출력 변환(Global Diffeomorphism)은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned}
T_1&=\xi_1=\gamma_2(x,t)=C_2(t)x=\omega_0(t)x\\
T_2&=\xi_2=L_{\overline{A}}\gamma_2(x,t)=\left(\frac{dC_2}{dt}+C_2A\right)x=\omega_1(t)x\\
T_3&=\xi_3=L_{\overline{A}}^2\gamma_2(x,t)\\
&=\left(\frac{d^2C_2}{dt^2}+2\frac{dC_2}{dt}A+C_2\frac{dA}{dt}+C_2A^2\right)x\\
&=\left(\frac{d\omega_1}{dt}+\omega_1A\right)x=\omega_2(t)x\\
T_4&=\xi_4+L_{\overline{A}}^3\gamma_2(x,t)=\left(\frac{d\omega_2}{dt}+\omega_2A\right)x=\omega_3(t)x\\
&\vdots\\
T_r&=\xi_r=L_{\overline{A}}^{r-1}\gamma_2(x,t)=\left(\frac{d\omega_{r-2}}{dt}+\omega_{r-2}A\right)x\\
&=\omega_{r-1}(t)x\\
\eta_{r+1}&=T_{r+1}(x,t)\\
&\vdots\\
\eta_n&=T_n(x,t)
\end{aligned} \tag{28}$$

여기서, $T_j(0)=0,\ \gamma+1\le j\le n$ 이고, $\frac{\partial T_j}{\partial X}ad_{\overline{A}}^{i}\overline{B_2}=0,\ 0\le i\le\gamma-1$ 이다.

특히 완전 입출력 시불변 변환을 위한 입출력 변환은 다음과 같이 된다.

$$T=\xi=Wx \tag{29}$$

여기서, 변환 $W=\left[\omega_0^T,\omega_1^T,\cdots,\omega_n^T\right]^T$ 이다

다음으로 예제를 통하여 제안된 내용을 검증한다.

III. 예 제

1. 예제 1[5]

먼저 입출력 선형화가 완전하게 이루어지는 시스템에 대하여 살펴본다.

다음과 같은 선형 시변 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}\sin t^2+1, & 2\\ 0, & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u\\
y&=[1,0]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{30}$$

식(30)의 출력 y 를 시간 t 에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = (\sin t^2 + 1)x_1 + 2x_2 \quad (31)$$

식(31)이 입력 u 에 대하여 독립이므로, 식(31)을 시간 t 에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\ddot{y} = \{2t\cos t^2 + (\sin t^2 + 1)^2\}x_1 + 2(\sin t^2 + 1)x_2 + 2u = v \quad (32)$$

식(32)는 입력 u 에 대하여 종속이므로 상대 차수는 2이고, 새로운 입력 v 를 도입하여 등가로 두면, 출력은 외부 입력에 대한 2중 적분기로 표현된다.

이때, 입력 u 는 다음과 같다.

$$u = -\frac{1}{2}[\{2t\cos t^2 + (\sin t^2 + 1)^2\}x_1 + 2(\sin t^2 + 1)x_2 - v] \quad (33)$$

그리고 식(28)에 따른 입출력 변환은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & ,0\\ \sin t^2+1 & ,2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & ,0\\ -(\sin t^2+1) & ,1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix} \quad (34)$$

입출력 변환 식(34)에 의한, 식(30)의 변환 시스템은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix}\dot{\xi}_1\\ \dot{\xi}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & , 1\\ 0 & , 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}v$$
$$y = \xi_1 \quad (35)$$

선형 시불변 시스템으로 변환된 식(35)에 선형 제어칙 $v = k_1\xi_1 + k_2\xi_2$ 를 적용할 수 있다.

2. 예제 2[6]

다음과 같은 선형 시변 시스템을 고려하자.

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1+1.5\cos^2 t & ,1-1.5\sin t\cos t\\ -1-1.5\sin t\cos t & ,-1+1.5\sin^2 t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$
$$y = [1\ ,0]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \quad (36)$$

표현을 간략화하기 위하여, $\theta_1(t) = 1.5\cos^2 t$, $\theta_2(t) = 1.5\sin t\cos t$, $\theta_3(t) = 1.5\sin^2 t$ 로 표현하고, 출력 y 를 시간에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = (\theta_1(t) - 1)x_1 + (1 - \theta_2(t))x_2 \quad (37)$$

식(37)이 입력 u 에 대하여 독립이므로, 식(37)을 시간에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\ddot{y} = {} & [\dot{\theta}_1(t) + (\theta_1(t)-1)^2 + (1-\theta_2(t))(-1-\theta_2(t))]x_1\\ & + [-\dot{\theta}_2(t) + (\theta_1(t)-1)(1-\theta_2(t))\\ & + (1-\theta_2(t))(-1+\theta_3(t))]x_2\\ & + (1-\theta_2(t))u = v\end{aligned} \quad (38)$$

식(38)은 입력 u 에 대하여 종속이므로 상대 차수는 2이고, 새로운 입력 v 를 도입하여, 등가로 두면, 출력은 외부 입력에 대한 2중 적분기로 표현된다.

이때, 입력 u 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}u = {} & (1+\theta_2(t))x_1 + (2-\theta_1(t)-\theta_3(t))x_2\\ & - (\dot{\theta}_1(t) + (\theta_1(t)-1)^2)x_1\end{aligned} \quad (39)$$

그리고 식(28)에 따른 입출력 변환은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & , 0\\ \theta_1(t)-1 & , 1-\theta_2(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \quad (40)$$

입출력 변환 식(40)에 의한, 식(36)의 변환 시스템은 식(35)와 같이 표현된다.

같은 방법으로 선형 시불변 시스템으로 변환된 식(35)에 선형 제어칙 $v = k_1\xi_1 + k_2\xi_2$ 를 적용할 수 있다.

3. 예제 3

다음으로 입출력 선형화가 완전하게 이루어지지 않고, 정규화를 이루는 과정에 대하여 살펴본다.

다음과 같은 선형 시변 시스템을 고려하자.

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}t & , 1\\ 1 & , t^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-t\\ t^2\end{bmatrix}u$$
$$y = [1\ , 0]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \quad (41)$$

식(40)의 출력 y 를 시간 t 에 대하여 미분하면 다음과 같다.

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = tx_1 + x_2 - tu \quad (42)$$

식(42)는 입력 u 에 대하여 종속이므로, 상대 차수(r)은 1이다. 그러므로 식(23)과 식(24)로 표현되는 정규형은 다음과 같이 산출된다.

먼저 입출력 변환 행렬을 얻기 위하여 적용하면 다음과 같은 절차로 표현된다.

$$\xi = T_1 = y = x_1 \quad (43)$$

그리고 Φ_2 는 $L_{\beta_2}\Phi_2 = 0$ 을 만족하는 방정식을 풀면 다음과 같이 표현된다.

$$\eta = T_2 = tx_1 + x_2 \tag{44}$$

그러므로 입출력 변환 행렬은 다음과 같이 구성된다.

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & , & 0 \\ t & , & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{45}$$

식(45)의 입출력 변환을 사용하여, 정규형을 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \eta - tu \\ \dot{\eta} &= (t + t^{-1})\eta + \xi \end{aligned} \tag{46}$$

식(46)에 대한 입력 u 를 다음과 같이 설정하자.

$$u = \frac{1}{t}(a\xi - v - \eta) \tag{47}$$

여기서, $a > 0$ 이고 외부 입력 v 는 추종 입력이다. 즉, 식(47)을 식(46)에 대입하면, 시스템의 폐루프 특성은 1차 선형 방정식으로 표현된다.

Ⅳ. 결 론

본 논문에서는 선형 시변 시스템에 대한 시불변 선형 시스템을 얻기 위한 입력과 출력의 조건을 제시하였으며, 필요충분조건을 증명하였다. 이를 통하여 입출력 변환이 가능한 선형 시변 시스템의 경우, 기존의 선형 시불변 시스템에 적용되는 제어 알고리즘을 사용할 수 있을 것이다. 그리고 제안된 입출력 방법을 통하여, 선형 시변 시스템에 대한 가관측성을 조사하는 방법으로 사용할 수 있다.

앞으로 과제는 불확실성을 가지는 선형 시변 시스템에 대한 입출력 변환이 가능한 불확실성의 크기를 고려할 과제를 가지고 있다.

참 고 문 헌

[1] AMATO F., CELENTANO G. and GAROFALO F., "New sufficient conditions for the stability of slowly varying linear systems", IEEE Trans. Autom. Control, Vol 38, pp. 1409-1411, 1993.

[2] LAWRENCE, D.A. and RUGH W.J., "On a stability theorem for nonlinear systems with slowly varying inputs", IEEE Trans. Autom. Control, Vol 35, pp. 860-864, 1990.

[3] ISIDORI A., "Nonlinear Control Systems", Springer-Verlag, London, 1995.

[4] DIAO Y. and PASSINO K.M., "Adaptive control for a class of nonlinear time-varying systems", Proceedings of the ACC, Arlington, VA, pp. 4161-4166, June 2001.

[5] 조도현, 이상효, "상태 변환을 이용한 선형 시변 시스템에 대한 강건한 제어", 제어자동화시스템공학 논문지, 제4권, 제1호, pp1~9, 1998.

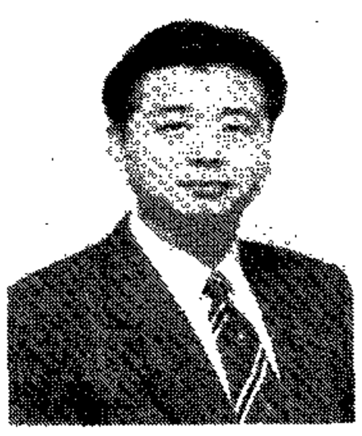
[6] Choi H.L. and LIM J.T., "Feedback linearisation of time-varying nonlinear systems via time-varying diffeomorphism" IEE Proc. Control Theory Appl., Vol 150, No 3, pp. 279-284, 2003.

[7] KOSTAS S.T. and PETROS A. I., "Linear Time-varying Systems", Printice Hall, pp. 29-33, 1993.

저 자 소 개

이 종 용(정회원)
대한전자공학회 논문지 제42권 TE편 제3호 참조

조 도 현(정회원)
대한전자공학회 논문지 제41권 TE편 제1호 참조



이 상 훈(정회원)
1983년 광운대학교 전자공학과 공학사 졸업.
1987년 광운대학교 전자공학과 공학석사 졸업.
1992년 광운학교 전자공학과 공학박사 졸업.
1991년～현재 광운대학교 교양학부 교수
<주관심분야 : 통신, 컴퓨터, 신호처리>