

이분산성 시계열 모형(GARCH, IGARCH, EGARCH)들의 성능 비교*

김삼용¹⁾ 이용훈²⁾

요약

최근 들어 시계열 자료 분석에서 관측된 각 시점에서의 관측치의 분산을 서로 다른 분산(조건부 이분산성)을 따른다고 가정하고, 이를 분석하는 모형(ARCH, GARCH, EGARCH, IGARCH 등)들이 옵션 가격 분석이나 환율 변화 등 경제적 시계열 자료의 예측 모형을 위하여 활발히 연구 되고 있다. 본 논문에서는 한국의 KOSPI 데이터 (1999년 1월 4일 ~ 2003년 12월 30일, 총 1227일)를 바탕으로 조건부 우도함수 모수 추정 방법을 이용한 GARCH(1,1), IGARCH(1,1), EGARCH(1,1) 모형에 KOSPI 자료를 적합시켜 각 모형들의 성능을 비교하여 보았다.

주요용어: 비선형시계열모형, 한국종합주가지수(KOSPI), 변동성(Volatility)

1. 서론

전통적으로 시계열 자료 분석 방법은 AR(Autoregressive) 모형, MA(Moving Average), ARM-A(Autoregressive Moving Average) 모형 등 선형성을 가정한 모형들이 많이 활용되었다. 그러나 여러 경제적 시계열 자료에서 나타나는 도약 현상(jump phenomena)이나 한계 순환(limit cycles)과 같은 현상은 선형성 모형으로 잘 설명이 되지 않는다. 그래서 최근에 들어 Engle(1982)이 오차의 분산이 자기회귀적으로 변하는 조건부 이분산 자기회귀 모형인 ARCH (Autoregressive Conditional heteroscedastic)모형을 제시하였으며, 1986년에 Bollerslev(1986)가 오차의 분산에 이전 데이터들의 값과 분산을 고려하여 ARCH 모형을 일반화 시킨 GARCH (General Autoregressive conditional heteroscedastic) 모형을 제시하였다. 또한 Nelson(1991)은 과거 시점의 관측값의 오차의 양(+)/음(-)에 따라서 현 시점의 오차의 분산이 서로 다른 모형을 갖는다는 가정하에 GARCH 모형을 변형시킨 EGARCH 모형을 제시하였으며, 또한 EGARCH 모형은 GARCH 모형에서의 제약조건 중에 하나인 분산 예측 모형에서의 계수들의 적어도 0보다는 크다는 가정이 필요 없는 모형을 제시하였다. IGARCH(Integrated GARCH)모형은 단위근 GARCH 모형으로서 Engle과 Bollerslev (1986)에 의해 처음 제시되었다. 본 논문에서는 한국의 KOSPI(한국종합주가지수)데이터를

* 이 논문은 2005년 중앙대학교 학술연구비 지원에 의한 것임.

1) (156-756) 서울시 동작구 흑석동, 중앙대학교, 부교수

E-mail: sahm@cau.ac.kr

2) (156-756) 서울시 동작구 흑석동, 중앙대학교, 박사과정수료

E-mail: withus@pharmacodesign.com

바탕으로 적당한 변형 후 GARCH(1,1), IGARCH (1,1), EGARCH(1,1) 모형을 적용시켜보고, 오차의 분산에 대한 예측 정도를 비교하여 보았다. 여기서 GARCH, IGARCH, EGARCH 모형 예측 방법은 현재 가장 보편적으로 사용되는 조건부 최대 우도 추정 방법을 사용하였다.

2. 이분산성 시계열 모형

2.1. GARCH 모형

GARCH 모형은 오차의 분산이 자기회귀적으로 변하는 조건부 이분산 자기회귀모형인 ARCH 모형(Engle, 1982)의 일반화된 모형으로써 Bollerslev(1986)에 의해 제시되었다. GARCH (p, q) 모형은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} a_t &= \sigma_t \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, n, \\ \varepsilon_t &\sim N(0, 1), \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2. \end{aligned}$$

여기서 $\alpha > 0, \alpha_i \geq 0, \beta \geq 0, i = 1, 2, \dots, p, j = 1, 2, \dots, q$ 이고

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1 \quad (2.1)$$

이다. GARCH 모형의 특수한 경우인 GARCH(1,1) 모형은 다음과 같다.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2. \quad (2.2)$$

2.2. IGARCH 모형

GARCH 모형에서 (2.1)의 조건은 시계열 자료의 정상성을 의미한다. 하지만 이 조건이 만족되지 못하고 다음과 같은 경우가 발생할 때 단위근을 가지는 모형과 유사하게 다음과 같은 모형을 제시할 수 있다.

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j = 1 \quad (2.3)$$

IGARCH(p, q)모형은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} a_t &= \sigma_t \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, n \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2. \end{aligned}$$

여기서

$$\alpha_0 > 0, \sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j = 1 \quad (2.4)$$

이다.

IGARCH 모형의 특수한 경우인 IGARCH(1,1) 모형은 다음과 같다.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \quad \alpha_1 + \beta_1 = 1.$$

2.3. EGARCH 모형

EGARCH 모형은 Nelson(1991)에 의해 제시되었고 주된 이유는 GARCH 모형의 모수 가정 끝에 분산을 0보다 크게 하기 위하여 모수들은 모두 양수가 되어야 한다는 가정을 완화시켜 보다 확장된 모형을 제시한 것이 EGARCH 모형이다. EGARCH(p, q) 모형은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} a_t &= \sigma_t \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, n, \\ \ln(\sigma_t^2) &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i g(\varepsilon_{t-i}) + \sum_{j=1}^q \beta_j \ln(\sigma_{t-j}^2), \\ g(\varepsilon_t) &= \theta \varepsilon_t + \gamma [|\varepsilon_t| - E(|\varepsilon_t|)], \end{aligned}$$

여기서 θ 와 γ 는 실수이고 ε_t 와 $|\varepsilon_t| - E(|\varepsilon_t|)$ 는 평균이 0인 iid 변수들이며, EGARCH(1,1) 모형은 다음과 같다.

$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \alpha_1 g(\varepsilon_{t-1}) + \beta_1 \ln(\sigma_{t-1}^2).$$

3. KOSPI 데이터의 모형 적용

본 연구에서는 한국의 KOSPI 자료(1999년 1월 4일 ~ 2003년 12월 30일, 총 1227일)를 바탕으로 적당한 변형후에 GARCH, EGARCH, IGARCH 모형을 각각 적용시켜 보았다.

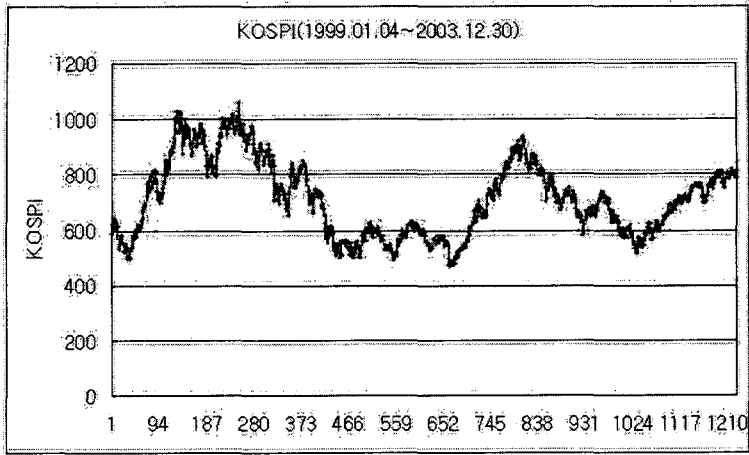


그림 3.1: KOSPI 자료

그림3.1은 KOSPI 원자료이다. 자료의 비정상성을 해결하고 평균은 0으로 하기 위하여 원자료를 다음과 같은 변환을 통하여 정상적 자료(그림 3.2) 를 만들었다.

$$a_t = 100 \times \left\{ \log(y_t) - \log(y_{t-1}) - \frac{1}{(n-1)} \sum_{t=2}^n (\log(y_t) - \log(y_{t-1})) \right\}.$$

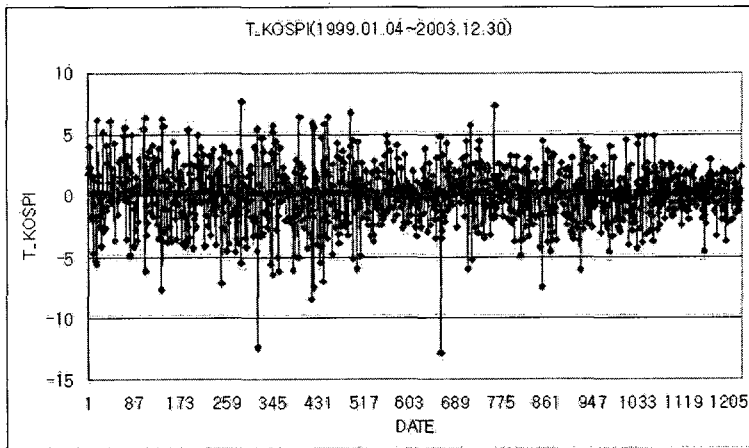


그림 3.2: 변환된 자료

3.1. 모수 추정

다음은 GARCH(1,1)모형, IGARCH(1,1)모형, EGARCH(1,1)모형의 모수 추정치이다.

표 3.1: 모형의 모수 추정치

	α_0	α_1	β_1	θ
GARCH(1,1)	0	0.012	0.980	
IGARCH(1,1)	0	0.013	0.986	
EGARCH(1,1)	0.078	0.141	0.953	-0.386

3.2. 모형의 성능 비교

각 모형의 정확도를 비교하기 위하여, 먼저 오차를 예측된 분산으로 나눈 수정잔차를 다음과 같이 구한다.

$$\tilde{a}_t = \frac{a_t}{\hat{\sigma}_t}, \quad t = 1, 2, \dots, n.$$

이분산성 모형에서 $a_t = \sigma_t \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$ 을 가정하였으므로 수정잔차 \tilde{a}_t 는 각 시점에서 서로 독립인 표준정규분포를 따르게 된다.

그림 3.3은 GARCH(1,1), IGARCH(1,1), EGARCH(1,1) 모형을 적용한 후의 수정잔차 그림이다.

3.2.1. 정규성 비교

표 3.2는 GARCH(1,1), IGARCH(1,1), EGARCH(1,1) 모형의 적용 후 수정잔차에 대한 정규성과 왜도의 검정표이며 그림 3.4은 수정잔차의 Q-Q Plot 이다.

표 3.2: 모형의 정규성 검토

	모형적용 전	GARCH	IGARCH	EGARCH
p-value of Shapiro-Wilk	<0.0001	0.980	0.980	0.985
Skewness	비정규분포	-0.465	-0.483	-0.387

이분산성 모형들의 적합 후 수정 잔차를 상호 비교해본 결과 모두 정규성을 만족하였다. 그중에서도 EGARCH 모형이 정규성 P-value와 Skewness가 상대적으로 좋은 것으로 나타났다.

3.2.2. 등분산성 비교

수정잔차는 또한 각 시점에서 독립이므로 등분산성을 따라야 한다. 위에서 적용한 3가지 이분산성 모형의 수정잔차를 통하여 다음과 같이 이분산성 모형을 검증하여 보았다.

표 3.3과 표 3.4에서 포토맨토 test와 LM(Lagrange Multiplier) test를 시행하였는데 이분산성 모형을 적용 시킨 후에는 3개 모형 모두 이분산성이 없는 것으로 나타났으며, 상대적

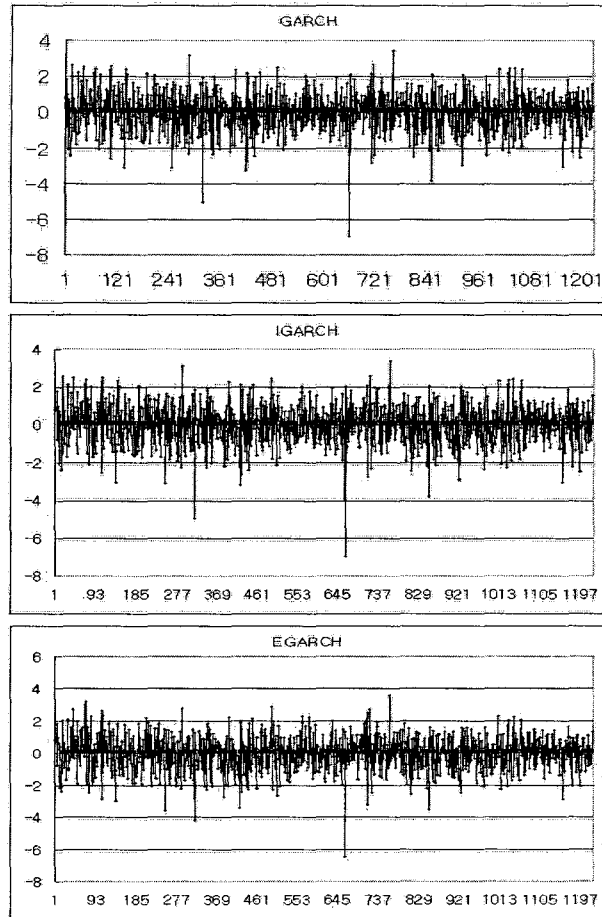


그림 3.3: GARCH(1,1), IGARCH(1,1), EGARCH(1,1) 모형 적합 후 수정잔차

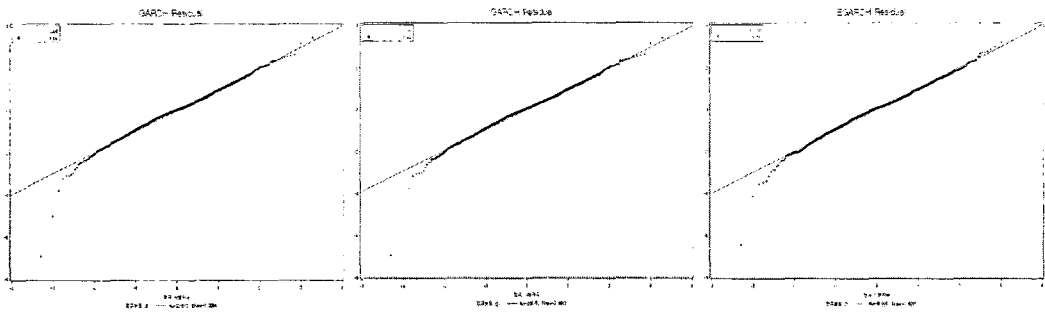


그림 3.4: 모형 적합 후 수정잔차 Q-Q Plot

표 3.3: 수정 잔차의 Portmanteau Q Test

Order	모형 적용 전		GARCH		IGARCH		EGARCH	
	Q값	Pr > Q값	Q값	Pr > Q값	Q값	Pr > Q값	Q값	Pr > Q값
1	6.7101	0.0096	1.0647	0.3021	0.9641	0.3262	0.9225	0.3368
2	18.874	<.0001	4.7563	0.0927	4.2584	0.1189	2.6401	0.2671
3	21.6632	<.0001	4.7728	0.1892	4.2626	0.2345	2.9071	0.4062
4	28.8555	<.0001	5.1838	0.269	4.5836	0.3328	2.953	0.5657
5	32.3067	<.0001	5.7993	0.3262	5.0993	0.4039	3.022	0.6966
6	33.4982	<.0001	5.8297	0.4425	5.1335	0.5268	3.0577	0.8016
7	34.8973	<.0001	5.8494	0.5574	5.1722	0.639	3.358	0.85
8	36.9384	<.0001	6.3226	0.6112	5.6803	0.683	4.6844	0.7907
9	40.7292	<.0001	6.5396	0.6849	5.8353	0.7563	4.6846	0.8609
10	41.6102	<.0001	6.5439	0.7677	5.8432	0.8283	4.8103	0.9035
11	41.6605	<.0001	7.1846	0.7839	6.5272	0.836	5.3455	0.9133
12	42.5566	<.0001	7.2158	0.843	6.5495	0.8859	5.3465	0.9454

표 3.4: 수정 잔차의 LM(Lagrange multiplier) Test

Order	모형 적용 전		GARCH		IGARCH		EGARCH	
	Q값	Pr > Q값	Q값	Pr > Q값	Q값	Pr > Q값	Q값	Pr > Q값
1	6.7058	0.0096	1.0667	0.3017	0.966	0.3257	0.9151	0.3388
2	17.6053	0.0002	4.6399	0.0983	4.1592	0.125	2.5679	0.2769
3	19.0056	0.0003	4.6399	0.2001	4.1614	0.2446	2.7803	0.4268
4	23.6948	<.0001	4.9128	0.2964	4.3755	0.3576	2.8701	0.5798
5	25.3318	0.0001	5.4513	0.3633	4.837	0.4361	2.9452	0.7084
6	25.4899	0.0003	5.4551	0.4869	4.8447	0.5639	2.9742	0.8121
7	25.8991	0.0005	5.5086	0.5982	4.9206	0.6696	3.3141	0.8545
8	26.7151	0.0008	5.9321	0.6548	5.3858	0.7157	4.5535	0.8041
9	28.6441	0.0007	6.0949	0.7304	5.5023	0.7885	4.5575	0.8711
10	28.7456	0.0014	6.1331	0.804	5.547	0.8518	4.6117	0.9156
11	28.8945	0.0024	6.8494	0.8111	6.2856	0.8536	5.0982	0.9263
12	29.1673	0.0037	6.8974	0.8643	6.3244	0.8989	5.0982	0.9546

으로 EGARCH 모형의 P-value가 조금 높은 것으로 나타났다. 이것은 EGARCH모형이 다른 모형보다 더 높다 할 수 있는 것이라 하겠다.

다음으로 GARCH 모형과 IGARCH 모형의 모수를 비교해 보면 IGARCH 모형의 모수가 좀 더 과거 오차의 영향을 많이 받고 있으며, EGARCH 모형에서는 오차가 음수가 나타났을 때가 양수일 때 보다 좀 더 이전 시점의 오차에 영향을 더 받는 것으로 나타났다.

4. 결론

본 논문에서는 비선형 시계열 모형의 예측 정확도를 비교 분석하기 위하여 GARCH(1,1), IGARCH(1,1), EGARCH(1,1)모형을 가지고 KOSPI 자료를 이용하여 성능 평가를 하였다. 이분산성을 가지는 시계열 자료의 변동은 Schwert(1989)들에 의해 실증적으로 밝혀진 사실은 양(+)의 변동성 보다 음(-)의 변동성이 크다는 것이다. 이것은 주식시장의 예를 들자면

주가가 내려 갈 때 올라갈 때보다 변동이 더 크다는 것을 의미하며 매우 현실성이 있는 것이라 여겨진다. 그러나 기존의 GARCH나 IGARCH모형은 양과 음의 변동성이 대칭적이라는 것이나 EGARCH모형은 변동성이 비대칭적이라는 것을 가정하고 있다. 이러한 가정하에 실제 KOSPI 자료를 적합 시켜 EGARCH 모형의 우수성을 보였다. 향후 또 다른 모형인 SV(Stochastic Volatility)모형과 역변환 threshold GARCH모형에 대한 연구가 진행될 수 있으리라 사료된다.

참고문헌

- Awartani, B. M. A. and Corradi, V. (2005). Predicting the volatility of the S&P-500 stock index via GARCH models: the role of asymmetries. *International Journal of Forecasting*, 21, 167-183.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.
- El BABSIRI, M. and Zakoian, J. M. (2001). Contemporaneous asymmetries in GARCH processes. *Journal of Econometrics*, 101, 257-294.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive, conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, 50, 987-1007.
- Engle, F., Lilien, D. V. and Robins, R. P. (1987). Estimating time varying risk premia in the term structure: The ARCH-M model. *Econometrica*, 55, 391-407.
- Franses, P. H. and Van Dijk, D. (1996). Forecasting stock market volatility using (nonlinear) GARCH models. *Journal of Forecasting*, 15(3), 229-235.
- Gonzalez-Rivera, G., Lee, T. H. and Mishra, S. (2004). Does volatility modelling really matter? A reality check based on option pricing VaR, and utility function. *International Journal of Forecasting*, 20, 629-645.
- Hansen, P. R. and Lunde, A. (2005). A forecast comparison of volatility models: Does anything beat a GARCH(1,1). *Journal of Applied Econometrics*, (in press).
- Nelson D. B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns; A new approach. *Econometrica*, 59, 347-370.
- Poon, S. H. and Granger, C. W. J. (2003). Forecasting volatility in financial markets. *Journal of Economic Literature*, 41, 478-539.
- Schwert, G. W. (1990). Stock volatility and crash of 87, *Review of Financial Studies*, 3, 77-102.
- Zakoian, J. M. (1994). Threshold heteroskedastic models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 18, 931-955.

[2005년 9월 접수, 2005년 11월 채택]

Comparison of a Class of Nonlinear Time Series models (GARCH, IGARCH, EGARCH)*

S. Y. Kim¹⁾ Y. H. Lee²⁾

ABSTRACT

In this paper, we analyse the volatilities in financial data such as stock prices and exchange rates in term of a class of nonlinear time series models. We compare the performance of Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedastic(GARCH), Integrated GARCH(IGARCH), Exponential GARCH(EGARCH) models by KOSPI (Korean stock Prices Index) data. The estimation for the parameters in the models was carried out by the ML methods.

Keywords: Nonlinear Time Series models, KOSPI, Volatility

* This research was supported by the Chung-Ang University Research Grants in 2005

1) Associate Professor, Department of Statistics, Chung-Ang University, 221, Heuk Suk Dong, Seoul, 156-756, Korea

E-mail: sahm@cau.ac.kr

2) Graduate Student, Department of Statistics, Chung-Ang University, 221, Heuk Suk Dong, Seoul, 156-756, Korea

E-mail: withus@pharmacodesign.com