

# 편심된 안경렌즈의 산각 위치에 따른 비점수차 계산: 편심에 의한 프리즘 처방

김상현\*, 서지근\*\*

\*광주보건대학 안경광학과

\*\*초당대학교 안경광학과

(2005년 10월 25일 받음, 2006년 2월 24일 수정본 받음)

본 연구에서는 프리즘 처방을 위해 편심된 안경렌즈의 산각위치에 따른 수차와 경사각에 따른 수차를 계산하였다. 프리즘 처방을 위해서 일반적으로 일반 렌즈를 편심시켜 만든다. 광축과 주시축 사이의 차이는 수차를 발생시키기 때문에, 이런 경우 산각의 위치가 중요하다. 우리는 계산을 통하여 산각 회전 띠의 축이 (+)렌즈의 전면 곡률 중심을 지나는 것이 후면곡률 중심을 지나는 것보다 비점수차가 적게 발생하였고, 산각 회전 띠의 (-) 렌즈의 후면곡률 중심을 지나는 것이 전면보다 비점수차가 적게 발생한다는 결과를 얻었다. 렌즈의 굴절력이 클수록 비점수차가 작았다.

주제어: 산각, 비점수차

## I. 서론

안경테에 안경렌즈를 고정하는 방법은 다양하다. 가장 기본적인 방법이 안경렌즈에 산각을 만드는 방법이다. 이러한 산각의 종류는 다양한 안경테의 형태에 따라 다르게 조제된다.<sup>[1]</sup>

조제된 안경 렌즈에서 산각의 역할은 렌즈가 광학적으로 역할을 완벽히 하도록 하고, 조제된 렌즈를 안경테에서 이탈되지 않도록 지지하고 안경테의 모양을 유지하는 역할을 한다. 산각이 너무 날카롭거나 렌즈 크기가 안경테의 크기보다 큰 경우에는 렌즈가 압력을 받아 렌즈가 휘어지거나 변형될 위험도 있고, 이런 현상에 의하여 렌즈에 내부왜곡이 생기고 파손의 위험이 된다.<sup>[2]</sup>

산각에 의하여 발생하는 광학적인 효과는 렌즈 광학중심점과 광축이 일치하지 않을 때 수차를 유발한다. 이러한 수차는 완벽한 광학적 교정을 불완전하게 만들며 착용자가 안경을 착용함으로써 피로를 유발한다. 그리고 프리

즘 처방의 경우에는 렌즈산각의 위치에 따라 원하지 않는 수차가 유발될 수 있다. 프리즘 처방에서 조준선이 안경 렌즈를 지나는 시점의 프리즘 굴절력이 크다면 렌즈의 광축과 눈의 조준선이 어긋나는 기울기가 커져 수차들이 발생하게 된다. 특히 프리즘 처방의 경우 사용하는 편심렌즈의 경우, 비점수차가 없는 부분이 설계점과 바뀌어 실제 시선은 수차를 유발하는 부위를 통하게 된다. 시선을 좀더 이동하면 수차가 증가된 부위를 통해보고 시선을 좌우로 이동시에는 좌우안은 조건이 다른 부위를 통하여 받는 영상이 서로 달라 양안시의 저해를 받게 된다. 즉 비점수차의 분포가 렌즈중심점을 기준 좌우비대칭으로 되어 있어 양안시에 큰 지장을 주게 된다.

본 논문에서는 경사각에 의한 비점 수차와 프리즘 굴절력과 렌즈 굴절력에 의한 (+)렌즈와 (-)렌즈의 산각 띠의 위치에 따른 비점 수차를 계산하였다.

## II. 계산 방법

비점 수차는 다른 주요 수차와 마찬가지로 광선이 광축에서 벗어난 것에 기인한 수차이며, 따라서 광축에 대해 작은 각으로 입사하는 것을 가정한 근축 근사는 사용할 수 없다. 비점 수차는 물체점이 광축으로부터 떨어져 있을 때 입사광선이 렌즈에 비대칭적으로 부딪쳐 발생하는 수차이다. 따라서 자오면(tangential)과 구결면(sagittal)에 따라 초점이 달라지는 것에 의해 발생하고, 수차의 크기는 이 두개 축 방향의 굴절력 차이로 나타낸다.

먼저 비점 수차의 근거가 되는 단일 구면에 의한 상의 결상식을 살펴보면 다음과 같다. 일반 구면에서의 굴절은 곡률 반지름  $R$ 이고 굴절률이  $n'$ 인 매질로 된 구면이 굴절률  $n$ 인 매질 우측에 놓여있는 경우를 고려하면, 구면으로부터 거리  $s$ 만큼 떨어져 있는 물점에서 빛이 구면으로 입사하며, 입사광은 광축과 각도  $\theta$ 를 이루며,  $\theta'$  각도로 굴절한다고 하면, 구결면 위에서 상의 위치  $s'$ 은

$$\frac{n}{s} + \frac{n' \cos \theta' - n \cos \theta}{R} = \frac{n'}{s'} \quad (1)$$

같이 주어지고,<sup>[3]</sup> 자오면 위에서 상의 위치  $t'$ 은

$$\frac{n \cos^2 \theta}{s} + \frac{n' \cos \theta' - n \cos \theta}{R} = \frac{n' \cos^2 \theta'}{t'} \quad (2)$$

과 같이 주어진다.<sup>[4]</sup>

빛이 비스듬하게 입사하지 않고 광축과 나란하다면  $\theta, \theta'$ 은 0이 되어 구결면에 대한 식과 자오면에 대한 식이 동일하게 되며,  $s, s', t'$ 도 광축상 거리로 환원되어 잘 알려진 근축 근사를 사용한 구면에서의 결상식인  $n/s + (n' - n)/R = n'/s'$ 과 동일하게 된다. 이 결상식과의 차이가 바로 비점 수차의 근거식이다. 렌즈의 결상식에서 비점 수차는 구결면과 자오면에서의 초점거리 차이에 대응하는 굴절력 차이를 사용하였다. 전면의 곡률 반지름이  $R_1$ 이고 후면의 곡률 반지름이  $R_2$ 이고 굴절률이  $n$ 인 렌즈가 공기 중에 놓여있다고 하자. 그리고  $C_1, C_2$ 는 각각 렌즈 전면과 후면의 곡률 중심이며, 입사광선이 렌즈 전면과 이루는 각은  $\alpha$ , 렌즈를 통과한 광선이 렌즈 후면과 이루는 각이  $\beta$ 이다(Fig. 1).

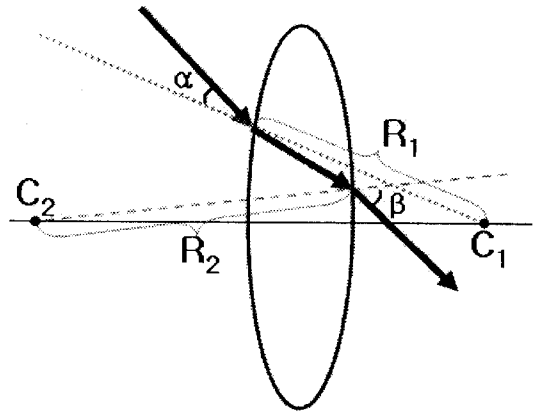


Fig 1. The Schematic of refraction by biconvex Lens.

렌즈 중심에서  $h$ 만큼 떨어진 위치에서의 빛이 입사하여 비점 수차가 발생한다고 하면, 렌즈 전면의 굴절력  $D_1$ , 후면의 굴절력  $D_2$ , 비점 수차는 구결면의 굴절력 ( $D_s$ )과 자오면에서의 굴절력( $D_t$ )의 차이이므로

$$D_t - D_s = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)D_1 + n^2 \beta^2 D}{n^2} \quad (3)$$

이다.<sup>[5]</sup> 이 식의 사용범위를 알기 위해서 이 식을 얻어내는 과정 중에 사용한 근사를 확인할 필요가 있다. (3)식을 얻는데 사용한 근사는 크게 얇은 렌즈 근사와 작은각 근사로 볼 수 있다.

얇은 렌즈 근사는 구면에 대한 식 (1), (2)식을 조합하여 렌즈 결상식을 유도하는 과정에 사용되었다. 즉 빛이 주점에서 굴절되지 않고 렌즈 전면과 후면에서 굴절하는 것으로 계산하였고, 렌즈의 두께도 무시하였다.  $D_1 = (n-1)/R_1, D_2 = (1-n)/R_2$ 이고, 전체 굴절력  $D = D_1 + D_2$ 로 놓는 근사를 (3)식을 얻는데 사용하였다.

다음 렌즈의 면과 입사광이 이루는 각이 작다는 근사를 사용하였다. 이것은 광축과 매우 작은 각도로 입사한다는 근축 근사가 아니다. 렌즈의 중심과 떨어진 위치에 즉 광축과 일정한 각도로 입사되는 빛이 렌즈 전면과 이루는 각인  $\alpha$ 가 작다는 근사이다. 각도 근사는  $\cos \alpha \approx 1 - 1/2\alpha^2, \cos^2 \alpha \approx 1 - \alpha^2$ 로 놓는 3차 근사를 사용하였다.

### Ⅲ. 결과 및 고찰

안경 렌즈에서 비점 수차 문제는 주시선이 렌즈의 광학 중심에 있을 때와 광학 중심에서 떨어진 경우로 나누어 생각해 보면, 전자의 경우에 해당되는 것은 경사각에 따른 비점수차 문제이다.

#### 1. 경사각에 따른 수차

조준선을 광학 중심에 일치시킬 때에도 발생하는 비점 수차는 안경의 경사각 때문에 렌즈 광축과 조준선이 기울어진 데에 따른 비점 수차이다. 이 경우의 비점 수차는 잘 알려진 바와 같이 원주 렌즈를 추가한 효과를 주며, 비점 수차의 크기는 구면렌즈에  $\Delta D(\text{구면}) = D \cdot (\sin^2\theta/2n)$  만큼 굴절력을 추가하게 되어,  $\Delta D(\text{원주}) = D \cdot \tan^2\theta$  크기의 원주렌즈를 추가한 셈이 된다[6]. 각이 적을 때  $\sin\theta \approx \tan\theta$  인 점을 고려하고, 렌즈 굴절률이 1.5 이라고 하면  $\Delta D(\text{원주})$  가 3배 정도 크다. 따라서 이 추가 원주렌즈 부분만을 계산하였다. 렌즈의 굴절력이 각각  $\pm 10.00$  D(원),  $\pm 7.50$  D(사각형),  $\pm 5.00$  D(삼각형),  $\pm 2.50$  D(+ )에 대해 계산하였다. 결과는 Fig. 2와 같고, 렌즈의 굴절력이 7.00D 이상이고, 경사각이  $15^\circ$  이상인 경우 0.50D 정도의 무시할 수 없는 크기의 비점 수차가 나타나는 것을 볼 수 있다.

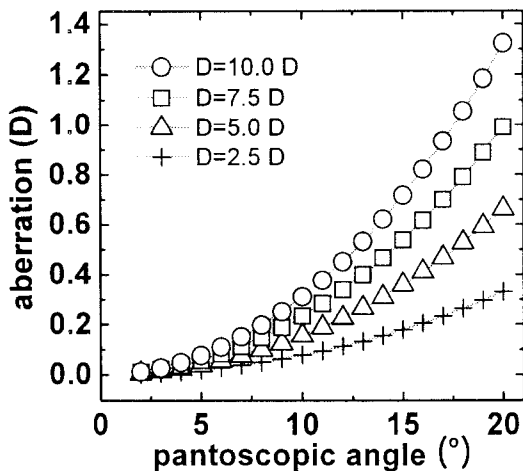


Fig 2. The astigmatism with Pantoscopic angle

다음으로 비점 수차가 문제가 되는 경우는 프리즘 처방에 의해 안경을 조제할 때이며, 즉 일반렌즈를 사용하

여 원하는 프리즘 굴절력을 얻고자 할 때이다. 이 경우 산각 회전 띠의 위치가 문제가 된다. 프리즘 처방을 하는 경우 주시선은 렌즈 광학 중심점에서 떨어진 위치에 존재한다. 이 경우는 광축과 떨어진 위치에 빛이 입사하게 되면 여러 가지 수차가 발생하며, 가장 문제가 되는 수차는 비점 수차이다.

산각회전 띠의 위치에 따른 비점 수차를 살펴보기 위하여 오목 매니스커스 렌즈의 경우를 보자.

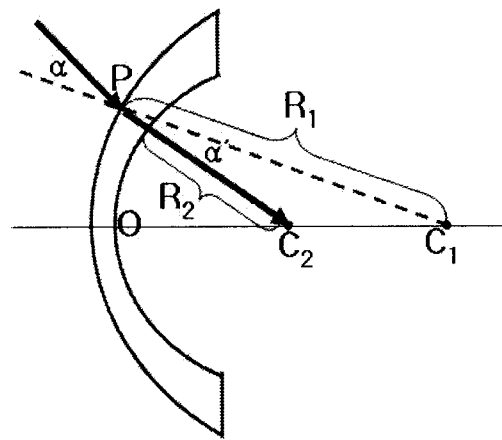


Figure 3. A path of Light as the bevel parallel to the back side of Lens

#### 2. 오목 매니스커스 렌즈

산각 회전 띠의 축이 렌즈 후면곡률 중심을 지날 때

Fig. 3은 렌즈 후면 곡률 중심에 산각 회전 띠의 축과 일치되었을 때의 광선의 경로이다.  $C_1$ ,  $C_2$ 는 각각 렌즈 전면과 후면의 곡률 중심이며,  $R_1$ ,  $R_2$ 는 각각 전면과 후면의 곡률 반지름이다.  $\alpha$ 는 입사각이며,  $\alpha'$ 은 굴절각 및 투과각이다.

산각 회전 띠 축을 렌즈의 후면의 곡률 중심과 일치시키면, Fig. 3과 같이 시선은 렌즈 후면의 곡률 중심의 연결선상에 놓이게 된다. 시선이 P와  $C_2$ 와 연결선 상에 있을 경우 Fig. 3과 같이 후면에 의한 굴절은 일어나지 않는다. 따라서 물점으로부터 나온 빛이 렌즈 전면 P점에 각  $\alpha$  로 도달하면 Fig. 3과 같이 빛은 굴절하게 된다. 렌즈 후면에서 굴절각이 없으므로 (3)식에서  $\beta$  는 0이 되며, h가 점 P와 O사이의 거리라면 렌즈 전면에서의 굴절각  $\alpha'$ 은 Fig. 3에 의해 다음과 같다.

$$\alpha' = \frac{h}{R_2} - \frac{h}{R_1}$$

snell 법칙  $\sin\alpha = n\sin\alpha'$  의 1차 근사  $\alpha \approx n\alpha'$  을 이용하면

$$\alpha = n\left(\frac{h}{R_2} - \frac{h}{R_1}\right) \text{ 이고}$$

이것을 (3)식에 대입하면 비점수차는 ( $\beta = 0$  이므로)

$$\begin{aligned} D_t - D_s &= \frac{\alpha^2 \cdot D_1}{n^2} \\ &\approx n^2 \cdot h^2 \cdot \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)^2 \cdot D_1 \cdot \frac{1}{n^2} \\ &\approx \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)^2 \cdot h^2 \cdot D_1 \end{aligned}$$

이다.

$$\frac{1}{R_1} = \frac{D_1}{n-1}, \quad \frac{1}{R_2} = -\frac{D_2}{n-1} \text{ 이므로,}$$

$$\begin{aligned} D_t - D_s &= h^2 \cdot \left(-\frac{D_2}{n-1} - \frac{D_1}{n-1}\right)^2 \cdot D_1 \\ &= \frac{(D_2 + D_1)^2}{(n-1)^2} \cdot h^2 \cdot D_1 \\ &= \frac{D^2 \cdot h^2 \cdot D_1}{(n-1)^2} \end{aligned} \quad (4)$$

이다.

산각 회전 띠의 축이 렌즈 전면곡률 중심을 지날 때

Fig 4.는 렌즈 전면곡률 중심과 산각 회전 띠의 축을 일치시켰을 때 광선의 경로이다.  $C_1, C_2$ 는 각각 렌즈 전면과 후면의 곡률 중심이며,  $R_1, R_2$ 는 각각 전면과 후면의 곡률 반지름이다.  $\beta'$ 는 후면의 입사각이며,  $\beta$ 는 투과각이다. 산각위치를 전면곡률에 평행하게 맞추었으므로 전면에 굴절은 없다.

산각 회전 띠의 축을 전면곡률 중심과 일치시키면 Fig. 4와 같이 전면의 곡률 중심  $C_1$ 과 연장선상에 주시선이 놓이게 된다. 따라서  $\alpha=0$ 이며,  $\beta$ 가 작은 각을 갖게 되는 경우이다. 이 경우,

$$\beta' = \frac{h}{R_2} - \frac{h}{R_1} \text{ 이고,}$$

snell 법칙  $\sin\beta = n\sin\beta'$  의 3차 근사  $\beta \approx n\beta'$  을 (3)식에 대입하면, 비점 수차는 같은 방법으로 계산하면

$$\begin{aligned} D_t - D_s &= \frac{-\beta^2 \cdot D_1 + \beta^2 n^2 \cdot D}{n^2} \\ &\approx h^2 \cdot \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)^2 \cdot (-D_1 + n^2 D) \\ &= \frac{D^2}{(n-1)^2} \cdot h^2 \cdot (-D_1 + n^2 D) \end{aligned} \quad (5)$$

이 된다.

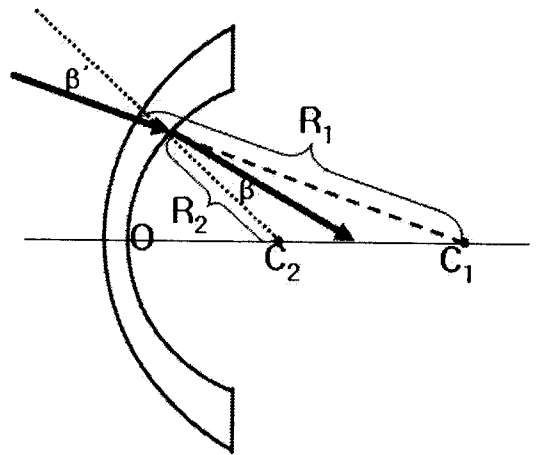


Figure 4. A path of Light as the bevel parallel to the front side of Lens

### 3. 볼록 메니스커스

볼록 메니스커스 경우도 같은 방법으로 계산하면, 각각 산각 회전 띠의 위치를 렌즈 후면곡률에 평행하게 맞추는 경우

$$D_t - D_s = \frac{D^2}{(n-1)^2} \cdot h^2 \cdot D_1$$

산각 회전 띠의 위치를 렌즈 전면곡률에 평행하게 맞추는 경우에

$$D_t - D_s = \frac{D^2}{(n-1)^2} \cdot h^2 \cdot (-D_1 + n^2 D)$$

이 유도된다.

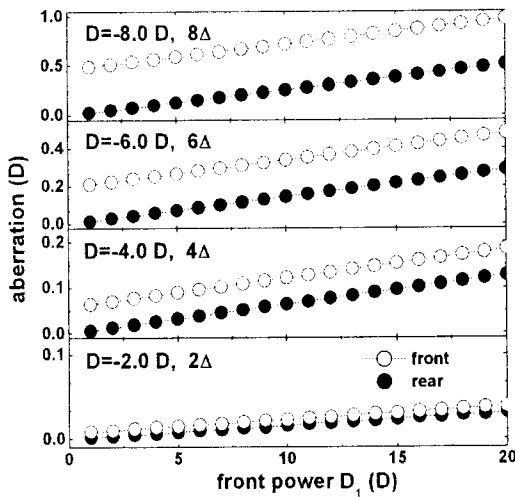


Figure 5. The astigmatism with Lens power, (-) meniscus lens, open circle(○): front, dark circle(●): rear

#### 4. 렌즈 굴절력에 따른 비점 수차

(4), (5)식을 이용하여 프리즘 처방을 하였을 때, 산각 기준에 따른 비점 수차량을 계산하면 Fig. 5와 같다. Fig. 5는 굴절력이 -2.00D, -4.00D, -6.00D, -8.00D이며 굴절률이 1.5인 렌즈에 대해서 전면 굴절력을 바꾸어 가며 계산한 결과이다. 주시선이 미치는 위치 h는 모두 광학중심에서 1cm 떨어진 위치로 잡았고, 따라서 발생하는 프리즘 양은 전체 굴절력(D)에 해당하는 프리즘 크기이다. 유발된 프리즘 크기는 위에서부터, 8Δ, 6Δ, 4Δ, 2Δ 이다.

(-)굴절력을 가지는 렌즈의 경우 나타나는 비점수차는 Fig. 5와 같이 전체적으로 산각 회전 띠의 축을 후면 곡률중심과 일치시키는 것이 낮은 비점 수차를 보이고 있다. -4.00D 이하인 렌즈의 경우, 비점 수차가 작아 무시할 만하다. 그러나 -5.00D 이상의 굴절력을 가진 렌즈들은 비점수차가 커져서 산각 회전 띠의 축을 렌즈 후면 곡률중심과 일치시키는 것을 고려하는 것이 필요하다. 산각 회전 띠의 축을 후면 곡률중심과 일치시키는 것에 비하여 전면 곡률중심과 일치시키면 발생하는 비점 수차량은 산각 회전 띠의 축을 후면 곡률중심과 일치시키는 것에 비해 0.20D (-6.00D) ~ 0.50D(-8.00D) 정도 더 커졌음을 볼 수 있다. 따라서 (-)렌즈의 경우, 비점 수차를 줄이기 위해서는 렌즈 산각 회전 띠의 축을 후면곡률 중심과 일치시켜야 하며, 전면의 굴절력이 적은 렌즈를 사용할수록 수차는 적어진다.

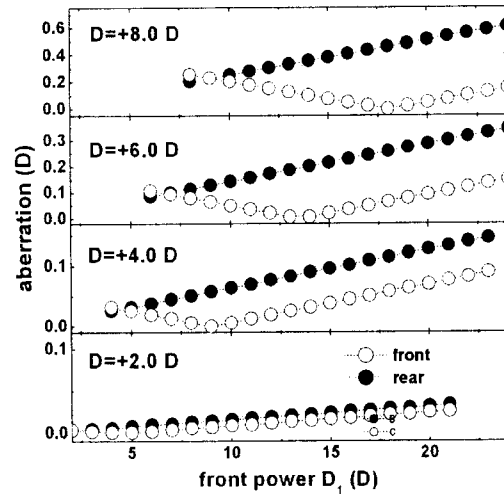


Figure 6. The astigmatism with Lens power, (+) meniscus lens, open circle(○) : front, dark circle(●) : rear

(+)렌즈의 경우 광학중심에 1cm 만큼 떨어진 위치의 비점수차는 Fig. 6과 같다. Fig. 6은 (+)메니스쿠스 렌즈의 경우 렌즈굴절력에 의한 산각 회전 띠의 위치에 따른 비점 수차이다. 열린 원은 산각 회전 띠의 축을 전면 곡률중심에 맞춘 경우이며, 닫힌 원은 산각 회전 띠의 축을 후면 곡률중심과 맞춘 결과이다. 렌즈의 굴절력은 위에서부터 +8.0D, +6.0D, +4.0D, +2.0 D이며, 전면의 굴절력을 바꾸어가면서 계산했다. 수차량은 모두 렌즈의 광학에서 1cm 떨어진 위치에서 계산한 결과는 (-)렌즈와 반대로 산각 회전 띠의 축을 전면 곡률중심과 일치시키는 경우에 비점 수차가 적어지는 것을 볼 수 있다.

특이한 점은 수차가 최소가 되는 전면의 굴절력이 있다는 점이다. 수차가 최소가 되는 조건은 식 (5)에서  $D_1 = n^2 D$  일 때이며,  $D = 4.00D$  정도일 때  $D_1 = 9.00D$ ,  $D_2 = -5.00D$  인 경우이다. 전체적으로 수차는 (-)렌즈에 비해서 적으나, +6.00D나, +8.00D 의 경우 산각회전 띠의 축을 전면 곡률중심 또는 후면 곡률중심에 일치시키는가에 따라서 0.20D~0.50D 정도의 수차 크기가 차이가 있음을 볼 수 있다.

#### 6. 굴절률에 따른 비점 수차

Fig. 7은 렌즈의 굴절률의 변화에 의한 수차의 변화를 보여준다. -4.00D 렌즈의 전면 굴절력을 변화 시키면서 계산하였고, 산각 회전 띠의 축을 후면 곡률중심 그리고

전면 곡률중심에 일치시켜서 계산하였다. 굴절률이 큰 렌즈인 경우 수차가 줄어드는 것을 보여준다. 굴절률이 클수록 수차가 감소하는 것을 볼 수 있다.

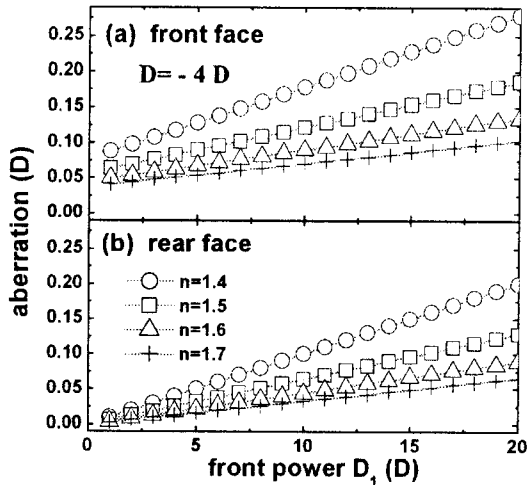


Figure 7. The astigmatism with an index of refraction,  $-4.00D$ .

#### IV. 결론

본 논문에서는 광축과 주시선이 일치하지 않는 경우에 대하여 비점수차를 계산하였다. 프리즘 처방의 경우에, 일반 렌즈를 사용하여 원하는 프리즘 효과를 얻기 위해서 렌즈의 광학중심점을 이동시키는데, (-) 렌즈에서는 산각 회전 띠의 축이 렌즈 후면 곡률중심과 일치하는 것이 수차가 작았고, (+) 렌즈의 경우에는 산각 회전 띠의 축을 렌즈 전면 곡률중심과 일치하는 경우에 수차가 작았다. 그리고 렌즈의 굴절률이 클수록 수차가 감소하는 것을 확인하였다.

#### 감사의 글

이 논문은 광주보건대학교 2005년 교내학술연구비 지원에 의하여 이루어졌음.

#### 참고문헌

[1] 성풍주, "안경 조제 및 가공", 대학서림, 서울, pp. 328-334(2005).  
 [2] 성풍주, "안경 조제 및 가공", 대학서림, 서울, pp.

337-338(2005).

[3] M. Jalie, "The Principles of Ophthalmic Lenses", Gresham Press, London, pp. 393-394(1994).  
 [4] M. Jalie, "The Principles of Ophthalmic Lenses", Gresham Press, London, pp. 97(1994).  
 [5] M. Jalie, "The Principles of Ophthalmic Lenses", Gresham Press, London, pp. 393(1994).  
 [6] 성풍주, "안경 광학", 대학서림, 서울, pp. 590 (2005).

## The Astigmatism Calculation according to the Bevel Position of Decentered Spectacle Lens: Prism Prescription Lens by Eccentricity

Sang-Hyun Kim\* and Ji-Keun Seo\*\*

\*Department of Ophthalmic Optics Kwangju Health College Korea

\*\*Department of Ophthalmic Optics Chodang University Korea

(Received October 25, 2005 : Revised manuscript received February 24, 2006)

We have studied the astigmatism according to the bevel position and the tilting(pantoscopic) angle of decentered spectacle lens for prism prescription. For prism prescription, generally we make a general spectacle lens into decentered spectacle lens. At this time the bevel position of decentered lens is a important matter, because the difference between optic axis and visual axis occur aberrations. Using the calculation we find that the case that the axis of bevel rotation band passes the front curvature center of (+) lens has a smaller astigmatism than the case that the axis of bevel rotation band passes the rear curvature center of (+) lens and that the case that the axis of bevel rotation band passes the rear curvature center of (-) lens has a smaller astigmatism than the case that the axis of bevel rotation band passes the front curvature center of (-) lens. We find the lens with higher refraction index has a smaller astigmatism.

Key words: bevel, astigmatism