

< 논문 >

X방향을 따라 물성구배를 갖는 직교이방성 함수구배 재료에서 전파하는 모드 III 균열의 응력장과 변위장

이 광 호* · 조 상 봉*

(2005년 4월 7일 접수, 2006년 1월 19일 심사완료)

Stress and Displacement Fields of a Propagating Mode III Crack in Orthotropic Functionally Gradient Materials with Property Gradation Along X Direction

Kwang Ho Lee and Sang Bong Cho

Key Words: Orthotropic Functionally Gradient Materials(직교이방성 함수구배재료), Propagating Crack(전파균열), Property Gradation(물성구배), Stress Intensity Factor(응력확대계수), Stress and Displacement Fields(응력장과 변위장)

Abstract

Stress and displacement fields of a propagating Mode III crack in an orthotropic functionally gradient material (OFGM), which has (1) linear variation of shear modulus with a constant density, and (2) an exponential variation of shear modulus and density, are derived. The equations of motion in OFGM are developed and solution to the displacement and stress fields for a propagating crack at constant speed through an asymptotic analysis. The stress terms associated with $r^{-1/2}$ and r^0 are not affected by the FGM constant ξ which is nonhomogeneous parameter, only on the higher order terms, the influences of nonhomogeneity on the stress are explicitly brought out. When the FGM constant ξ is zero or $r \rightarrow 0$, the fields for OFGM are almost same as the those for homogeneous orthotropic material. Using the stress components, the effects of nonhomogeneity on stress components are discussed.

1. 서 론

항공우주구조물의 표면 또는 로의 내부 벽면은 고온으로 말미암아 열 저항성이 높은 세라믹계의 재료로 외벽 또는 내벽 처리를 하여 사용한다. 기어, 베어링, 금형 등의 표면은 지속적이고 반복적인 하중으로 말미암아 대개 높은 내마모성과 파괴인성이 요구되는 초경합금 또는 내마모성이 우수한 재료로 도금처리하여 사용하고 있다. 그러나 재료 표면에 열 벽 또는 초경도금처리는 구

적인 관점에서 볼 때, 접합계면에서의 갑작스런 물성치 변화로 응력집중현상이 발생 할 것이며, 또한 높은 열응력, 반복응력 등으로 인하여 접착부는 취약성을 가진다. 그 결과 접합재료는 쉽게 균열 또는 탈쇄현상이 발생한다. 이러한 단점을 보완하기 위하여 함수구배재료 (FGM)가 개발되었다. 함수구배재료는 공간적으로 물성치 구배를 갖는 재료로서, 표면부는 높은 열 저항성 또는 높은 강도를 갖고 내부에는 열응력 또는 충격응력을 흡수하기 위한 재료로 구성된다.

함수구배재료의 파괴역학적 연구를 보면 Delale 등⁽¹⁾이 지수함수적인 탄성계수를 갖는 함수구배 재료의 균열선단에서 응력장은 등방성 재료와 같이 $r^{-1/2}$ 의 특이성을 갖고 있음을 확인하였다.

* 책임저자, 회원, 상주대학교 자동차공학과
E-mail : khlee@sangju.ac.kr
TEL : (054)530-5404 FAX : (054)530-5407
* 회원, 경남대학교 기계자동차 공학부

이어서 Eischen⁽²⁾ 등은 탄성변화의 형태를 고려하지 않은 상태에서 응력장을 연구한 결과 응력장의 첫 번째 2개의 항 ($r^{-1/2}$, r^0)은 재료의 비균질성에 영향을 받지 않으며, 그 이후의 고차항에 만 영향을 받는 것을 확인하였다. 이외에도 많은 연구들의 결과⁽³⁻⁵⁾에 의하면 함수구배재료의 균열선단의 응력장은 $r^{-1/2}$ 의 특이성을 가지나 응력확대계수는 물성치의 비균질성에 영향을 받는다. 그리하여 균열에 매우 가까운 영역에서 응력장은 등방성 재료의 응력장과 일치한다고 하겠다. 한편 FGM의 동적균열에 대한 응력장의 해석은 Paramswaran과 Shukla^(6,7) 등이 재료의 물성치가 X방향으로 선형적 또는 비선형적으로 변화하는 FGM에서 등속전파하는 균열선단부근에서 비균질의 영향을 받는 합성 응력장($\sigma_{xx} + \sigma_{yy}$)을 얻은 바 있다. 그러나 파괴역학을 이론 또는 실험으로 해석하는 경우 분리된 응력성분 σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} 을 이해하는 것은 매우 중요하다. 따라서 Lee⁽⁸⁾는 변위 포텐셜을 사용하여 등속전파균열에 대한 분리된 비균질 응력장을 유도한 바가 있다.

지금까지 함수구배재료의 파괴해석은 등방성체의 함수구배에 대한 해석이 대부분이며, 직교이방성체의 함수구배재료에 대한 전파균열의 파괴해석은 찾아볼 수 없다.

따라서 본 연구에서는 직교이방성 재료에서 재료의 물성치 변화가 균열의 방향과 일치하는 직교이방성 함수구배재료에서 모드 III 하중을 받아 균열이 전파할 때 전파균열선단 부근에 대한 응력장과 변위장을 유도하고 이에 대한 전파균열선단의 응력 및 변위 거동을 연구하는 것이 본 연구의 목적이다.

2. 선형적 탄성변화의 응력장과 변위장

2.1 평형방정식 공식화

Fig. 1과 같은 이방성체에서 X 방향을 따라 전단탄성계수가 $C_{ij} = C_{ij}^0(1 + \zeta X)$ 의 함수구배를 가질 때 응력과 변위와의 관계는 식 (1)과 같이 나타낼 수 있다.

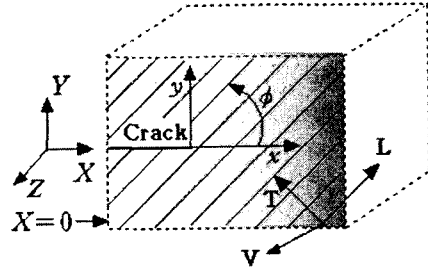


Fig. 1 Coordinate reference for orthotropic material

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= (1 + \zeta X) \left(C_{45}^0 \frac{\partial W}{\partial Y} + C_{55}^0 \frac{\partial W}{\partial X} \right) \\ \tau_{yz} &= (1 + \zeta X) \left(C_{45}^0 \frac{\partial W}{\partial X} + C_{44}^0 \frac{\partial W}{\partial Y} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 C_{ij}^0 는 $X=0$ 에서 전단탄성계수이며 밀도와 포아송의 비는 일정하다. ζ 는 비균질 물성치 상수, X , Y 는 고정 좌표축이다. 한편 균열방향과 보강방향(탄성주축방향)이 이루는 각도 ϕ 에 의존되는 전단 탄성상수 C_{ij}^0 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} C_{44}^0 &= G_{TV}^0 \cos^2 \phi + G_{LV}^0 \sin^2 \phi \\ C_{55}^0 &= G_{TV}^0 \sin^2 \phi + G_{LV}^0 \cos^2 \phi \\ C_{45}^0 &= (G_{LV}^0 - G_{TV}^0) \sin \phi \cos \phi \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 L 는 보강방향 (파이버방향), T 는 보강방향에 직각방향을 나타내며, V 는 $L-T$ 평면에 직각방향을 나타낸다. G_{LV}^0, G_{TV}^0 는 각각 $X=0$ 에서 $L-V$ 및 $T-V$ 평면을 기준으로 하는 전단탄성계수를 나타낸다. 한편 동적인 문제에서 평형방정식은 식 (3)과 같다.

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial X} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial Y} = \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (3)$$

식 (1)을 식 (3)에 대입하면 식 (4)와 같은 동적상태의 평형방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} (1 + \zeta X) \left(C_{55}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + C_{44}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + 2C_{45}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} \right) \\ + \zeta \left[C_{45}^0 \frac{\partial W}{\partial Y} + C_{55}^0 \frac{\partial W}{\partial X} \right] = \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (4)$$

균열이 기준좌표계 (X, Y) 의 X 방향을 따라 전파할 때 균열선단의 이동좌표계 (x, y) 와의 관계는 $x = X - ct$, $y = Y$ 이다. 이와 같은 관계를 적용할 때 식 (4)는 식 (5)와 같다.

$$\begin{aligned} & \alpha_s^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{C_{44}^o}{C_{55}^o} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2 \frac{C_{45}^o}{C_{55}^o} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \\ & + \beta x \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{C_{44}^o}{C_{55}^o} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2 \frac{C_{45}^o}{C_{55}^o} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) \\ & + \beta \left[\frac{C_{45}^o}{C_{55}^o} \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial x} \right] = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

여기서

$$\begin{aligned} \alpha_s &= \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_s^c}\right)^2}, \quad c_s^c = \sqrt{\frac{C_{55}^o}{\rho}} \\ C_{55}^c &= C_{55}^o (1 + \zeta a), \quad \beta = \frac{\zeta}{1 + \zeta a} \end{aligned}$$

C_{55}^o 와 c_s^c 는 각각 균열선단($x=0$)에서 전단탄성계수와 전단탄성파의 속도를 나타낸다. a 는 중앙균열인 경우는 균열길이의 반이며, 측면 균열인 경우는 균열의 길이이다. 식 (5)의 편미분 방정식의 해를 얻기 위하여 새로운 좌표계 $n_1 = x/\varepsilon$, $n_2 = y/\varepsilon$ 를 도입한다.⁽⁹⁾ 작은 ε 값을 선택하므로 균열선단에 가까운 점들은 n_1, n_2 평면의 전체 영역으로 확장시킬 수 있다. 새로운 좌표계에 의해 식 (5)는 식 (6)과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} & \alpha_s^2 \frac{\partial^2 W}{\partial n_1^2} + \frac{C_{44}^o}{C_{55}^o} \frac{\partial^2 W}{\partial n_2^2} + 2 \frac{C_{45}^o}{C_{55}^o} \frac{\partial^2 W}{\partial n_1 \partial n_2} \\ & + \varepsilon \beta n_1 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial n_1^2} + \frac{C_{44}^o}{C_{55}^o} \frac{\partial^2 W}{\partial n_2^2} + 2 \frac{C_{45}^o}{C_{55}^o} \frac{\partial^2 W}{\partial n_1 \partial n_2} \right) \\ & + \varepsilon \beta \left[\frac{C_{45}^o}{C_{55}^o} \frac{\partial W}{\partial n_2} + \frac{\partial W}{\partial n_1} \right] = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

이 단계에서 W 는 식 (7)과 같이 ε 의 멱급수열로 나타낸다.

$$W(x, y) = W(\varepsilon n_1, \varepsilon n_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n/2} W_n(n_1, n_2) \quad (7)$$

식 (7)을 식 (6)에 대입하여 식 (8)을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \varepsilon^{n/2} \left[\alpha_s^2 \frac{\partial^2 W_n}{\partial n_1^2} + \frac{C_{44}^o}{C_{55}^o} \frac{\partial^2 W_n}{\partial n_2^2} + 2 \frac{C_{45}^o}{C_{55}^o} \frac{\partial^2 W_n}{\partial n_1 \partial n_2} \right] \right. \\ & + \varepsilon^{(n+2)/2} \beta \left[n_1 \left(\frac{\partial^2 W_n}{\partial n_1^2} + \frac{C_{44}^o}{C_{55}^o} \frac{\partial^2 W_n}{\partial n_2^2} + 2 \frac{C_{45}^o}{C_{55}^o} \frac{\partial^2 W_n}{\partial n_1 \partial n_2} \right) \right. \\ & \left. \left. + \frac{C_{45}^o}{C_{55}^o} \frac{\partial W_n}{\partial n_2} + \frac{\partial W_n}{\partial n_1} \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

식 (8)이 임의의 ε 에 대하여 성립하기 위하여 ε 의 각 미분방정식을 0으로 두어야 한다. 그리하여 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \alpha_s^2 \frac{\partial^2 W_n}{\partial n_1^2} + \frac{C_{44}^o}{C_{55}^o} \frac{\partial^2 W_n}{\partial n_2^2} + 2 \frac{C_{45}^o}{C_{55}^o} \frac{\partial^2 W_n}{\partial n_1 \partial n_2} &= 0 \\ &: n = 1, 2 \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} \alpha_s^2 \frac{\partial^2 W_n}{\partial n_1^2} + \frac{C_{44}^o}{C_{55}^o} \frac{\partial^2 W_n}{\partial n_2^2} + 2 \frac{C_{45}^o}{C_{55}^o} \frac{\partial^2 W_n}{\partial n_1 \partial n_2} &= \\ -\beta \left\{ n_1 \left(\frac{\partial^2 W_{n-2}}{\partial n_1^2} + \frac{C_{44}^o}{C_{55}^o} \frac{\partial^2 W_{n-2}}{\partial n_2^2} + 2 \frac{C_{45}^o}{C_{55}^o} \frac{\partial^2 W_{n-2}}{\partial n_1 \partial n_2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{C_{45}^o}{C_{55}^o} \frac{\partial W_{n-2}}{\partial n_2} + \frac{\partial W_{n-2}}{\partial n_1} \right\} : n \geq 3 \end{aligned} \quad (9b)$$

2.2 $n = 1, 2$ 에 대한 응력장과 변위장

먼저 $n = 1, 2$ 에 대한 W_n 의 일반해를 살펴보면, 복소함수 $z_s = x + my$ 로 두고 이것을 식 (9a)에 적용하면 식 (9a)는 다음과 같다.

$$\left(\frac{C_{44}^o}{C_{55}^o} m^2 + 2 \frac{C_{45}^o}{C_{55}^o} m + \alpha_s^2 \right) \frac{\partial^2 W_n}{\partial z_s^2} = 0 \quad (10)$$

식 (10)에서 W_n 의 일반적인 해는

$$W_n = \Omega_n(z_s) + \overline{\Omega_n(z_s)} = 2Re[\Omega_n(z_s)] \quad (11)$$

이다. 여기서 $z_s = x + my$ 이며,

$$m = \frac{-C_{45}^o + i\sqrt{C_{44}^o C_{55}^o \alpha_s^2 - C_{45}^o{}^2}}{C_{44}^o} \quad \text{이다.}$$

식 (11)을 식 (1)에 대입하면

$$\tau_{yz} = 2(1 + \beta x) Re\{D_z \Omega'(z_s)\} \quad (12a)$$

$$\tau_{xz} = 2(1 + \beta x) Re\{E_z \Omega'(z_s)\} \quad (12b)$$

여기서

$$E_c = (1 + \zeta a)(C_{45}^c m + C_{55}^c) = (C_{45}^c m + C_{55}^c)$$

따라서 D_c 와 E_c 는 균열선단에서 물리적 의미를 나타낸다. 한편 복소함수 Ω_n 을 멱급수열로 나타내면

$$\Omega_n = \sum_{\lambda=1}^{\infty} C_n z_s^\lambda = \sum_{\lambda=1}^{\infty} (C_n^o + iC_n^*) z_s^\lambda \quad (13)$$

여기서 C_n 는 복소상수이다. 식 (13)을 식 (12)에 대입한 후, 균열면에서 표면력이 0인 조건을 적용하면

$$\lambda_n = n/2, \quad C_n = \begin{cases} -iC_n^+ & : n = \text{odd} \\ C_n^+ & : n = \text{even} \end{cases} \quad (14)$$

을 얻는다. $n=1$ 인 경우가 균열선단 부근의 응력장을 나타내며, 식 (14)를 (13)에 대입하고 다시 (12a)에 대입하면

$$\tau_{yz} = (1 + \beta x) n C_n^+ S_c r_s^{n/2-1} \begin{cases} \cos(\frac{n}{2}-1)\theta_s & : n = \text{odd} \\ -\sin(\frac{n}{2}-1)\theta_s & : n = \text{even} \end{cases} \quad (15)$$

이다. 동적 모드 III 상태에서 응력확대계수와 복소상수 C_1^+ 와의 관계는 다음과 같다.

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} (\tau_{yz})_{\theta=0} = S_c \sqrt{2\pi} C_1^+ \quad (16)$$

그리하여 C_n^+ 와 K_n^+ 는 식 (17)과 같다.

$$C_n^+ = K_n^+ / S_c \sqrt{2\pi} \quad (17)$$

식 (17)을 (15) 및 (12b)에 대입하면 $n=1, 2$ 에 대한 응력장은 식 (18)과 같이 얻을 수 있다.

$$\tau_{yzn} = (1 + \beta x) \sum_{n=1}^2 \tau_{yzn}^o, \quad \tau_{xzn} = (1 + \beta x) \sum_{n=1}^2 \tau_{xzn}^o \quad (18)$$

여기서

$$\tau_{yzn}^o = \frac{K_n^+}{\sqrt{2\pi}} n r_s^{n/2-1} \begin{cases} \cos(\frac{n}{2}-1)\theta_s & : n=1 \\ -\sin(\frac{n}{2}-1)\theta_s & : n=2 \end{cases}$$

$$\tau_{xzn}^o = \sum_{n=1}^2 \frac{K_n^+}{\sqrt{2\pi}} n r_s^{n/2-1} \times \quad (19)$$

$$\begin{cases} p \cos(\frac{n}{2}-1)\theta_s + q \sin(\frac{n}{2}-1)\theta_s & : n=1 \\ -p \sin(\frac{n}{2}-1)\theta_s + q \cos(\frac{n}{2}-1)\theta_s & : n=2 \end{cases}$$

$p = \frac{C_{45}^c}{C_{44}^c}$, $q = \frac{C_{44}^c C_{55}^c - (C_{45}^c)^2}{C_{44}^c S_c}$ 이며, C_{ij}^c 는 균열선단에서 전단탄성계수이다. 한편 식 (17)을 식 (13)에 대입한 후 다시 식 (13)을 식 (11)에 대입하면 변위 W_n 는 식 (20)과 같다.

$$W_n = \sum_{n=1}^2 \frac{2K_n^+}{S_c \sqrt{2\pi}} r_s^{n/2} \begin{cases} \sin \frac{n}{2} \theta_s & : n=1 \\ \cos \frac{n}{2} \theta_s & : n=2 \end{cases} \quad (20)$$

여기서 K_1^+ 는 응력확대계수 K_{III} 이다. $n=1, 2$ 일 때 평형방정식 (10)은 균질 직교이방성재료(10)의 경우와 같으나 그들의 응력장과 변위장은 비균질 상수 ζ 에 영향을 받고 있음을 알 수 있다.

2.3 $n=3$ 에 대한 응력장과 변위장

식 (9b)가 직교이방성체의 함수구배재료인 경우 ($\phi=0, \frac{\pi}{2}, C_{45}^c=0$) 식 (21)과 같다.

$$\beta_s^2 \frac{\partial^2 W_3}{\partial n_1^2} + \frac{\partial^2 W_3}{\partial n_2^2} = -\beta \left[n_1 \left(\frac{C_{55}^c}{C_{44}^c} \frac{\partial^2 W_1}{\partial n_1^2} + \frac{\partial^2 W_1}{\partial n_2^2} \right) + \frac{C_{55}^c}{C_{44}^c} \frac{\partial W_1}{\partial n_1} \right] \quad (21)$$

여기서

$$z_s = x + i\beta_s y, \quad \beta_s = \alpha_s \sqrt{C_q}, \quad C_q = \frac{C_{55}^c}{C_{44}^c} = \frac{C_{55}^c}{C_{44}^c} \text{이다.}$$

$W_1 = 2\text{Re}[\Omega_1(z_s)]$ 을 식 (21)의 우편항에 대입하여 편미분 방정식을 풀면 W_3 는 식 (22)와 같이 얻

는다.

$$W_3 = 2Re\{\Omega_3(z_s)\} + \frac{\beta}{\beta_s^2} [(C_q - \beta_s^2) n_1 r_s^2 a \beta \Omega_1''(z_s) - C_q \frac{1}{2} r_s^2 \Omega_1'(z_s)] \quad (22)$$

여기서 a_j 는 $\sin(5/2\theta_s)$, $\sin(1/2\theta_s)$ 의 계수로 $\sin(5/2\theta_s)$ 일때 1/4, $\sin(1/2\theta_s)$ 일때 -1/2이다.

식 (22)의 우측 첫 번째항은 균질재료에 해당되며, 이어서 비 균질 파라메타 β 의 영향으로 비 균질재료에 해당되는 항이 부가되어 있음을 알 수 있다. 그리하여 $n=3$ 에 대한 직교이방성 함수구배재료의 변위장은 식 (23)과 같이 얻을 수 있다.

$$W_3 = 2 \frac{K_3^+}{S_c \sqrt{2\pi}} r_s^{\frac{3}{2}} \sin \frac{3}{2} \theta_s + \frac{K_{III}}{S_c \sqrt{2\pi}} \frac{\beta}{16\beta_s^2} r_s^{\frac{3}{2}} \left\{ 2(3C_q + \beta_s^2) \sin \frac{\theta_s}{2} + (C_q - \beta_s^2) \sin \frac{5\theta_s}{2} \right\} \quad (23)$$

그리고 식 (23)을 식 (1)에 대입하므로 $n=3$ 에 대한 직교이방성 함수구배재료의 응력장 τ_{yz}, τ_{xz} 를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\tau_{xz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi}} \frac{(1+\beta x)}{\beta_s} r_s^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{K_3^+}{K_{III}} 3C_q \sin \frac{\theta_s}{2} + \frac{\beta}{\alpha_s \beta_s} \sqrt{C_q} \left[\frac{C_q - \beta_s^2}{32} (4 \sin \frac{3}{2} \theta_s - \sin \frac{7}{2} \theta_s) + \frac{3C_q + \beta_s^2}{16} (\sin \frac{3}{2} \theta_s - 2 \sin \frac{\theta_s}{2}) \right] \right\} \quad (24)$$

$$\tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi}} (1+\beta x) r_s^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{K_3^+}{K_{III}} 3 \cos \frac{\theta_s}{2} + \frac{\beta}{\beta_s^2} \left[\frac{C_q - \beta_s^2}{32} (4 \cos \frac{3}{2} \theta_s + \cos \frac{7}{2} \theta_s) + \frac{3C_q + \beta_s^2}{16} (2 \cos \frac{1}{2} \theta_s - \cos \frac{3}{2} \theta_s) \right] \right\} \quad (25)$$

따라서 직교이방성 함수구배재료에 대한 응력장 및 변위장은 다음과 같다.

$$W = W_1 + W_2 + W_3, \quad \tau_{ij} = \tau_{ij1} + \tau_{ij2} + \tau_{ij3} \quad (26)$$

본 연구의 응력장은 균열면 ($\theta = \pm\pi$)에서 표면력 (τ_{yz})이 0이며, FGM상수 ζ 가 0인 경우에는 비 균질 파라메타 $\beta(a, \zeta)$ 가 0이 되어 직교이방성체의 응력장과 변위장으로 변환된다.⁽¹⁰⁾ 또한 비 균질 파라메타의 영향으로 $n > 3$ 의 고차항에서도 응력확대계수 K 의 항이 포함되어 있음을 알 수 있다. 그러나 균열선단에 매우 가까운 영역 ($r \rightarrow 0$)에서 응력성분과 변위장은 비 균질 파라메타의 영향을 거의 받지 않는 순수 직교이방성체의 응력성분 및 변위성분에 근접한다. 일반적으로 실험적해석에서는 균열선단에서 어느정도 떨어진 영역에서 해석하므로 비 균질 파라메타 $\beta(a, \zeta)$ 를 포함하고 있는 응력장 및 변위장을 사용해야 한다.

3. 지수형적 탄성변화의 응력장과 변위장

Fig. 1과 같은 이방성체에서 전단탄성계수 및 밀도가 각각 $C_{ij} = C_{ij}^0 e^{\lambda x}$, $\rho = \rho^0 e^{\lambda x}$ 의 함수를 가질 경우에 대하여 고려한다. 이와 같은 경우 응력과 변위와의 관계는 식 (27)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\tau_{xz} = e^{\lambda x} (C_{45}^0 \frac{\partial W}{\partial Y} + C_{55}^0 \frac{\partial W}{\partial X}) \quad (27)$$

$$\tau_{yz} = e^{\lambda x} (C_{45}^0 \frac{\partial W}{\partial X} + C_{44}^0 \frac{\partial W}{\partial Y})$$

이와 같은 경우 전파균열의 평형방정식은 (28)과 같이 나타낼 수 있다.

$$C_{55}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + C_{44}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + 2C_{45}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} + \zeta [C_{45}^0 \frac{\partial W}{\partial Y} + C_{55}^0 \frac{\partial W}{\partial X}] = \rho^0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (28)$$

식 (28)은 선형적 물성변화에 대한 평형방정식 (4)와는 달리 모두 상수인 계수들을 가지고 있다. 균열이 기준좌표계 (X, Y)의 X방향을 따라 전파할 때 균열선단의 이동좌표계 (x, y)와의 관계는 $x = X - ct$, $y = Y$ 이다. 따라서 식 (28)은 식 (29)

와 같이 나타낼 수 있다.

$$\alpha_s^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{C_{44}^c}{C_{55}^c} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2 \frac{C_{45}^c}{C_{55}^c} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + \zeta \left[\frac{C_{45}^c}{C_{55}^c} \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial x} \right] = 0 \quad (29)$$

여기서

$$\alpha_s = \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_s^c}\right)^2}, \quad c_s^c = \sqrt{\frac{C_{55}^c}{\rho^c}}$$

식 (29)는 전 절에서 사용한 동일한 계산 과정을 거치면 식 (30)과 같이 얻어진다.

$$\alpha_s^2 \frac{\partial^2 W_n}{\partial n_1^2} + \frac{C_{44}^c}{C_{55}^c} \frac{\partial^2 W_n}{\partial n_2^2} + 2 \frac{C_{45}^c}{C_{55}^c} \frac{\partial^2 W_n}{\partial n_1 \partial n_2} = 0 \quad : n = 1, 2 \quad (30a)$$

$$\alpha_s^2 \frac{\partial^2 W_n}{\partial n_1^2} + \frac{C_{44}^c}{C_{55}^c} \frac{\partial^2 W_n}{\partial n_2^2} + 2 \frac{C_{45}^c}{C_{55}^c} \frac{\partial^2 W_n}{\partial n_1 \partial n_2} = -\zeta \left[\frac{C_{45}^c}{C_{55}^c} \frac{\partial W_{n-2}}{\partial n_2} + \frac{\partial W_{n-2}}{\partial n_1} \right] \quad : n \geq 3 \quad (30b)$$

$n = 1, 2$ 에 대한 응력장 $\tau_{im} = \exp(\zeta x) \sum_{n=1}^2 \tau_{im}^n$ 이며, 변위장은 식 (20)과 같으나 $S_c = \exp(\zeta a) S_o$ 로 바뀐다. 다음에 $n = 3$ 에 대한 편미분 방정식 (30b)이 직교 이방성체의 함수구배 재료인 경우는 다음과 같다.

$$\beta_s^2 \frac{\partial^2 W_3}{\partial n_1^2} + \frac{\partial^2 W_3}{\partial n_2^2} = -\zeta \frac{C_{55}^c}{C_{44}^c} \frac{\partial W_1}{\partial n_1} \quad (31)$$

편미분 식 (31)을 풀면 W_3 는 식 (32)와 같이 얻어진다.

$$W_3 = 2Re \left\{ \Omega_3(z_s) - \frac{\zeta}{\beta_s^2} \left[C_{44}^c \frac{1}{2} r_s^2 \Omega_1'(z_s) \right] \right\} \quad (32)$$

식 (32)의 우측 첫 번째항은 균질재료에 해당되며, 이어서 비 균질 파라메타 ζ 의 영향으로 비 균질재료에 해당되는 항이 부가되어 있음을 알 수 있다. 그리하여 $n = 3$ 에 대한 직교이방성 함수구배재료의 변위장은 식 (33)과 같이 얻는다.

$$W_3 = \frac{2K_3^+}{S_c \sqrt{2\pi}} r_s^{3/2} \sin \frac{3}{2} \Theta_s + \zeta \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\alpha_s^2 S_c} r_s^{3/2} \sin \frac{\Theta_s}{2} \quad (33)$$

그리하여 변위식 (33)로 부터 직교이방성 함수구배재료의 응력장은 식 (34), (35)와 같이 얻는다.

$$\tau_{xz3} = 3 \frac{K_3^+}{\sqrt{2\pi}} e^{\zeta x} \frac{C_a}{\beta_s} r_s^{1/2} \sin \left(\frac{\Theta_s}{2} \right) + \frac{\zeta K_{III}}{\sqrt{2\pi}} e^{\zeta x} \sqrt{\frac{C_{55}^c}{C_{44}^c}} \frac{r_s^{1/2}}{\alpha_s^3} \left\{ \frac{1}{4} \sin \frac{3\Theta_s}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{\Theta_s}{2} \right\} \quad (34)$$

$$\tau_{yz3} = 3 \frac{K_3^+}{\sqrt{2\pi}} e^{\zeta x} r_s^{1/2} \cos \left(\frac{\Theta_s}{2} \right) + \zeta \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi}} e^{\zeta x} \frac{r_s^{1/2}}{\alpha_s^2} \left\{ \frac{1}{2} \cos \frac{\Theta_s}{2} - \frac{1}{4} \cos \frac{3\Theta_s}{2} \right\} \quad (35)$$

그리하여 지수형적 함수구배를 갖는 직교이방성 함수구배재료에 대한 응력장과 변위장은 식 (36)과 같다.

$$W = W_1 + W_2 + W_3, \quad \tau_{ij} = \tau_{ij1} + \tau_{ij2} + \tau_{ij3} \quad (36)$$

4. 균열 선단부근의 응력 특성

본 연구에서는 전과균열선단부근의 비 균질 응력장의 특성을 이해하고자 응력장의 식들에서 응력 확대계수와 관계되는 항만을 사용하였다. 물성치의 변화가 지수형적으로 변화하는 경우(Fig. 2-9)와 선형적으로 변화하는 경우(Fig. 10, 11)에 대하여 나타내었다. 그리고 균열의 좌측($X=0$)에 적용된 전단탄성계수 $G_{TV}^o = 1$ GPa, $G_{LV}^o/G_{TV}^o (= G_{LV}^c/G_{TV}^c) = 2$ 이다. 지수형적 물성 변화 즉 $G_{ij}(X) = G_{ij}^c e^{\zeta X}$ 에서 FGM 상수 $\zeta = 3$ /m로 하였다. 균열의 길이 $a = 0.1$ m이므로 균열선단에서 $G_{TV}^c = 1.35$ GPa이다. 균열선단의 물성치 $G_{TV}^c = 1.35$ GPa를 고려할 때 선형적 물성 변화의 FGM 상수 $\zeta = 3.5$ /m이다.

한편 식 (5)에서 전단 탄성파의 속도 c_s^c 는 보강방향의 변화 ϕ 에 따라 달라지므로 단순히 무차원 균열속도 (c/c_s^c)를 기준으로 하는 경우 ϕ 에 따라 균열 전파속도가 달라진다. 따라서 ϕ 에 관계없이 일정한 균열 전파속도를 얻고자, 균열 전파속도에 대한 전단탄성파의 속도비 M 은 식 (37)과 같이 둔다.

$$M = c/c_{sTV}^c, \quad c_{sTV}^c = \sqrt{G_{TV}^c/\rho^c} \quad (37)$$

무차원 균열전파속도가 (37)식과 같을 때 식 (5)에서 α_s 는 (38)식과 같다.

$$\alpha_s = \begin{cases} \sqrt{1-M^2}: \phi = 90^\circ \\ \sqrt{1-(M^2/K)}: \phi = 0^\circ \end{cases}, \quad K = \frac{G_{LV}^c}{G_{TV}^c} \quad (38)$$

Fig. 2는 $G_{LV}^c/G_{TV}^c=2$ 일 때 균질 직교이방성($\zeta=0$)체에서 전파하는 균열선단부근의 τ_{xz}/τ_{III}^+ 를 나타내고 있다. 균열 전파속도가 증가하면 무차원 응력값은 증가하며, 동일한 속도로 균열이 전파하는 경우 $\phi=0^\circ$ 인 경우의 무차원 응력이 $\phi=90^\circ$ 인 경우의 무차원 응력보다 크다.

Fig. 3은 $G_{LV}^c/G_{TV}^c=2$ 일 때 균질 직교이방성($\zeta=0$)체에서 전파하는 균열선단부근의 τ_{yz}/τ_{III}^+ 를 나타내고 있다. τ_{xz} 와는 달리 $\phi=90^\circ$ 인 경우의 무차원 응력이 $\phi=0^\circ$ 인 경우의 무차원 응력보다 크다. Fig. 2과 Fig. 3를 통하여 볼 때 응력성분의 방향과 파이버(보강방향) 방향이 일치할 때의 응력이 수직할 때의 응력보다 보다 크다고 하겠다.

Fig. 4는 균열전파속도 M 이 0이고 $\zeta=3$ 일 때 FGM의 무차원응력 τ_{xz}/τ_{III}^+ 을 나타내고 있다. $r=0.01$ m에서 응력은 Fig. 2와 비교할 때 균질의 직교이방성체의 응력과 거의 일치한다. 그림에서 알 수 있듯이 균열과 파이버가 이루는 각도 $\phi=0^\circ$ 인 경우는 $\theta=\pm 50^\circ$ 부근에서 $\phi=90^\circ$ 인 경우는 $\theta=\pm 180^\circ$ 에서 비 균질파라메타 ζ 에 가장 많은 영향을 받으며, $\theta=\pm 50^\circ$ 인 경우는 r 가 증가할수록 무차원 응력이 증가하며, $\theta=\pm 180^\circ$ 인 경우는

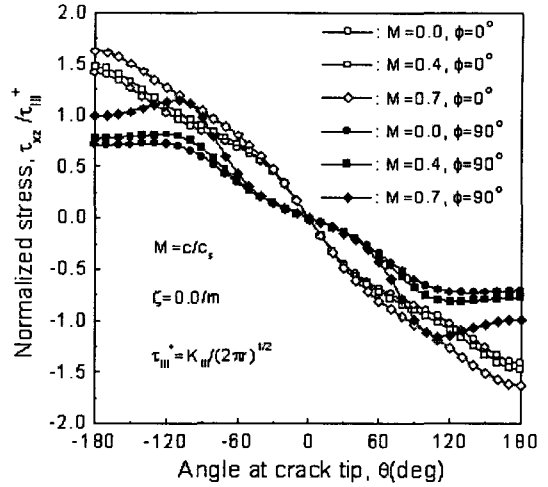


Fig. 2 Normalized stress τ_{xz}/τ_{III}^+ with θ for $\zeta=0$

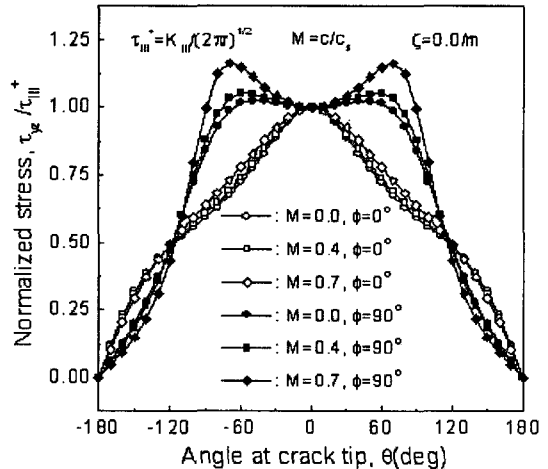


Fig. 3 Normalized stress τ_{yz}/τ_{III}^+ with θ for $\zeta=0$

감소한다. 본 연구에 사용된 지수형적 함수는 $\zeta>0$ 이므로 x 방향을 따라 물성치가 증가하고 y 방향을 따라 물성치의 변화가 없으므로 $\theta=0^\circ$ 부근에서 ζ 의 영향을 가장 많이 받아야 하고 $\theta=90^\circ$ 부근에서 가장 작게 받아야 한다. 그러나 $\theta=0^\circ$ 에서 τ_{xz} 가 0이므로 $\phi=0^\circ$ 인 경우는 오히려 $\theta=\pm 50^\circ$ 부근에서 ζ 의 영향을 가장 많이 받는다고 하겠

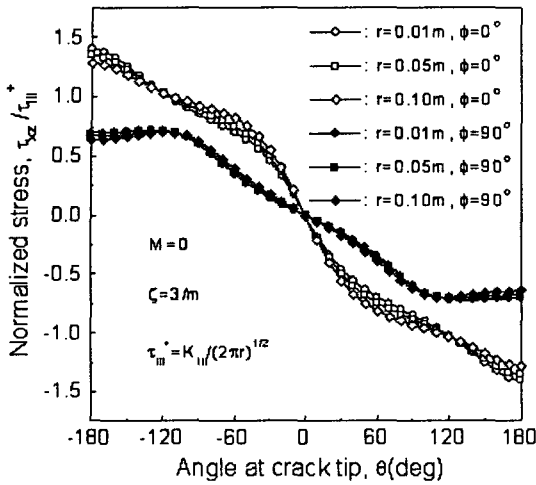


Fig. 4 τ_{xz}/τ_{III}^+ with θ for $\zeta=3$ and $M=0$

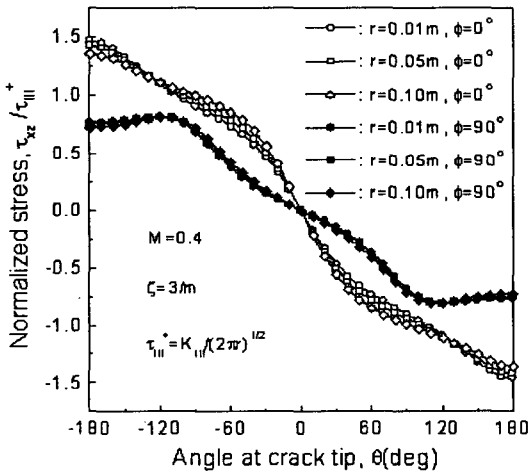


Fig. 5 τ_{xz}/τ_{III}^+ with θ for $\zeta=3$ and $M=0.4$

다. 그러나 $\phi=90^\circ$ 인 경우는 $\theta=\pm 180^\circ$ 부근에서 ζ 의 영향을 가장 많이 받는다. 그리고 $\phi=0^\circ$ 인 경우가 $\phi=90^\circ$ 인 경우보다 비 균질 파라메타 ζ 에 더 많은 영향을 받는다.

Fig. 5, 6은 각각 균열전파속도 M 이 0.4와 0.7인 경우에 대한 FGM의 무차원응력 τ_{xz}/τ_{III}^+ 을 나타내고 있다. 이들의 균열선단부근의 응력은 $M=0$ 인 경우에 대한 Fig. 4의 경우와 비슷한 형태를 나타내고 있다. 따라서 균열전파속도가 증가

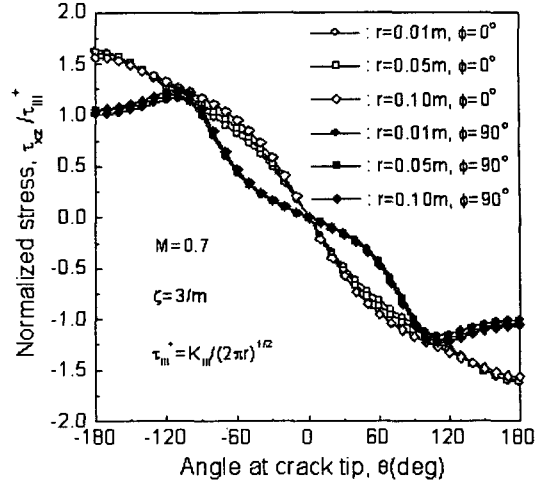


Fig. 6 τ_{xz}/τ_{III}^+ with θ for $\zeta=3$ and $M=0.7$

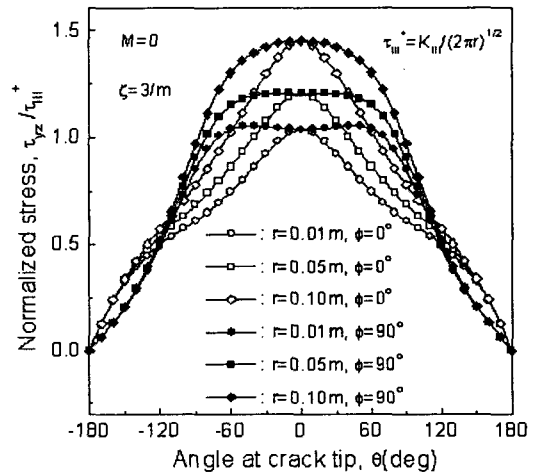


Fig. 7 τ_{yz}/τ_{III}^+ with θ for $\zeta=3$ and $M=0$

하여도 $r=0.01$ m에서 0.1 m로 증가하는 경우 응력의 증감의 변화가 차이가 없다고 하겠다. 이것은 다시 말하면 균열전파속도가 증가하더라도 ζ 가 응력에 미치는 영향이 거의 일정하다고 하겠다. 그러나 전파균열에도 역시 $\phi=0^\circ$ 인 경우가 $\phi=90^\circ$ 인 경우보다 비 균질 파라메타 ζ 에 더 많은 영향을 받고 있음을 알 수 있다.

Fig. 7은 균열전파속도 M 이 0인 경우 FGM의 무차원응력 τ_{yz}/τ_{III}^+ 을 나타내고 있다. 균열선단 가까이 즉 $r=0.01$ m에서 응력은 Fig. 3과 비교할 때 균질의 직교이방성체 응력 τ_{yz} 와 거의 일치

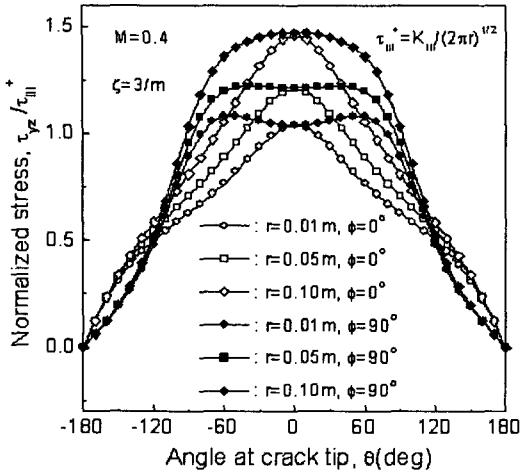


Fig. 8 τ_{yz}/τ_{III}^+ with Θ for $\zeta=3$ and $M=0.4$

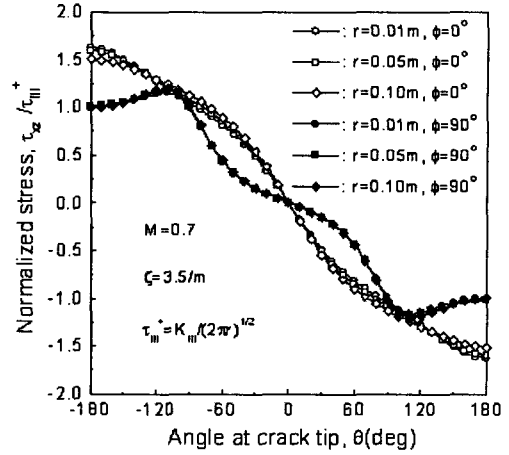


Fig. 10 τ_{xz}/τ_{III}^+ with Θ for $\zeta=3.5$ and $M=0.7$ in linear elastic variation

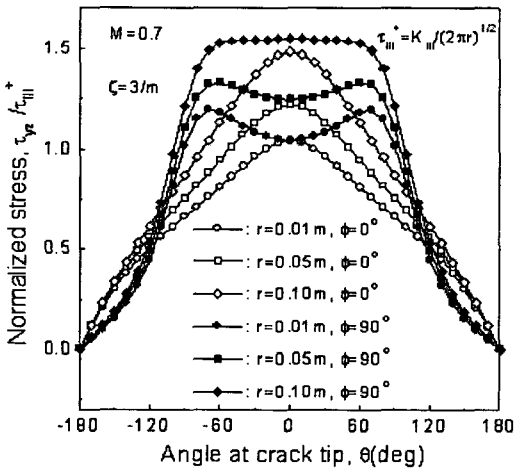


Fig. 9 τ_{yz}/τ_{III}^+ with Θ for $\zeta=3$ and $M=0.7$

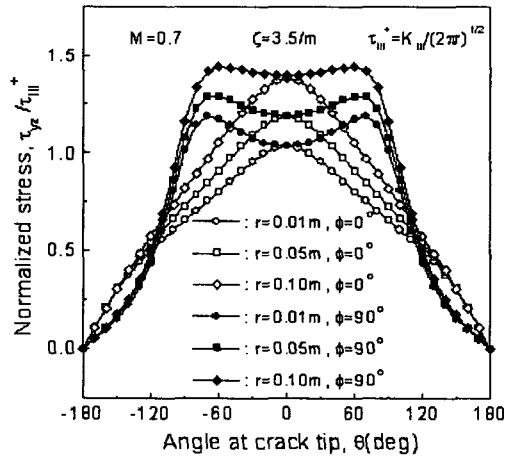


Fig. 11 τ_{yz}/τ_{III}^+ with Θ for $\zeta=3.5$ and $M=0.7$ in linear elastic variation

한다. 그림에서 알 수 있듯이 균열과 파이버가 이루는 각도 ϕ 에 관계없이 $\theta=0^\circ$ 부근에서 비 균질파라메타 ζ 에 가장 많은 영향을 받으며 r 가 증가할수록 무차원 응력이 증가하며, $\theta=\pm 180^\circ$ 인 경우에는 $\tau_{yz}=0$ 이므로 ζ 의 영향이 거의 없다.

Fig. 8, 9는 각각 균열전파속도 M 이 0.4와 0.7인 경우에 대한 FGM의 무차원응력 τ_{yz}/τ_{III}^+ 을 나타내고 있다. 이들의 균열선단부근의 응력은 $M=0$ 인 경우에 대한 Fig. 7의 경우와 비슷한 형태

를 나타나고 있으나 균열전파속도가 증가할수록 $r=0.01$ m에서 0.1 m로 증가하는 경우 응력의 증감의 변화가 약간 증가하는 현상을 나타내고 있다. 이것은 다시 말하면 균열전파속도가 증가할수록 ζ 가 응력에 미치는 영향이 약간 증가한다고 하겠다. 그리고 ζ 가 응력에 가장 많이 미치는 각 $\theta=0^\circ$ 를 기준으로 하여 볼 때 정적균열상태에서는 $\phi=90^\circ$ 인 경우와 $\phi=0^\circ$ 인 경우 모두 ζ 가 응력 τ_{yz} 에 비슷하게 영향을 미치고 있으나 균열

이 전파함에 따라 ζ 는 $\phi=0^\circ$ 인 경우보다 $\phi=90^\circ$ 인 경우 더 많은 영향을 미치고 있음을 알 수 있다.

Fig. 10은 탄성계수가 선형적으로 증가하는 함수구배재료에 대한 균열선단부근의 무차원 응력 성분 τ_{xz}/τ_{III}^+ 을 나타내고 있다. FGM상수 ζ 는 지수형적인 물성변화에서 3/m와 달리 3.5/m이다. 동일한 균열속도 조건하의 지수형적 물성변화 경우의 Fig. 6과 비교하여 볼 때 대체로 큰 $r(=0.1\text{ m})$ 를 제외한 $r=0.01, 0.05\text{ m}$ 에서 균열선단부근의 응력 변화는 지수형적 물성변화의 경우와 비슷함을 나타내고 있다. 따라서 응력확대계수의 지배 영역이 균열선단 가까운 영역임을 감안한다면 비 균질 파라메타 ζ 가 균열선단 응력 τ_{xz}/τ_{III}^+ 의 변화에 미치는 영향은 선형적인 물성변화의 경우나 지수형적 물성변화의 경우에 서로 비슷하게 영향을 미친다고 하겠다.

Fig. 11은 탄성계수가 선형적으로 증가하는 함수구배재료에 대한 균열선단부근의 무차원 응력 성분 τ_{yz}/τ_{III}^+ 을 나타내고 있다. 지수형적인 경우의 동일한 조건인 Fig. 9과 비교하여 볼 때 τ_{xz}/τ_{III}^+ 와 마찬가지로 대체로 r 의 증가에 따른 응력의 변화는 큰 r 범위를 제외하고는 지수형적 물성변화의 경우와 비슷하다. 따라서 비균질 파라메타 ζ 가 균열선단응력 τ_{yz}/τ_{III}^+ 에 미치는 영향도 선형적인 물성변화의 경우나 지수형적 물성변화의 경우에 서로 비슷하다고 하겠다.

4. 결 론

본 연구에서는 재료의 물성치가 균열방향으로 선형적 또는 지수형적으로 변화하는 직교 이방성 함수구배 재료에서 균열이 전파할 때 전파 균열 선단부근에 대한 모드 III 응력장 및 변위장을 유도하였다. 균열선단부근에서 응력장과 변위장을 수치해석 또는 실험적해석으로 응력확대계수를 해석할 때 사용된다. 대개 실험적 방법으로 균질 재료의 응력확대계수를 해석할 때 사용되는 실험 데이터는 균열선단에서 가까운 탄성영역에서 얻는다. 이때 사용되는 응력장은 고차항 중에서 첫 번째 2개의 항 ($r^{-1/2}, r^0$)만을 사용하여 응력확

대계수를 정확히 얻을 수 있다. 그러나 FGM의 응력장에서 비균질 파라메타는 고차항의 응력장도 영향을 미치고 있다. 따라서 FGM에서 비 균질영향을 고려한 응력확대계수를 얻기 위하여 FGM의 응력장은 적어도 3개의 항이 고려되어야 함을 알 수 있다.

본 연구에서 얻어진 응력장은 재료의 물성치가 등방성적일 경우에는 기존 등방성 FGM의 응력장 및 변위장과 일치한다. 지수형적 물성변화의 경우, 응력 τ_{xz} 는 $\phi=0^\circ$ 인 경우, $\Theta=\pm 50^\circ$ 부근에서, $\phi=90^\circ$ 인 경우, $\Theta=\pm 180^\circ$ 부근에서 비 균질 파라메타 ζ 에 가장 큰 영향을 받으며, 대체로 $\phi=0^\circ$ 인 경우가 $\phi=90^\circ$ 인 경우보다 그 영향이 더 크다. 응력 τ_{yz} 는 $\phi=0^\circ$ 또는 $\phi=90^\circ$ 에 관계없이 $\Theta=0^\circ$ 부근에서 ζ 의 영향을 가장 크게 받으며, 정적균열에서는 $\phi=0^\circ$ 인 경우나 $\phi=90^\circ$ 인 경우, ζ 의 영향이 비슷하나, 균열이 전파함에 따라 $\phi=0^\circ$ 인 경우보다 $\phi=90^\circ$ 인 경우에 더 많은 ζ 의 영향을 받는다. 선형적인 물성 변화의 경우, 비균질 파라메타 ζ 가 균열선단부근의 응력에 미치는 영향은 지수형적 물성변화의 경우와 비슷하다.

참고문헌

- (1) Delale, F., Erdogan, F., 1983, "The Crack Problem for A Nonhomogeneous Plane," *ASME J. of Appl. Mech.*, Vol. 50, pp. 609-614.
- (2) Eischen, J. W., 1987, "Fracture of Nonhomogeneous Materials," *Int. J. of Fract.*, Vol. 34, pp. 3-22.
- (3) Erdogan, F., 1995, "Fracture Mechanics of Functionally Graded Materials," *Composite Engineering*, Vol. 5, No. 7, pp. 753-770.
- (4) Jin, Z.H. and Batra, R.C., 1996, "Some Basic Fracture Mechanics Concept in Functionally Graded Materials," *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 44, No. 8, pp. 1221-1235.
- (5) Gu, P. and Asaro, R. J., 1997, "Cracks in Functionally Graded Materials," *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 34, No. 1, pp. 1-17.
- (6) Parameswaran V. and Shukla A., 1999, "Crack-Tip Stress Fields for Dynamic Fracture in

Functionally Gradient Materials," *Mechanics of Materials*, Vol. 31, pp. 579~596.

(7) Parameswaran V. and Shukla A., 2002, " Near-Tip Out of Plane Displacement Fields for Dynamic Crack Propagation in Functionally Graded materials," *Mechanics Research Communications*, Vol. 29, pp. 397~405.

(8) Lee K. H., 2004, "Characteristics of a Crack Propagating along the Gradient in Functionally Gradient Materials," *Int. J. Solids Struct.*, Vol.

41, pp. 2879~2898.

(9) Freund, L. B., 1990, "Dynamic Fracture Mechanics," Cambridge University Press, Cambridge.

(10) Lee, K. H., Hawong, J. S, Choi, S. H., 1993," A Study on the Dynamic Stress Intensity Factor of Orthotropic Materials (II) : A Study on the stress field, Displacement Field and Energy Release Rate in the Dynamic Mode III under Constant Propagation Velocity," *Trans. of the KSME*, Vol. 17, No. 2, pp. 331~341.