

< 논문 >

P1P1/ P2P1 유한요소 공식을 이용한 비압축성 Navier-Stokes 방정식의 분리 해법에 대한 연구

조명환[†] · 최형권* · 유정열** · 박재인***

(2005년 9월 21일 접수, 2006년 2월 3일 심사완료)

Study on the Segregation Algorithms of the Incompressible Navier-Stokes Equations Using P1P1/P2P1 Finite Element Formulation

Myung H. Cho, Hyoung G. Choi, Jung Y. Yoo and Jae I. Park

Key Words : Semi-Segregation FEM(반-분리 유한요소법), Strouhal Number(스트로울수), Spatial Accuracy(공간정확도), Pressure Boundary Condition(압력경계조건)

Abstract

Segregation algorithms of the incompressible Navier-Stokes equations using P1P1/P2P1 finite element formulation are newly proposed. P1P1 formulation allocates velocity and pressure at the same nodes, while P2P1 formulation allocates pressure only at the vertex nodes and velocity at both the vertex and the midpoint nodes. For a comparison of both the elapsed time and the accuracy between the two methods, they have been applied to the well-known benchmark problems. The three cases chosen are the two-dimensional steady and unsteady flows around a fixed cylinder, decaying vortex, and impinging slot jet. It is shown that the proposed P2P1 semi-segregation algorithm performs better than the conventional P1P1 segregation algorithm in terms of both accuracy and computation time.

1. 서론

유한요소법은 비압축성 Navier-Stokes 방정식의해를 수반하는 많은 공학문제의 해결에 있어서 매우 유용한 도구로 사용되고 있다. Tezduyar 등^(1,2)은 속도 벡터에 대해서는 선형보간을 압력에 대해서는 0 차 보간을 사용한 Q1P0 과 속도벡터에 대해서는 2 차 보간을 압력에 대해서는 1 차 보간을 사용하는 Q2P1 4 변형 요소를 사용하여 그 성능을 조사하였으며, Brooks 와 Hughes⁽³⁾는 수정된 가중함수를 유도하여 대류항이 지배적인 유동에 대하여 성공적으로 적용하였다. 또한 Codina 등은⁽⁴⁾ 2 차요소(quadratic element)를 이용한 Streamline Upwind Petrov Galerkin (SUPG)를

사용하여 1 차원 정상 대류-확산방정식에 대한 가중 함수(weighting function)에 대한 표현을 유도하였다. 유한요소법의 주요한 이점은 임의의 형상에 대하여 비교적 쉽게 적용할 수 있으며, 부가적인 노력 없이도 비정렬 격자를 사용할 수 있다는 것이다.⁽⁵⁾ 유한요소법의 분리 공식화(segreated formulation)에서는 속도장과 압력장을 따로 풀게 되므로 각 단계에서 얻어지는 행렬은 속도장과 압력장을 동시에 푸는 통합 공식화(coupled formulation)의 행렬보다 더 작고 예조건화(pre-conditioning) 하기가 쉽다. 반면에, 별개의 타원형 압력방정식을 풀어야 하므로 이에 대한 추가적인 경계조건이 필요한 단점이 존재한다. 일반적으로 개방 경계(open boundary) 문제들의 경우에 출구에서의 압력과 압력구배가 모두 미지수인 경우가 있다. 따라서, 적당한 출구 경계조건을 부과하는 문제는 쉽지 않을 뿐만 아니라 분리 계열의 수치해법에 있어서 중요한 관심사중의 하나이다. Ramaswamy 와 Jue⁽⁶⁾는 개방 경계에서 압력에 대한 경계조건을 처리하기 위해서 경계를 포함하는

[†] 책임저자, 회원, 서울대학교 대학원 기계항공공학부
E-mail : cho7213@snu.ac.kr
TEL : (02)880-1654 FAX : (02)883-0179

* 회원, 서울산업대학교 기계공학과

** 회원, 서울대학교 기계항공공학부

*** 현대자동차 연구개발 총괄본부 선행연구팀

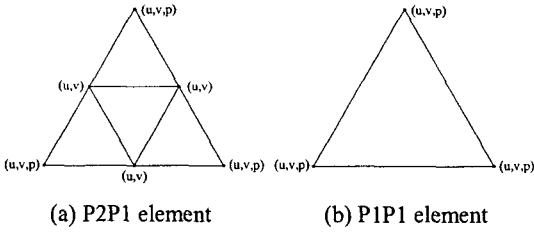


Fig. 1 The velocity-pressure elements used

유한요소로부터 별개의 방정식을 유도하여 이를 경계조건으로 대체하였다. 한편, Tabarrok 과 Su⁽⁷⁾는 P1P1 분리 유한요소법에서 압력 경계조건의 과잉 제한조건(over constraint)으로 인하여 정확한 압력경계조건이 부여되기 위해서는 압력방정식의 반복해법이 필요함을 지적하였다. 한편, Choi 등⁽⁵⁾은 개방 경계조건과 점착 경계조건에 공통으로 적용할 수 있는 압력 경계조건을 제안하였다.

반면, 통합 유한요소법은 별도의 압력방정식을 풀지 않고 압력과 속도장을 동시에 계산하므로, 분리 알고리즘에서 압력방정식의 경계조건으로 인하여 생기는 문제를 근본적으로 피할 수 있고 모든 변수들이 내재적으로 결합되어 있기 때문에 분리 유한요소법에 비해 유동장이 복잡한 경우 좀더 견고한 수렴이력을 보인다는 장점이 있다.⁽⁸⁾ 그렇지만, 통합 정식화할 경우 생성된 전체행렬의 예조건화는 분리해법의 그것보다 상당히 복잡하고 많이 알려져 있지 않으며 매 시간단계마다 전체 행렬의 조립(assembly)과 예조건화를 해야 하는데 따른 계산시간의 증가를 피할 수 없다.⁽⁹⁾ 이와 같이 분리 알고리즘과 통합 알고리즘에 기반한 유한요소 정식화는 각각 장단점을 가지고 있다. 본 연구에서는 분리 유한요소법의 장점을 유지하면서 동시에 통합 유한요소법의 장점을 취할 수 있는 ‘반-분리 유한요소법(semi-segregation FEM)’을 제안하고 그 성능을 평가하고자 한다.

Fig. 1은 반-분리 유한요소법에 사용된 P2P1 유한요소와 분리 유한요소법에 사용된 P1P1 유한요소를 나타낸다. P2P1 요소를 사용할 경우에 속도 변수는 삼각형 요소의 꼭지점과 각 변의 중간점에서 정의되는 반면, 압력변수는 3개의 꼭지점에서만 정의되므로 압력변수의 개수가 P1P1 요소에 비해 2차원 문제의 경우는 약 1/4로, 3차원의 경우는 약 1/8로 줄어든다.

본 논문에서는 각각 P2P1 요소와 P1P1 요소를 사용한 반-분리 유한요소법과 분리 유한요소법을 잘 알려진 표준문제(원형 실린더 주위에서의 비정상 유동, 감쇠와류, 충돌제트)에 적용함으로써 그 정확도 및 계산시간을 비교하고자 한다.

2. 이론

2.1 지배 방정식

지배방정식은 비정상 비압축성 유체에 대한 Navier-Stokes 방정식이며 다음과 같다.

$$u_{i,i} = 0, \tag{1}$$

$$\dot{u}_i + u_j u_{i,j} = -\frac{1}{\rho} p_{,i} + (\tau_{ij})_{,j} + S_i.$$

여기서 ‘·’와 ‘;’는 각각 시간미분 및 공간미분을 의미하며, ρ , p , u_i 는 각각 밀도, 압력, 속도의 i 성분이며, S_i 는 자연대류에서의 부력과 같은 외력항을 나타내고, τ_{ij} 는 전단응력으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\tau_{ij} = \nu (u_{i,j} + u_{j,i}). \tag{2}$$

여기서 ν 는 동점성계수를 나타낸다. 식 (1)에 대한 경계조건은 다음과 같다.

$$u_i |_{\Gamma_1} = b_i, \tag{3}$$

$$(-p\delta_{ij} + \tau_{ij})n_j |_{\Gamma_2} = t_i.$$

여기서 Γ_1 은 Dirichlet 경계조건이 부여된 경계부분을 나타내며, Γ_2 는 Neumann 경계조건이 부여된 경계부분을 나타낸다. b_i 는 경계 Γ_1 에서 지정된 속도벡터를 나타내며, t_i 는 경계 Γ_2 에서 지정된 인장력을, 그리고 n_j 는 경계 Γ_2 에 외향 수직인 단위 법선벡터를 나타낸다.

2.2 P1P1 분리 유한요소 공식

식 (1)의 지배방정식을 4 단계 분리 계산법으로 나타내면 다음과 같다.^(5,10)

$$\frac{\hat{u}_i - u_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{2}(\hat{u}_j \hat{u}_{i,j} + u_j^n u_{i,j}^n) = -\frac{1}{\rho} p^n_{,i} + \frac{1}{2}(\hat{\tau}_{ij} + \tau_{ij}^n)_{,j} + S_i^n, \tag{4a}$$

$$\frac{u_i^* - \hat{u}_i}{\Delta t} = \frac{1}{\rho} p^n_{,i}, \tag{4b}$$

$$p_i^{n+1} = \frac{\rho}{\Delta t} \dot{u}_{i,i}^*, \quad (4c)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} p_i^{n+1}. \quad (4d)$$

여기서 Δt 는 시간간격(time step), \dot{u}_i 와 u_i^* 는 중간 속도(intermediate velocity) 벡터, 상첨자 n 은 이전 시간단계를 나타내며, 대류항과 점성항의 시간적 분은 Crank-Nicolson 법을 사용하였다. 4 단계 분리 계산법은 압력에 의한 항을 대류항과 점성항, 그리고 외력에 의한 항으로부터 분리하며 각 분할단계(fractional step)에서의 중간 속도는 연속방정식을 반드시 만족하지는 않는다. 한편, 중간속도 \dot{u}_i 는 마지막 단계에서 구하고자 하는 u_i^{n+1} 를 시간에 대해 2 차 정확도를 구현하고자 도입되었으며 다음과 같이 나타낼 수 있다.⁽⁵⁾

$$\dot{u}_i = u_i^{n+1} + \frac{\Delta t}{\rho} (p_i^{n+1} - p_i^n) = u_i^{n+1} + O(\Delta t^2). \quad (5)$$

첫 번째 분할단계에서는 외재적으로 외력이 들어가며 중간속도 \dot{u}_i 를 구한다. 이 때 각 방향의 속도에 대한 Navier-Stokes 방정식을 서로 분리하여 해석하기 위해 점성에 의한 항 중 일부를 외재적으로 처리하며 나머지 항들은 내재적으로 처리한다. 또한 식 (4a)의 중간속도 \dot{u}_i 에 대한 비선형 항을 선형화하기 위해서 순차 근사법(successive approximation method)을 사용하였다.⁽²⁰⁾ 이 식의 유한요소 공식화는 다음과 같이 서술된다.

$$\int_{\Omega} \left[W \frac{D\dot{u}_i}{Dt} + \frac{\partial W}{\partial x_j} (-p^n \delta_{ij} + \tau_{ij}) \right] d\Omega = 0. \quad (6)$$

위에서 W 는 속도에 대한 형상함수이며, $V = \{W | W \in H^1, W = 0 \text{ on } \Gamma_g\}$, Ω 와 Γ_g 는 각각 유체 영역과 Dirichlet 경계조건이 주어지는 유체 경계이다. 세 번째 분할단계에서는 연속방정식으로부터 유도된 포아송방정식을 풀어서 압력장을 구한다. 별개의 포아송방정식을 풀기 때문에 압력에 대한 별도의 경계조건이 필요하다.⁽¹¹⁾ 본 연구에서는 식 (4c)의 압력방정식에 대하여 다음과 같은 경계조건을 사용하였다. 먼저 출구에서의 경계조건은 무응력(traction free) 조건을 가정하였을 때 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij} &= -p^{n+1} \delta_{ij} + \tau_{ij}^{n+1} = 0 \\ \Rightarrow p^{n+1} \delta_{ij} &= \tau_{ij}^{n+1} = \hat{\tau}_{ij}. \end{aligned} \quad (7)$$

또한 벽에서의 압력 경계조건은 벽에 수직인 속도 성분이 0 이라는 것을 적용하면 외력을 무시한 운동량방정식으로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial p^{n+1}}{\partial n} &= \rho \bar{n} \cdot (v \nabla^2 \bar{u} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \bar{u} \cdot \nabla \bar{u}) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

네 번째 분할단계에서는 연속방정식을 만족하는 최종속도 u_i^{n+1} 를 구한다. P1P1 분리 유한요소법에 대한 자세한 내용은 참고문헌 (5)를 참고한다.

2.3 P2P1 반-분리 유한요소 공식

식 (1)의 지배방정식을 반-분리 유한요소법으로 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{\dot{u}_i - u_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} (\hat{u}_j \hat{u}_{i,j} + u_j^n u_{i,j}^n) = -\frac{1}{\rho} p_{,i}^n + \frac{1}{2} (\hat{\tau}_{ij} + \tau_{ij}^n)_{,j} + S_i^n, \quad (9a)$$

$$\frac{u_i^* - \dot{u}_i}{\Delta t} = \frac{1}{\rho} p_{,i}^n, \quad (9b)$$

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} p_{,i}^{n+1}, \\ u_{i,i}^{n+1} = 0. \end{cases} \quad (9c)$$

첫 번째와 두 번째 분할단계에서는 운동량방정식을 만족시키기 위해서 P1P1 분리 유한요소법과 같은 형태의 방정식을 푼다. 단, 이 경우 압력과 속도에 대한 형상 함수는 마지막 분할단계에서 얻어지는 속도와 압력이 연성된 식이 LBB 조건을 만족해야 하므로 속도는 압력보다 한 차수 높은 형상함수를 사용한다. 여기서 LBB 조건이란 비압축성 Navier-Stokes 방정식의 통합 유한요소 해석에서 속도와 압력에 대한 형상함수의 선택에 있어서 안정된 해를 얻기 위한 형상함수에 대한 제한조건을 나타내며 자세한 내용은 참고문헌 (20, 21, 22, 23)을 참고한다. 본 연구에서는 Fig. 1(a)에서 주어진 P2P1 형상함수를 사용하였다. 운동량 방정식의 시간 차분은 완전 내재적이고 2 차 정확도인 Crank-Nicolson 법을 사용하였다. 반-분리 유한요소법의 마지막 분할단계에서는 연속방정식을 만족시키기 위해서 압력과 속도가 연성된 안정점 형태의 행렬(saddle-point-type matrix, SPTM)을 푼다. 이 행렬은 식 (9c)로부터 유도되며, 허용되는 모든 함수 $W \in V$ 와 $q \in P$ 에 대해서 다음의 식을 만족하는

$u_i \in H^1$ 와 $p \in L^2$ 를 찾는다.⁽¹²⁾

$$\int_{\Omega} \left[W \cdot \rho \frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x_j} (-p^{n+1} \delta_{ij}) \right] d\Omega + \oint_{\Gamma} W p^{n+1} \delta_{ij} \cdot n_j d\Gamma = 0,$$

$$\int_{\Omega} q \frac{\partial u_i}{\partial x_i} d\Omega = 0. \quad (10)$$

위에서 W 와 q 는 각각 속도와 압력에 대한 형상 함수인데 P2P1 요소를 적용하므로 각각 2 차와 1 차 다항식으로 표현된다.

P1P1 분리 유한요소법은 세 번째 분할단계에서 압력에 대한 타원 형태의 포아송방정식을 풀 후에 마지막 분할단계에서 속도 보정을 하는 반면, P2P1 반-분리 유한요소법은 압력과 속도를 동시에 풀게 된다. 따라서, P1P1 분리 유한요소법의 경우는 별개의 타원형 압력방정식에 대한 추가적인 경계조건이 필요한 단점이 존재한다. 이 문제의 해결을 위한 몇 가지 방안에 대해서는 참고문헌 (5-7)을 참고한다. 반면, 반-분리 유한 요소법의 안정점 형태의 행렬의 경우에는 임의의 한 점에서 주어지는 기준 압력만이 필요하므로 P1P1 분리 유한요소법의 단점을 피할 수 있다. 또한, 속도장과 압력장의 해를 동시에 얻는 전통적인 통합 유한요소법과 비교할 때, 식 (9c)는 주어진 격자계에 대하여 한 번만 행렬의 조립과 예조건화를 하면 되므로 계산의 효율성이 증대된다.

2.4 예조건화 기법

본 연구에서는 행렬에 대한 해법으로 예조건화된 CG(conjugate gradient) 방법을 채택하였다. 예조건화란 어떤 선형 시스템을 주어진 반복해법(iterative solvers)으로 풀기 쉽도록 강성 행렬의 성질을 변형하는 것이다. 다양한 종류의 예조건인자(preconditioner)가 알려져 있는데 그 중 ILU 분해(incomplete LU decomposition)는 대각선 예조건인자(diagonal preconditioner)와 함께 가장 많이 쓰인다. 아래 식에서와 같이 주어진 행렬 A 가 있을 때 예조건화로서 행렬 P 를 곱해주면 행렬 A' 을 얻게 되고 예조건화의 결과로 얻은 A' 은 A 보다 작은 조건수(condition number, κ)를 가지게 된다.

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= \vec{b}, \\ PA\vec{x} &= P\vec{b}, \\ A'\vec{x} &= \vec{b}'. \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 $\kappa(A') < \kappa(A)$ 이며, 대부분의 CG 계열 해법들의 경우 반복 수는 $\sqrt{\kappa}$ 에 비례하므로, 예조건화란 주어진 행렬의 κ 를 작게 해 주는 작업이라 말할 수 있다.

P1P1 요소를 사용한 분리 알고리즘의 경우에는 운동량방정식과 압력방정식 모두에 대하여 ILU(0) 예조건화를 적용하였다. ILU(0) factorization의 경우는 이 P 가 A 와 같은 nonzero map 을 가지게 된다.

P2P1 요소를 이용한 반-분리 공식화의 경우 식 (9c)에서 생성된 행렬은 아래와 같은 안정점 형태가 된다.⁽⁹⁾

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{g} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

이 때 연속방정식에 압력항이 포함되어 있지 않기 때문에 전체행렬의 영 구역(zero block)이 생기게 된다. 이 영 구역은 기존의 ILU(0) 예조건화의 성능을 떨어뜨리기 때문에 연속방정식에 압력변수가 포함되어 있다고 가정하여 ILU 예조건인자를 수정한 AILU(adaptive ILU)를 적용하였다. AILU 기법에 대한 자세한 내용은 참고문헌 (9)를 참고한다.

3. 수치해석 결과

계산을 수행한 컴퓨터 사양으로 CPU는 Pentium IV 2 GHz 이며 Memory는 2 GByte 이다. Operating System은 Redhat Linux 7.3 이며, Compiler는 Intel(R) Fortran 6.0 이고, L2 cache size는 512 kByte 이다. P1P1 분리 유한요소법과 P2P1 반-분리 유한요소법을 비교하기 위해서 원형 실린더 주위에서의 비정상 유동과 이론해가 주어진 경우의 감쇠와류 문제, 그리고 마지막으로 2 차원 충돌제트 문제에 대하여 그 해의 정확도 및 계산시간을 비교한다.

3.1 원형 실린더 주위에서의 유동

이 절에서는 원형 실린더 주위에서의 비정상 상태의 유동에 대해 조사하였다. 사용된 격자계 및 경계조건은 Fig. 2 와 같으며, 격자 생성은 상용 프로그램인 ICEM-CFD 4.0 을 사용하였고, 요소 수는 6846 개이다. 실린더 후류에서의 보다 효과적인 계산을 위해서 실린더 뒷부분에 더 집중된 격자를 주었으며, D 는 실린더의 직경을 의미하고, 계산 영역은 가로, 세로방향으로 각각 $37D, 56D$ 이다.

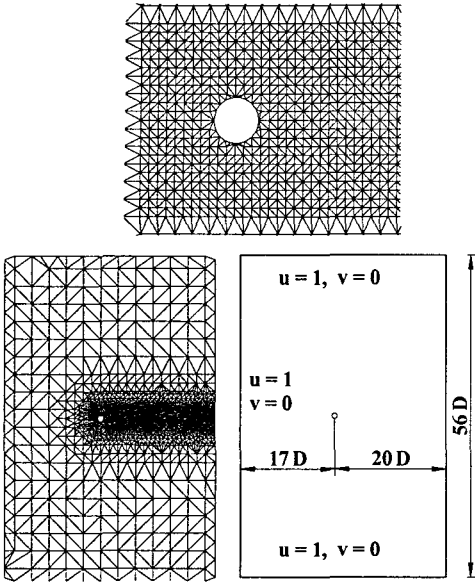


Fig. 2 Nonuniform grid system and the boundary conditions for the flow behind a circular cylinder

Table 1 CPU time for the flow past a circular cylinder

Method	CPU Time (second)
P2P1 Semi-segregation FEM	5200
P1P1 Segregation FEM	10420
P2P1 Coupled FEM	78600

먼저, 원형 실린더 주위에서의 비정상 유동에 대한 문제로서, 실린더 직경을 기준으로 한 Re_D 가 대략 40 이상이 되면 실린더 뒤쪽에서의 유동은 불안정하게 되며 보텍스 shedding(vortex shedding) 현상이 일어나게 된다.⁽¹³⁾

본 논문에서는 $Re_D = 100$ 인 경우에 대해 주기적인 보텍스 shedding 현상을 조사하였으며 두 기법 모두 동일하게 시간간격 $\Delta t = 0.01$ 로 주었다. 먼저 두 기법의 계산시간을 살펴보면 Table 1 과 같다. P2P1 반-분리 유한요소법이 P1P1 분리 유한요소법과 비교해 약 2 배 정도 빨랐으며, 이는 P2P1 반-분리 공식의 세 번째 분할단계(안장점 형태의 행렬 해법)에서의 계산시간이 P1P1 분리 공식의 세 번째 분할단계(타원형 형태의 포아송 방정식 해법)에서의 계산시간보다 더 적게 걸리기 때문인 것으로 판단된다.

다음으로, 실린더 뒤쪽에서의 유동의 주기적인 현상을 살펴보기 위해 스트로울수(Strouhal number, St)를 두 기법들에 대하여 비교하였다. Fig. 3 은 각 기법들에 따른 실린더 뒤쪽 한 점에서의 속도 u 에 대한 시간진전을 나타낸다. 실린더 후류에서

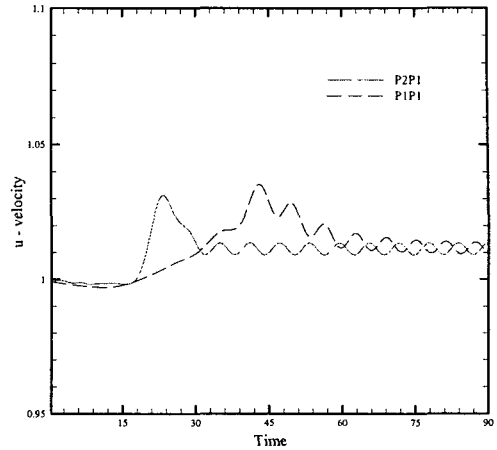


Fig. 3 Temporal evolution of the velocity at a point behind a circular cylinder

Table 2 Comparison of the present results with others for the flow past a circular cylinder

Reference	Method	St
Present study	P2P1 (13826 nodes)	0.163
Present study	P1P1 (13826 nodes)	0.161
Williamson ⁽¹³⁾		0.164
Braza et al. ⁽¹⁴⁾	FVM (13530 grid points)	0.160
Karniadakis et al. ⁽¹⁵⁾	Spectral element method	0.179
Kwon and Choi ⁽¹⁶⁾	FDM (321×321)	0.165

주기적인 형태가 보임을 알 수 있으며, 보텍스 shedding 현상의 주기는 P2P1 의 경우에 $6.14D/u_\infty$ 이며, P1P1 의 경우에는 $6.2D/u_\infty$ 였다.

Table 2 는 각 기법들의 스트로울수를 비교한 것이다. 두 기법의 결과를 실험적 연구인 Williamson⁽¹³⁾의 결과와 기존의 수치 결과들⁽¹⁴⁻¹⁶⁾과 비교하였으며 P2P1 이 P1P1 에 비해 Williamson 의 결과와 더 잘 일치하고 있음을 볼 수 있다.

3.2 감쇠와류 (Decaying Vortex)

이 절에서는 다음과 같이 해가 정의된 2 차원 비정상 유동에 대해 두 기법들의 공간 정확도를 비교하였다.

$$\begin{aligned}
 u(x, y, t) &= -\cos \pi x \cdot \sin \pi y \cdot e^{-2\pi^2 t / Re} , \\
 v(x, y, t) &= \sin \pi x \cdot \cos \pi y \cdot e^{-2\pi^2 t / Re} , \\
 p(x, y, t) &= -0.25(\cos 2\pi x + \cos 2\pi y)e^{-4\pi^2 t / Re} . \quad (13)
 \end{aligned}$$

$Re = UL/\nu = 10$ 이며, 여기서 U 와 L 은 각각 초기 최대속도와 와류의 크기를 나타내며, 계산 영역은

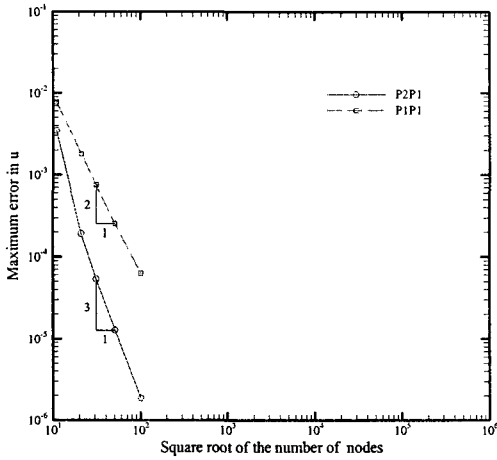


Fig. 4 Maximum errors in u at $t = 0.3$ ($\Delta t = 0.001$)

$-1/2 \leq (x, y) \leq 1/2$ 이다.⁽¹⁷⁾ 초기 속도분포와 압력 분포 및 경계조건은 식 (13)에서의 이론 해를 이용하여 구할 수 있으며, 균일하게 분포된 각각 100, 400, 900, 2500, 10000 개의 3 각형 요소를 가지고 계산을 수행하였다.

공간 정확도를 계산하기 위해서 시간간격에 대한 영향을 최소화하고자 시간간격은 공간간격에 비해 충분히 작게 주었다($\Delta t = 0.001$).⁽¹⁷⁾ 두 기법들에 대하여 격자 크기를 변화시켜 가면서 오차를 측정함으로써 공간 정확도의 기울기를 구하였으며, 그 결과는 Fig. 4 와 같다. 이미 잘 알려진 바와 같이 P2P1 요소를 사용한 경우는 3 차 공간 정확도를 가짐을 확인할 수 있었으며,⁽¹⁸⁾ P1P1 은 약 2 차 공간 정확도를 보였다. 이를 통해서 속도에 대해 2 차 보간을 사용하는 P2P1 이 1 차 보간을 사용하는 P1P1 에 비해 더 정확한 해를 구할 수 있음을 확인하였다.

3.3 2 차원 충돌제트(2-Dimensional Impinging Jet)

마지막으로 2 차원 충돌제트 문제에 대하여 그 결과를 비교하였다. 충돌제트는 제트 출구로부터 냉각 및 가열 유체를 충돌판 표면에 직접 분사시켜서 국소적으로 열전달 및 물질전달 효과를 높일 수 있는 효율적인 방법으로 산업전반에 걸쳐 폭 넓게 이용되고 있다. 문제를 단순화하기 위해서 제한 벽이 없는 비제한 제트(unconfined jet)에 대하여 노즐 출구에서의 속도를 일정하게 주었을 경우와 포물선 형태로 주었을 경우에 대하여 계산을 수행하였으며, 유동 영역은 Fig. 5 와 같다. 충돌판의 폭 및 높이는 각각 8, 2 이며, 노즐폭은 1 이다. 충돌판에 대한 경계조건은 점착조건 ($u = 0, v = 0$)

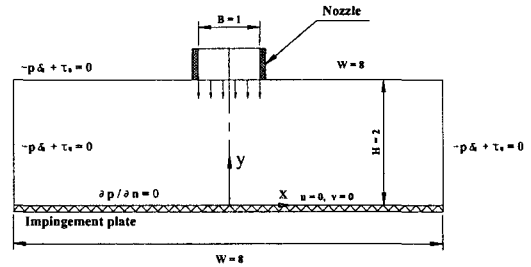


Fig. 5 Flow region considered for the impinging jet problem

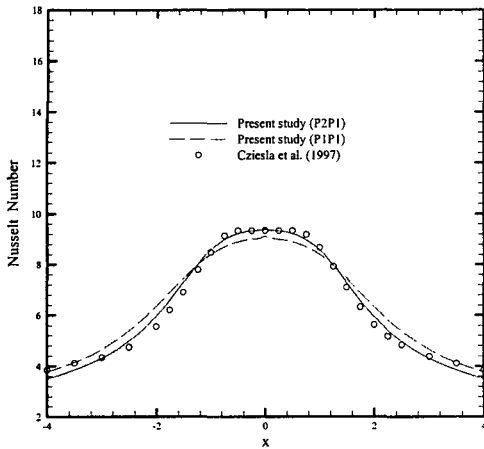
Table 3 CPU time for each fractional step in a time step with 201×101 mesh

Fractional step	Method	
	P1P1 segregation FEM	P2P1 semi-segregation FEM
1st step	0.45	0.45
2nd step	0.11	0.11
3rd step	1.12	0.32
4th step	0.12	
Total	1.8	0.9

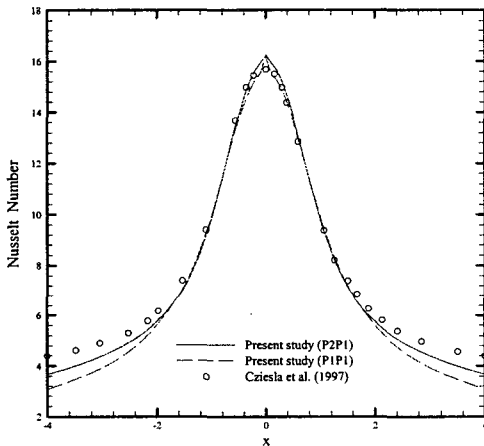
을 주었으며, P1P1 분리 유한요소법의 경우 압력 방정식에 대한 추가적인 경계조건이 필요한데 출구에서는 Fig. 5 에 표시한 것처럼 무응력(traction free) 조건을 이용하여 압력 값을 지정하였다.

Table 3 은 한 번의 시간단계에서 두 기법들의 각 분할단계별 계산시간을 나타낸다. 첫 번째와 두 번째 분할단계에서는 같은 형태의 방정식을 풀기 때문에 계산시간의 차이가 거의 없고 단지 세 번째 분할단계에서만 계산시간의 차이가 있음을 알 수 있으며, 이것이 전체 계산시간의 차이를 가져오고 있음을 확인할 수 있다.

Fig. 6 은 $Re_B = 450$ 인 경우에 대하여 본 연구 결과의 누셀수(Nusselt number)를 Cziesla 등⁽¹⁹⁾의 계산결과와 비교한 것이다. 충돌판의 중심에서 멀어질수록 누셀수가 감소함을 알 수 있으며, 노즐 출구에서의 속도분포가 포물선 형태인 경우에는 속도분포의 영향으로 충돌판 중심에서 누셀수가 최대값을 가짐을 볼 수 있다. 또한, P2P1 반-분리 기법을 사용하는 경우가 P1P1 분리 기법을 사용하는 경우보다 충돌판 중심부에서 Cziesla 등의 결과와 더 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. P1P1 분리 기법의 경우에는 세 번째 분할단계에서의 압력 방정식에 대한 경계조건이 그 수렴성과 정확도에 상당한 영향을 끼치며, 출구에서의 압력을 대기압으로 지정한 경우에는 수렴된 해를 얻지 못하였다 이와 같은 결과를 볼 때 P1P1 분리 기법이 압력 경계조건에 상당히 민감하다는 것과 물리적



(a) Uniform inlet velocity profile



(b) Parabolic inlet velocity profile

Fig. 6 Nu distribution for uniform and parabolic inlet velocity profiles at the nozzle exit

인 경계조건이 제공되지 않은 경우에도 압력 경계조건이 필요함을 알 수 있다.

4. 결론

비압축성 Navier-Stokes 방정식을 해석하기 위해서 속도와 압력을 같은 노드에 위치시키는 P1P1 분리 유한요소법과 압력보다 속도를 두 배 더 정밀하게 위치시키는 P2P1 반-분리 유한요소법을 제안하고 여러 표준문제들에 대하여 정확도 및 계산 시간을 비교하였다.

감쇠유동에서 알 수 있듯이 P2P1 반-분리 유한요소법을 사용한 경우에는 속도에 대해 2 차의 (quadratic) 형상함수를 취할 수 있으므로 공간 정확도는 3 차 정확도를 가진다. 한편, P1P1 분리 유

한요소법의 경우에는 속도변수에 선형함수를 취하므로 약 2 차 정확도를 가짐을 확인하였다.

충돌제트 문제에서와 같이 유동장이 복잡한 경우에 P1P1 분리 알고리즘에서는 압력방정식의 경계조건이 해의 정확도 및 수렴성에 영향을 주고 있음을 확인하였으며, 또한 압력 경계조건에 대한 물리적인 정보가 주어지지 않은 경우에도 압력 경계조건을 항상 지정해야 하는 문제가 발생한다. 반면, P2P1 반-분리 유한요소법은 분리계산의 마지막 단계에서 압력과 속도를 동시에 푸는 안장점 (Saddle Point) 형태의 행렬을 풀기 때문에 압력 경계조건을 따로 필요로 하지 않으므로 P1P1 분리 유한요소법에 비해 좀 더 견고한 수렴이력을 보임을 확인하였다.

계산시간을 살펴볼 때, 각각의 표준문제에 대해서 P2P1 반-분리 유한요소법이 P1P1 분리 유한요소법과 비교하여 2 배정도 빨랐으며, 이는 P1P1 분리 유한요소법의 세 번째 분할단계에서 압력방정식을 푸는데 걸리는 시간이 P2P1 반-분리 유한요소법의 안장점 형태 행렬을 푸는데 걸리는 시간보다 같은 예조건화 기법을 사용했을 때에 상대적으로 오래 걸리기 때문인 것으로 판단된다. 또한 기존의 P2P1 통합 유한요소법과 비교했을 때에도 매 시간단계마다 행렬의 조립과 예조건화를 하지 않아도 되기 때문에 상당히 계산시간의 단축을 가져왔음을 확인하였다.

고찰된 모든 표준문제들에서 확인할 수 있듯이, P2P1 반-분리 유한요소법이 P1P1 분리 유한요소법에 비해서 해의 정확도 및 계산시간에서 장점을 가지고 있음을 알 수 있다.

후 기

이 연구는 NGV 기술개발과제와 BK21 사업의 지원으로 수행되었으며 이에 감사 드립니다.

참고문헌

- (1) Tezduyar, T. E., Liou, J. and Ganjoo, D. K., 1990, "Incompressible Flow Computations Based on the Vorticity-Stream Function and Velocity-Pressure Formulations," *Comput. & Structures*, Vol. 35, pp. 445~472.
- (2) Tezduyar, T. E., Mittal, S. and Shih, R., 1991, "Time-Accurate Incompressible Flow Computations with Quadrilateral Velocity-Pressure Elements," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 87, pp. 363~384.

- (3) Brooks, A. N. and Hughes, T. J. R., 1982, "Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 32, pp. 199~259.
- (4) Codina, R., Oñate, E. and Cervera, M., 1992, "The Intrinsic Time for the Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulation Using Quadratic Elements," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 94, pp. 239~262.
- (5) Choi, H. G., Choi, H. and Yoo, J. Y., 1997, "A Fractional Four-Step Finite Element Formulation of the Unsteady Incompressible Navier-Stokes Equations Using SUPG and Linear Equal-Order Element Methods," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 143, pp. 333~348.
- (6) Ramaswamy, B. and Jue, T. C., 1992, "Some Recent Trends and Developments in Finite Element Analysis for Incompressible Thermal Flows," *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, Vol. 35, pp. 671~707.
- (7) Tabarok, B. and Su, J., 1994, "Semi-Implicit Taylor-Galerkin Finite Element Methods for Incompressible Viscous Flows," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 117, pp. 391~410.
- (8) Hanby, R. F., Silvester, D. J. and Chew, J. W., 1996, "A Comparison of Coupled and Segregated Iterative Solution Techniques for Incompressible Swirling Flow," *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 22, pp. 353~373.
- (9) Nam, Y. S., Choi, H. G. and Yoo, J. Y., 2002, "AILU Preconditioning for the Finite Element Formulation of the Incompressible Navier-Stokes Equations," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 191, pp. 4323~4339.
- (10) Choi, H. and Moin, P., 1994, "Effects of the Computational Time Step on Numerical Solutions of Turbulent Flow," *J. Comput. Phys.*, Vol. 113, pp. 1~4.
- (11) Kim, B. J., Kang, S. W., Choi, H. G. and Yoo, J. Y., 2003, "Numerical Study on the Drag of a Car Model Under Road Condition," *Trans. of the KSME (B)*, Vol. 27, No. 8, pp. 1182~1190.
- (12) Namkoong, K., Choi, H. G. and Yoo, J. Y., 2004, "Numerical Analysis of Two-Dimensional Motion of a Freely Falling Circular Cylinder in an Infinite Fluid," *Trans. of the KSME (B)*, Vol. 28, No. 6, pp. 713~725.
- (13) Williamson, C. H. K., 1989, "Oblique and Parallel Modes of Vortex Shedding in the Wake of a Circular Cylinder at Low Reynolds Numbers," *J. Fluid Mech.*, Vol. 206, pp. 579~627.
- (14) Braza, M., Chassaing, P. and Ha Minh, H., 1986, "Numerical Study and Physical Analysis of the Pressure and Velocity Fields in the Near Wake of a Circular Cylinder," *J. Fluid Mech.*, Vol. 165, pp. 79~130.
- (15) Karniadakis, G. E. and Triantafyllou, G. S., 1989, "Frequency Selection and Asymptotic States in Laminar Wakes," *J. Fluid Mech.*, Vol. 199, pp. 441~469.
- (16) Kwon, K. and Choi, H., 1994, "A Passive Control of Vortex Shedding Using a Splitter Plate Attached to a Circular Cylinder," *Proceedings of the KSME 1994 Fall Annual Meeting*, pp. 502~507.
- (17) Kim, D. and Choi, H., 2000, "A Second-Order Time-Accurate Finite Volume Method for Unsteady Incompressible Flow on Hybrid Unstructured Grids," *J. Comput. Phys.*, Vol. 162, pp. 411~428.
- (18) Becker, E. B., Carey, G. F. and Oden, J. T., 1983, "Finite Elements, an Introduction," Vol. 1, *Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., U. S. A.*
- (19) Cziesla, T., Tandogan, E. and Mitra, N. K., 1997, "Large-Eddy Simulation of Heat Transfer from Impinging Slot Jets," *Numerical Heat Transfer, Part A*, Vol. 32, pp. 1~17.
- (20) Carey, G. F. and Oden, J. T., 1986, "Finite Elements, Fluid Mechanics," Vol. 6, *Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., U. S. A.*
- (21) Babuška, I., 1971, "Error Bounds for Finite Element Method," *Numer. Math.*, Vol. 16, pp. 322~333.
- (22) Brezzi, F., 1976, "On the Existence, Uniqueness and Approximation of Saddle Point Problems Arising from Lagrange Multipliers." *RAIRO, Ser. Rouge Anal. Numer.* Vol. 8, R-2.
- (23) Hughes, T. J. R., Franca, L. P. and Balesstre, M., 1986, "A New Finite Element Formulation for Computational Fluid Dynamics: V. Circumventing the Babuska-Brezzi Condition: A Stable Petrov-Galerkin Formulation of Stokes Problem Accommodating Equal Order Interpolations," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 59, pp. 85~99.