韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育>
2006. 2. 제 45권, 제 1호, 123-138

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
February. 2006, Vol. 45, No. 1, 123-138.

조합문제 사이의 구조적 동형

이 주 영 (서울대학교 대학원)
김 서 령 (서울대학교)
박 혜 숙 (서원대학교)
김 완 순 (호서대학교)

1. 서 론

1.1 들어가며

제7차 교육과정에서는 조합과 관련된 내용을 '수학Ⅰ'의 '순열과 조합' 단원에서 다루고 있다. 순열은 주어진 집합에서 몇 개를 골라 늘어놓는 것이고 조합은 주어진 집합에서 몇 개를 고르는 것인데, 학생들은 이 두 개념을 혼동하여 조합과 관련된 문제도 순열의 경우로 귀착하여 생각하는 경향이 있다. 이것은 순열과 조합의 문제들은 매우 다양한 형태로 주어지므로 개념을 확실히 이해하지 못하면 문제의 본질을 파악하지 못하고 엉뚱한 해결책을 제시하기 때문이다.

어떤 개념을 이해하는 것은 쉬운 것이 아니지만, 그 개념을 명확하게 이해하게 되면 같은 상황이나 유사한 상황에 처했을 때 그 상황을 해결할 수 있는 능력을 갖게 된다. 여기서 수학적 개념을 이해했다는 것은 아이디어, 사실 또는 절차들 사이의 연결성을 만드는 것이다(Hiebert & Carpenter, 1992). 한편 NCTM(1989)에서는 수학 교육의 중요한 목표 중의 하나로 학생들이 수학적 개념을 이해할 때 수학적 아이디어 사이에서 연결과 관계를 볼 수 있도록 하고 새로운 문제의 해결에 이러한 이해를 적용할 수 있도록 해야 한다고 하였다. Sriraman과 English(2004)도 문제를 해결할 때에 문맥상으로는 다르지만 본질적으로 수학적 구조가 유사한 문제의 선택하여 연결과 관계를 보는 것이 교육학적으로 중요하다고 지적하였다. 따라서 이미 알고 있는 문제 상황과 문맥은 다르지만 해결 방법이 같은 새로운 문제 상황을 주고 두 문제 사이의 관계를 학습자가 스스로 연결해 보도록 하여 기존에 알고 있는 문제와 구조적 대응을 찾는 사고를 경험하게 하는 것이 중요하다.

1.2 선행연구 고찰

학생들을 대상으로 한 조합론 학습에 대한 연구 결과를 살펴보면, Hardar와 Hadass(1981)는 조합 문제의 해결에 어려움을 야기하는 여러 가지 장애물에 대한 연구를 하였고, Dubois(1984)는 조합론에서 다루는 문제 유형을 문제 진술의 특징을 중심으로 선택 유형, 배치 유형, 분할 유형으로 나누었다. 선택 유형이란 n개의 서로 다른 대상들 중에서 r개를 선택하는 문제 유형으로 '선택하다', '꺼내다', '뽑다'와 같은 서술어로 진술되어 있는 유형이다. 배치 유형은 r개의 대상을 n개의 공간 또는 상자에 배치하는 문제유형으로 '넣다', '배열하다', '나열하다'와 같은 서술어로 진술되는 유형이다. 그리고 분할 유형은 n개의 사물들을 r개의 부분집합으로 나누는 문제 유형으로 '나누다', '분할하다', '쪼개다'와 같은 서술어로 진술된 유형이다.

Batanero 외(1997)는 Dubois(1984)가 제안한 조합 문제의 유형이 조합 문제 해결에 영향을 끼치는 주요한 변인이 된다는 것을 밝혀냈고, 문제에서 요구하는 계산 방법(순열, 같은 것이 있는 순열, 중복 순열, 조합 등)과 문제에서 다루는 대상(사람, 사물, 숫자, 문자)도 문제 해결

* 2005년 12월 투고, 2006년 2월 심사완료
* ZDM분류: K24
* MSC2000분류: 97D70
* 주제어 : 조합론, 순열, 조합, 구조적 동형

에 영향을 끼치는 변인이 된다고 하였다.

Roa(2000)는 대학생을 대상으로 기초적인 조합 문제를 해결하는 데 사용하는 전략과 문제 해결의 어려움에 대하여 연구하였고 그 결과 해답의 크기가 커지거나, 진술이 복잡한 문제일 경우에 체계적이지 못한 계산을 하는 학생들의 비율이 높아진다는 결론을 내렸다. 또한 학생들은 문제의 진술을 쉬운 형태로 바꾸어 생각하지 못하는 경향이 있고, 문제의 진술을 바꾸더라도 배치 또는 분할 유형을 선택 유형으로 바꿀 뿐 선택 유형을 다른 진술 유형으로 바꾸는 학생은 없음을 확인하였다. 그리고 이지현(2004)은 고등학교 2학년 학생을 대상으로 Batanero 외(1997)가 제안한 문제 변인에 따라 문제의 난이도에 영향을 주는 변인이 무엇인지 연구하였다.

이처럼 기존의 선행 연구에서는 학생들이 조합론 학습에서 어떠한 어려움을 갖고 있으며 문제 해결 전략으로 자주 사용하는 것이 무엇이고, 어떠한 변인이 문제의 난이도를 결정하는 지에 대한 논의가 주를 이루고 있다. 그러한 연구들 중에서 문제를 진술하는 유형이 학생들이 문제 해결에 어려움을 갖게 하는 중요한 변수라는 연구 결과가 나왔고, 학생들은 선택 유형의 문제들은 쉽게 해결하지만 배치 유형이나 분할 유형의 해결에서는 어려움을 겪는다는 공통된 결과를 얻을 수 있었다.

학생들이 어려움을 겪는 부분이 무엇인지 진단을 내렸다면 그와 함께 이러한 문제점을 해결할 수 있는 적절한 교수학적 제안에 대한 연구도 선행되어야 한다. 하지만 아직까지 그에 대한 제안을 구체적으로 다룬 연구는 없었으므로 이러한 문제점을 해결할 수 있는 방안에 대한 연구가 필요하다.

본 연구에서는 조합 문제 해결에 도움이 되는 한 방안으로 진술이 다른 조합 문제의 요소 사이의 대응을 찾아보는 활동을 제안하고자 한다. 즉, 문제의 진술 유형은 다르지만 문제 구조는 동형인 문제 상황이 주어질 때, 학생들이 문제의 요소들 사이의 대응을 어떻게 찾아내는지 본 후 선택 유형과 배치 유형의 조합 문제 사이의 구조적 동형을 이해하는 것이 조합 문제 해결에 도움이 될 수 있음을 보이고자 한다.

2. 이론적 배경

2.1 학교 수학에서의 조합론

교과서에서 조합론의 개념들이 어떻게 진술되고 있는지 살펴보는 것은 학생들의 문제 해결 과정을 이해할 수 있는 중요한 정보가 된다. 제7차 교육과정 '수학 I'의 교과서 4권을 임의로 선정하여 '순열과 조합' 단원에서 순열과 조합 개념을 어떻게 정의하고 있는지 분석하였다. 대부분의 교과서에서 서로 다른 n개에서 중복됨이 없이 r개를 택하여 일렬로 배열하는 것을 순열이라고 정의하고, 서로 다른 n개의 원소로 이루어진 집합에서 순서를 생각하지 않고 r개의 원소를 택하여 부분집합을 만드는 것을 조합이라 정의하였다(우정호 외, 2002). 그리고 예제 문제와 연습 문제에서 다루는 문제의 진술 유형을 살펴본 결과, 대부분의 교과서에서 순열 단원은 '배치하고', '위치시키고', '나열하는' 배치 유형의 진술로 된 문제들이 가장 많았고, 반면에 조합 단원에서 다루는 문제의 진술 유형을 보면 선택 유형의 진술로 된 문제들만 다루고 있으며 배치 유형의 문제는 거의 다루고 있지 않았다.

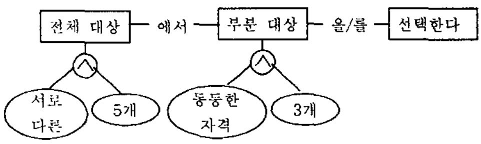
따라서 학생들은 문제 진술이 '선택'이면 조합, 그리고 '배치' 또는 '배열' 이면 순열이라고 생각하는 경향이 있고, 조합 문제가 배치 유형으로 변형되어 진술되면 순열 문제로 혼동하여 풀곤 한다. 이것은 Batanero 외(1997)가 지적한 바와 같이 중등 과정의 교과서에서는 선택 유형의 진술을 비롯한 잠재적 조합 모델을 명시적으로 고려하고 있지 않기 때문에 많은 학생들이 문제의 유형을 잘못 확인하여 문제 해결에 자주 실패하게 되는 것이다.

이때, 이미 알고 있는 문제와 구조는 같지만 진술 유형이 다른 새로운 문제의 구성 요소를 분석하여 같은 역할을 하는 요소 사이의 대응을 찾을 수 있으면 혼동을 일으키지 않고 주어진 문제를 해결할 수 있을 것이다.

2.2 조합 문제의 구조와 구조적 동형

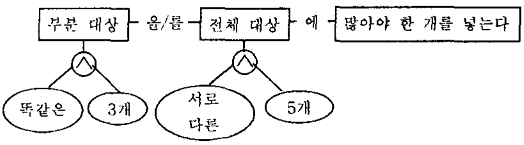
Reed(1987)는 문장제 문제를 위한 구조-대응 모델(structure-mapping model)을 제안하면서 문제의 구조를 핵심 개념과 개념 사이의 연산으로 정의된 망으로 설명하고 있다. 하지만 Reed의 구조망은 방정식을 해결하기 위한 구조망으로, 개념들이 연산으로 연결되어 있기 때문에 조합론에서 다루는 문제들의 구조를 진술할 수는 없다. 따라서 Reed가 제안한 문장제 문제의 구조망을 응용하여 조합 단원에서 다루는 선택 유형과 배치 유형 문제에 맞도록 고쳐서 그 구조를 분석하면 다음과 같다.

선택 유형은 서로 구별이 가능한 전체 대상에서 부분 대상을 선택하는 진술로서 선택 유형의 구조는 '전체 대상', '부분 대상' 그리고 '선택한다'라는 세 요소로 이루어져 있다. 예를 들어 '서로 다른 5개의 상자 중에서 (똑같은 세 개의 공을 각각 넣을 상자) 3개를 선택하는 방법의 수를 구하여라.'와 같은 조합 문제의 구조는 <그림 1>과 같다.



<그림 1> 선택 유형의 문제 구조

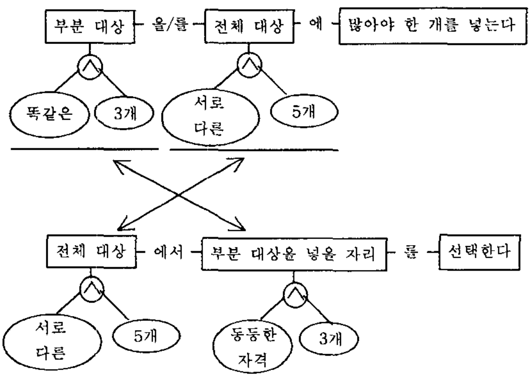
그리고 배치 유형은 부분 대상을 서로 구별이 되는 전체 대상에 넣는 진술로서 배치 유형의 구조는 '부분 대상', '전체 대상' 그리고 '넣는다'라는 세 요소로 이루어져 있다. 예를 들어 '똑같은 공 3개를 서로 다른 5개의 상자에 넣을 수 있는 방법은 모두 몇 가지인지 구하여라. 단, 한 상자에는 많아야 한 개의 공을 넣을 수 있다.'와 같은 조합 문제의 구조는 <그림 2>와 같다.



<그림 2> 배치 유형의 문제 구조

문장제 문제 사이의 구조적 대응이라는 것은 문제를 구성하는 요소들 사이의 대응을 뜻하며, 특히 두 문제가 구조적으로 동형이라는 것은 문제에서 같은 역할을 하는 요소 사이의 일대일 대응이 존재하는 경우를 의미한다(Reed, 1987).

조합 문제가 배치 유형으로 진술된 경우에는 그 진술을 선택 유형으로 바꿀 수 있다. 왜냐하면 전체 대상 중에서 똑같은 부분 대상을 넣을 공간을 선택하고 그 공간에 부분 대상을 넣는데, 부분 대상이 구별 불가능하기 때문에 넣는 순서는 고려하지 않으므로 단순히 전체 대상 중에서 부분 대상을 넣을 공간만을 선택하기만 하면 되기 때문이다. 예를 들어 <그림 2>의 문제 구조를 선택 유형의 구조로 바꾸기 위해 요소 사이의 일대일 대응을 찾으면 그 결과는 <그림 3>과 같다.



<그림 3> 배치 유형과 선택 유형의 요소 사이의 일대일 대응

즉, 배치 유형과 선택 유형의 요소 사이의 일대일 대응이 존재하므로 두 유형은 구조적 동형이라고 할 수 있다.

구조적으로 동형인 문제 사이의 관계는 문제의 진술 문맥과 해결 과정에 따라 2가지 관계로 범주를 나눌 수 있다. 문장을 진술하는 문맥이 같고 동시에 문제를 해결하는 방법도 같을 때 두 문제를 '일치'하는 관계에 있는 문제라 하고, 문맥이 다르지만 해결 방법이 같을 때 두 문제를 '동형'인 관계에 있는 문제라고 한다. 그리고 문제 사이의 대응을 학생들이 얼마나 쉽게 확인할 수 있는가에 대한 연구자의 주관적인 평가를 대응 사상의 '가시 정도(transparency)'라 한다. 가시 정도는 일치하는 문제에서 가장 높다. 반면에 서로 다른 문맥에서는 문제의 요소들을 일대일 대응시키는 것이 수월하지 않을 수도

있기 때문에 가시 정도가 중간이다(Reed, 1987).

그렇다면 구조적으로 동형임을 확인하는 활동이 문제 해결 전략으로서 어떤 의의가 있는지 살펴보기로 한다.

2.3 문제 해결 전략으로서 구조적 동형

문제 해결 전략을 하나의 방법적 지식으로 간주하고 방법적 지식의 학습의 중요성을 다룬 연구로는 Polya(1965), Ryle(1984), 황혜정(2002) 등 다수의 연구 결과가 있다. 한편, 문제 해결 심리학의 관점에서 Anderson(1995)은 다양한 인지 활동의 수행 방식에 관한 지식을 절차적 지식이라 하면서, 문제의 해결에 필요한 조작자를 획득하고 어떤 조작자를 사용할지 선정하는 방법을 학생들이 습득해야 한다고 하였다. 이때 조작자를 획득하는 과정으로 어떤 문제의 해결책을 다른 문제의 해결책으로 사상하는 과정인 유추 과정에 주목해야 한다고 하였다.

수학적 추론 과정 중에서 유추 과정은 두 대상의 구조적 유사성을 바탕으로 어떤 대상에서 성립하는 성질로부터 그와 유사한 대상의 성질을 추측하는 사고활동이다(우정호, 2000). 유추는 기본 문제의 원소들을 목표 문제의 원소들과 대응시키는 사고활동(Genter, 1983)이며, 이미 알고 있는 문제의 구조와 그 구조를 구성하는 요소들 사이의 관계가 대등하게 대응된 또 다른 문제가 있다면 후자의 특징을 전자의 특징으로 예측할 수 있다(English, 1999b).

학생들이 외형적으로 서로 다른 진술을 가진 문제 상황에서 구조적으로 동형인 관계를 찾는 활동은 수학에 대한 학생들의 이해를 풍부하게 해 줄 수 있는 중요한 사고과정이고, 또한 문제 해결의 도구 이상의 가치를 가지고 있기 때문에 학생들이 이러한 활동을 어떻게 수행하고 발달시켜 나가는지 관심을 가져야 한다(English & Halford, 1995).

Polya(1957)는 문제 해결 4단계 중 2번째 단계인 계획의 작성 단계에서 사고 전략으로서 문제를 달리 진술해 보거나, 미지인 것이나 결론이 같거나 또는 유사한 문제를 생각해 보고, 유용한 패턴을 찾아볼 것을 권고한다.

한편, Schoenfeld(1985)는 문제 해결 과정에서 해결 전략을 발견할 수 있도록 하는 가장 중요한 과정을 탐구 과정이라 하였고 이 과정을 3개의 전략으로 나누어 설명하고 있다. 첫째, 본질적으로 동치인 문제를 생각한다. 둘째, 약간 수정된 문제를 생각한다. 셋째, 전면적으로 수정된 문제를 생각한다. 여기서 첫 번째 전략인 본질적으로 동치인 문제를 고려하는 전략에 대한 세부적인 내용으로 동치인 것으로 조건을 바꾸기, 다른 방법으로 그 문제의 요소를 재조합 하기, 보조 요소를 도입하기를 제안하고 있다. 이와 같이 문제를 재구성하는 것은 학생들의 상상력을 자극하기 때문에 더 매력적이라는 이점이 있을 뿐만 아니라, 문제의 원래 모습으로 다룰 때는 쉽게 떠오르지 못한 조작들을 제안할 수 있다(신인선, 2003).

3. 연구방법

3.1 대상학생 선정

본 연구의 대상은 학교에서 순열과 조합을 배운 경험이 있는 서울 소재 고등학교 3곳의 자연계열 2학년 학생들 237명(남 165명, 여 72명)으로 하였다. 연구 대상으로 선정된 학교는 중산층 학생들이 다니고 있으며 학생들의 학업성적은 전국 모의고사 및 학업 성취도 평가에서 상위권 및 중·하위권에 골고루 분포되어 있음을 확인하였다.

위 학생들을 대상으로 본 연구에서 설계한 문항을 토대로 서술형 문항으로 구성된 지필 검사를 하였고 문제를 해결할 때 사용한 방법을 기준으로 문제의 요소 사이의 대응을 잘 찾은 학생들과 대응을 잘 찾지 못한 학생들을 선발하여 인터뷰를 실시하였다. 이 때 각 학생이 제출한 답안지를 보면서 인터뷰를 하였으며, 인터뷰 과정은 비디오 촬영을 하였고 분석을 위해 녹취록을 작성하였다. 다음의 <표 1>은 인터뷰에 참여한 학생의 인적사항을 기록하고 있으며, 학생들의 성별과 순열과 조합 단원으로 시험을 친 중간고사의 점수와 전교 등수, 그리고 백분 위로 나타나는 학생들의 학업 성취도를 나타내고 있다.

<표 1> 인터뷰 대상자

학생	성별	학교	점수	학년 평균	과목 석차	백분위
학생 1	남	B	82.95	61.1	42	72.72
학생 2	남	B	95.4	61.1	9	94.15
학생 3	여	B	85.75	61.1	37	75.97
학생 4	남	C	75.8	73.77	188	62.92
학생 5	남	C	72.5	73.77	214	57.79
학생 6	남	C	92.4	73.77	31	93.89

3.2 조사 도구 및 절차

조사 문항은 앞에서 언급한 선행 연구에서 이미 검증된 문항을 연구의 목적에 맞게 개작하였고, 일부 문항은 연구 의도에 맞게 연구자가 직접 제작하였다. 그리고 조합론 및 수학교육 전문가 집단과 현직 고등학교 교사들의 자문을 구하여 몇 차례의 수정을 거쳐서 난이도 조절 및 문제 진술의 교정을 통해 그 타당도를 검증하였다.

이때, 선택 유형의 기준이 되는 문제를 1번 문제로 선정하였고, 배치 유형의 기준이 되는 문제를 2번 문제로 선정하였다. 기준이 되는 문제를 중심으로 그 문제와의 관계, 그리고 그 문제와 구조적 대응의 가시 정도를 정리하였다. 문제와의 관계는 괄호 안에 ‘일치’ 또는 ‘동형’임을 언급하였다. 선택 유형의 문제들에 대한 결과는 <표 2>, 그리고 배치 유형의 문제들에 대한 결과는 <표 3>과 같다. 그리고 학생들에게 익숙한 선택 유형의 문제가 제시된 경우와 제시되지 않은 경우에 배치 유형의 응답 결과에 차이가 있는지 확인하기 위해 지필 검사지를 2종류로 나누었다. 문제지 1은 8문제가 모두 포함되어 있고, 문제지 2는 1번, 5번을 제외하였다. 2종류의 지필 검사지를 각각 A학교와 B학교의 4학급(137명), B학교와 C학교의 3학급(100명)을 대상으로 조사하였다. 지필 검사 자료는 학생들이 사용한 해결 전략별로 범주화하여 빈도와 비율을 구하였고, 비디오로 촬영한 인터뷰를 모두 녹취하였다.

<표 2> 지필 검사 문항-선택 유형(괄호 안은 기준 문제의 구조와 일치 혹은 동형을 뜻함)

기준 문제		
1) 4명의 후보 중에서 3명의 위원을 선출하는 방법은 모두 몇 가지인지 구하여라.		
목표 문제		
대응의 가시 정도	높음	5) 9명의 후보 중에서 4명의 위원을 선출하는 방법은 모두 몇 가지인지 구하여라.(일치)
	중간	4) 어떤 피자집에는 6가지의 토핑(위에 얹는 재료)이 있다. 토핑의 종류는 감자, 고구마, 베이컨, 버섯, 불고기, 페퍼로니가 있다. 이 중에서 손님이 선택하는 서로 다른 3가지의 토핑으로 피자를 만든다고 한다. 서로 다른 피자를 만들 수 있는 방법은 모두 몇 가지인지 구하여라. (단, 토핑을 선택한 순서는 고려하지 않는다.) (동형)

<표 3> 지필 검사 문항-배치 유형(괄호 안은 기준 문제의 구조와 일치 혹은 동형을 뜻함)

기준 문제			
2) 3장의 똑같은 편지가 있다. 이 편지들을 빨강, 주황, 노랑, 초록 봉투에 넣으려고 한다. 봉투 하나에 많아야 한 장의 편지를 넣을 수 있다고 할 때, 3장의 편지를 4가지 색깔의 봉투에 넣는 방법은 모두 몇 가지인지 구하여라.			
목표 문제			
대응의 가시 정도	높음	3) 똑같은 신발 2켤레를 번호 1, 2, 3, 4가 적힌 신발장에 넣으려고 한다. 신발장 하나에 많아야 한 켤레의 신발을 넣을 수 있다면, 2켤레의 신발을 4개의 신발장에 넣는 방법은 모두 몇 가지인지 구하여라. (일치)	6) 4장의 똑같은 편지가 있다. 이 편지들을 빨강, 주황, 노랑, 초록, 연두, 파랑, 남색, 보라, 검정색의 봉투에 넣으려고 한다. 봉투 하나에 많아야 한 장의 편지를 넣을 수 있다고 할 때, 4장의 편지를 9가지 색깔의 봉투에 넣는 방법은 모두 몇 가지인지 구하여라. (일치)
	중간	7) 8명의 사람이 원 모양의 식탁에 앉아 있다. 종업원이 같은 메뉴가 적힌 메뉴판 4개를 나누어줄 수 있는 방법은 모두 몇 가지인지 구하여라. (동형)	8) 검정색 상자 3개와 흰색 상자 7개가 있다. 10개의 상자를 위로 쌓아올릴 때, 쌓을 수 있는 서로 다른 방법은 모두 몇 가지인지 구하여라. (동형)

4. 분석 및 토의

먼저, 지필 검사 결과를 학생들이 사용한 전략을 기준으로 빈도 분석하였다. 다음의 <표 4>와 <표 5>는 각각 문제지 1과 문제지 2로 검사한 학생 집단의 문항별 정답률을 나타낸다. 각 문항별로 정답을 맞힌 학생들이 사용한 전략을 공식을 사용한 경우와 그림을 그려서 문제를 해결한 경우 그리고 그 외의 방법을 사용한 경우로 나누었다. 표의 숫자는 문항별로 해당하는 전략을 사용한 학생의 응답수이고 괄호 안의 숫자는 전체 응답자 중 비율이다. 문제지 1에 응답한 137명의 학생 중에서 60% 이상 응답을 하지 않았거나 이유를 제시하지 않고 공식과 답만 적은 21명의 학생을 제외하고 107명에 대하여 분석하였다. 또한 문제지 2에 응답한 100명의 학생 중에서 같은 이유로 81명의 학생에 대해서만 분석하였다.

<표 4> 문제지 1로 검사한 학생들의 정답자 수

(괄호 안은 비율)

문제 / 전략	1번	2번	3번	4번	5번	6번	7번	8번
공식	82 (76.6)	55 (51.4)	49 (45.8)	91 (85.0)	91 (85.0)	70 (65.4)	51 (47.7)	36 (33.6)
그림	9 (8.4)	12 (11.2)	10 (9.3)	1 (0.9)	·	·	·	1 (0.9)
기타	·	·	·	·	·	·	·	16 (15.0)
합계	91 (85.0)	67 (62.6)	59 (55.1)	92 (86.0)	91 (85.0)	70 (65.4)	51 (47.7)	53 (49.5)

8번 문제에서 기타 응답을 한 학생들은 문제를 순열로 생각하여 같은 것이 있는 순열의 공식을 사용하거나 직접 경우를 나누어 센 경우를 뜻한다.

<표 5> 문제지 2로 검사한 학생들의 정답자 수

(괄호 안은 비율)

문제 / 전략	1번	2번	3번	4번	5번	6번	7번	8번
공식	·	35 (43.2)	41 (50.6)	62 (76.5)	·	49 (60.5)	26 (32.1)	26 (32.1)
그림	·	6 (7.4)	4 (4.9)	·	·	·	·	·
기타	·	3 (3.7)	·	·	·	·	·	13 (16.0)
합계	·	44 (54.3)	45 (55.5)	62 (76.5)	·	49 (60.5)	26 (32.1)	39 (48.1)

2번 문제에서 기타의 응답으로 편지가 들어가지 않을 빈 봉투를 찾는 전략을 사용한 학생들이 있었고, 8번 문제의 기타의 응답은 문제지 1의 학생들과 마찬가지로 순열로 생각하여 해결한 학생들의 경우를 뜻한다.

위의 <표 4>와 <표 5>를 비교해 보면 1번과 5번을 푼 학생은 그렇지 않은 학생보다 4번과 7번에서 높은 정답률을 보이고 있음을 알 수 있다. 구체적인 분석은 다음과 같다.

4.1 같은 문제 유형 사이의 요소 대응 과정 분석

가. 일치하는 문제 사이의 구조 대응 과정 분석

기준 문제와 일치하는 문제들은 대부분의 학생들이 잘 풀었고, 또한 인터뷰 대상인 학생들은 일치하는 관계에 있는 문제의 요소들 사이의 대응을 대부분 잘 찾았으며 새로운 문제의 해결에 구조적으로 동형인 이전 문제의 해결 방법을 적절하게 활용하였다. 즉, 1번과 5번, 그리고 2번과 6번 문제는 각각 선택 유형과 배치 유형에서 일치하는 관계에 있는 문제들이고, 기준 문제인 1번, 2번과 비교하였을 때 5번, 6번 문제는 단지 사례수가 큰 경우에 해당하는 문제들이다. 구조적으로 일치하면서 사례수의 차이가 있는 두 문제를 해결하는 과정을 통해, 인터뷰 대상인 학생들은 사례 수가 작은 문제에서 문제 해결의 힌트를 얻고 사례 수가 크지만 구조적으로 일치하는 문제의 해결을 더 쉬운 방법으로 할 수 있었다. 사례수가 큰 문제의 해결을 위해 사례수가 작지만 구조적으로 일치하는 문제를 고려하는 것은 복잡한 문제의 해결 방법을 찾는 것에 도움이 될 수 있음을 인터뷰를 통하여 알 수 있었다.

그리고 배치 유형에서 2번과 3번 문제도 일치하는 관계에 있는 문제이다. 2번 문제는 똑같은 편지를 서로 다른 편지 봉투에 많아야 한 장만 넣는 경우이고, 3번 문제는 똑같은 신발을 서로 다른 신발장에 많아야 한 켤레만 넣는 경우에 신발을 넣을 수 있는 서로 다른 방법의 수를 구하는 것이다. 단지 문제에서 다루고 있는 대상이 다를 뿐 문제 상황이 비슷하기 때문에 두 문제 사이에 구조적 동형을 인식할 수 있는 정도는 매우 높았다. 그리고 인터뷰 결과 대부분의 학생들이 2번과 3번 문제 사이의 구조적 동형을 인식하고 있었다.

연구자 같은 역할을 하는 조건들끼리 짝을 지어줄 수 있지 않나요?
학생 4 가능하겠죠. 봉투 하나에 많아야 한 장의 편지랑 신발장 하나에 많아야 한 켤레… 이거랑 그 다음에 서로 똑같은 편지랑 서로 똑같은 신발 이 부분이랑, 마지막에 네 가지 색깔의 봉투에 넣는 방법이랑 두 켤레 신발을 4개의 신발장에 넣는 거랑…

나. 동형 문제 사이의 구조 대응 과정 분석

1) 선택 유형

선택 유형에서는 기준 문제인 1번과 구조적으로 동형인 4번 문제 사이에 학생들이 문제 구조의 동형을 제대로 이해하는 지를 알아보기 위하여 문제지 1의 답안을 살펴본 결과, 4번 문제는 비록 문제의 진술이 1번 문제보다 복잡해지긴 하였지만 1번과 같은 정도(1번: 85%, 4번: 86%)의 정답률을 보였다. 또한, 문제지 2로 검사한 학생들도 4번 문제에서 76.5%라는 높은 정답률을 보이고 있었다. 이것은 학생들이 4번 문제 자체의 해결을 어려워하지 않고 있음을 보여준다. 문제를 해결한 학생들은 '순서를 고려하지 않는다.'는 조건 때문에 서로 다른 재료를 그냥 선택하기만 하면 되므로 조합의 수를 사용하는 공식을 사용하여 문제를 해결하였다.

다음은 1번과 4번의 동형을 이해한 학생의 인터뷰 내용이다.

연구자 이 문제를 어떻게 푼 것이에요?
학생 3 순서를 고려하지 않으니까… C…순서를 고려하지 않으니까 어떻게 고르던 간에 상관없는 거잖아요.
연구자 1번 문제와 같은 역할을 하는 조건끼리 누가 누구의 역할을 하는지 얘기해 줄 수 있겠어요?
학생 3 음…서로 다른 3가지 토핑으로 피자를 만든다고 하는 게 위원이고, 6가지 토핑, 이 총 재료가 후보이고…

학생들은 선택 유형은 많이 접해 보았기 때문에 전체 대상이 무엇이고 부분 대상이 무엇인지 쉽게 구별할 수 있었으며 따라서 문제의 요소별로 대응을 잘 찾을 수 있고, 또한 문제를 쉽게 해결할 수 있었다.

2) 배치 유형

배치 유형에서는 기준 문제인 2번과 구조적으로 동형인 7번, 8번 문제 사이에 학생들이 문제 구조의 동형을 어떻게 이해하는 지 알아보기 위하여 학생들의 답안을 살펴보았다. 7번과 8번 문제는 배치 유형의 다른 문제와 비교했을 때 기준 문제인 2번 문제와 대응의 가시 정도가 낮은 편에 속한다. 7번은 '원모양의 식탁에 앉은 사람에게 같은 메뉴판을 나누어준다.'라는 상황을 배열로 인식하여, 원순열로 해결하려고 하는 학생들이 대부분이었다. 진술이 순열처럼 인식되는 문제 상황에서 학생들은 2번 문제와 7번 문제 사이에 구조적 동형의 확인에 어려움을 겪었음을 확인할 수 있었다. 반면에 원모양의 식탁에 단순히 앉아 있는 조건과 같은 메뉴판을 나누어주고 있음을 명확히 이해했다면 구조의 대응을 잘 볼 수 있었다. 이 상황을 잘 해결한 학생들의 답안을 보면 원모양의 식탁에 앉아 있으므로 앉는 순서는 고려하지 않아도 되므로 식탁에 앉은 사람들을 일렬로 늘어놓고 메뉴판을 나눠주는 경우만 생각한다고 하였다.

학생 4는 다음과 같이 2번 문제와 7번 문제 사이에 문제 구성 요소들의 대응을 확실히 인식하고 있었다.

연구자 그러면 이 문제(메뉴판 주기)를 편지 3장 넣기 문제와 문제의 요소별로 짝지어 줄 수 있겠어요?
학생 4 네. 일단 빨, 주, 노, 초 봉투를요, 8명의 사람이 식탁에 앉았을 때랑, 그리고 같은 메뉴랑 3장의 편지라고 생각합니다.

그리고 8번 문제는 7번 문제보다 더욱 동형 관계를 인식하기 어려웠다. 8번 문제는 문장의 진술이 상자를 쌓는 것, 즉 배열하는 것이었기 때문에 위로 쌓는 상자를 옆으로 늘어놓고 순열로 생각한 학생들이 많았다. 같은 것을 중복해서 배열하는 순열로만 생각했기 때문에 다른 배치 유형의 문제들과 동형의 관계를 인식하지 못하였다. 또한 흰색 상자를 먼저 늘어놓고 검은색 상자가 흰색 상자 사이에 배열될 수 있는 경우를 구하려고 한 학생들도 많았다. 이처럼 대부분의 학생들은 8번 문제를 2번 문제와 구조적으로 동형이라는 것을 인식하지 못하였다.

그리고 인터뷰 결과, 학생들은 늘어놓는 상황을 다른 진술로 바꾸려고 하지 않는 경향을 보였다.

4.2 다른 문제 유형 사이의 요소 대응 과정 분석

가. 선택 유형에서 배치 유형으로의 요소 대응 과정 분석

전체 학생 중에 선택 유형에서 배치 유형으로 진술을 바꾼 학생은 한 명도 없었다. 이러한 결과는 Roa(2000)의 연구에서도 확인할 수 있었다. Roa는 다른 동등한 문제로 바꾸기 전략을 사용한 학생들 중에서 선택 유형의 문제를 다른 유형의 문제로 바꿔서 푼 학생은 없었으며 이 전략을 사용한 학생들은 모두 배치나 분할 유형에서 선택 유형으로 바꾸었다고 하였다. 이러한 반응은 조합 문제에서 선택 유형이 학생들에게 더 익숙하고 다루기 쉬운 문제 유형이기 때문에 나타나는 결과임을 알 수 있었다.

나. 배치 유형에서 선택 유형으로의 요소 대응 과정 분석

1) 분석 결과

가) 대응을 잘 찾은 경우

학생들 중에는 배치 유형과 선택 유형의 문제를 구성하는 요소 사이의 일대일 대응을 잘 정의할 수 있는 학생들도 있었다. 배치 유형 문제를 한 번에 선택 유형으로 재 진술하여 해결한 학생도 있었고, 여러 단계를 거쳐 배치 유형에서 선택 유형으로 구조적 대응 관계를 인식한 학생도 있었다. 먼저, 배치 유형의 2번 문제를 선택 유형으로 한 번에 구조적 동형을 확인한 학생 1을 인터뷰하였다. 먼저 2번 문제를 어떻게 해결하였는지 물었다.

학생 1　똑같은 편지. (똑같은 직사각형 3개를 그리면서) 3장이 있어요…근데 이 봉투에는 하나씩밖에 안 들어가잖아요. 같은 편지를 넣는단 말이에요. 이거(편지봉투들)의 순서에 상관없이… 4개의 봉투가 있다고 치고 여기에 하나씩만 넣으면 되는 거니까 아닌가?

연구자　그게 왜 인지 얘기를 해 줘야지.

학생 1　어쨌든 봉투 3개는 채워지잖아요. 어느 봉투를 뽑느냐는 거죠. 그러니까 4개의 봉투 중에 어느 세 봉투는 항상 들어간단 말이에요. …(중략)… 편지가 들어간 봉투는 3개일 거고 그럼 결국 봉투 4개 중에 3개를 뽑는 거랑 같아요. 들어갈 봉투는… 그러니까 그 가지 수는 $_4C_3$이죠.

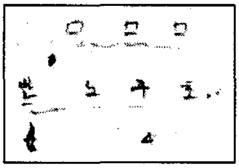
학생 1은 4개의 구별이 가능한 봉투에 많아야 하나씩만 편지가 들어가니까 편지가 들어갈 3장의 봉투를 뽑아야 하고, 뽑은 봉투에 편지를 넣어야 하는데 그 편지가 구별이 불가능하기 때문에 어느 편지가 어느 봉투에 들어가는지 고려하지 않아도 되므로 결국 서로 다른 4장의 봉투 중에서 3장을 뽑는 것과 같다고 하였다. 학생 1은 배치 유형과 선택 유형 사이의 일대일 대응을 명확하게 이해하고 있었다.

반면에 한 번에 대응을 찾을 수는 없었지만 다른 문제의 도움으로 대응을 찾은 경우도 있었다. 예를 들어 기준 문제에서는 배치 유형의 진술을 선택 유형의 진술로 바꾸어서 해결하지는 않았지만 동형인 다른 문제를 선택 유형의 진술로 바꾸어 해결한 학생을 인터뷰하였다. 먼저 2번 문제를 어떻게 해결하였는지 물었다.

학생 4　문제를 접했을 때는 어려울 것이라 생각하고요, 문제를 딱 물어보는 걸 직시했죠. …(중략)… 그러면은 요, 세 개의 편지를 4개의 봉투 안에 분배하면요, 하나는 꼭 비어있게 되죠.

연구자　네.

학생 4　세 장의 편지가요 모두 같기 때문에 세 개의 어떤 순서를 넣어도 상관이 없죠. …(중략)… a, b, c라는 세 개의 편지를 넣는다고 할 때 에요, 만약 세 개의 편지가 같다면 요…순서에 상관없이 그냥 모든 경우가 같게 되죠. …(중략)… 전체적으로 모든 상황들이 편지가 다 같아짐으로써 하나의 상황으로 다 취합되는 거죠.



학생 4는 2번 문제를 세 장의 편지가 구별이 불가능하기 때문에 편지 봉투에 넣는 순서를 고려하지 않아도 되고 편지가 분배된 경우만 고려하면 된다고 하였다. 아직은 선택의 유형으로 진술을 명확하게 바꾸지 않았다. 그렇지만 3번 문제를 해결하면서 배치 유형의 문제를 선택 유형으로 바꾸어 진술할 수 있었다.

학생 4　신발장 4개가 있죠., 그 중에서 똑같은 신발을 두 켤레를 뽑잖아요.

연구자　신발을 뽑아요?

학생 4　아니…(신발장을) 빼서 넣잖아요. 그러니까요 신발은 두개가 똑같잖아요…뭐라고 해야 하지?

신발이 똑같기 때문에 순서에 구애를 받을 필 요가 없죠.

학생 4는 서로 다른 신발장 두 개를 '꺼내서(선택해서)' 그 신발장에 신발을 넣는 것이라고 하였다. 그리고 신발이 같기 때문에 신발장 2개를 꺼내는 경우만 고려하면 된다고 하였다. 학생 4는 배치 유형의 문제를 선택 유형의 문제로 바꾸어 생각하려고 했지만 문제 상의 진술 자체를 바꾸는 활동은 꺼려하고 있음을 알 수 있었다. 신발장을 선택하는 상황을 신발장을 꺼내서 신발을 넣는 상황으로만 진술하려고 하는 경우에서 학생들의 그러한 심리를 볼 수 있었다.

학생 4가 2번과 3번 문제의 대응 관계를 인식하고 있는지 확인하기 위해 같은 역할을 하는 요소끼리 짝을 지어줄 수 있는지 물어보았다.

학생 4 봉투 하나에 많아야 한 장의 편지랑 신발장 하나에 많아야 한 켤레…이거랑 서로 똑같은 편지랑 서로 똑같은 신발 이 부분이랑, 마지막에 네 가지 색깔의 봉투에 넣는 방법이랑 두 켤레 신발을 4개의 신발장에 넣는 거랑…

English(1999a)은 학생들이 문제 구조를 이해하였는지 평가하는 기준으로 문제의 의미를 설명하고, 문제구조의 요소를 구별할 수 있는 능력을 갖추었는지 확인해야 한다고 하였다. 이러한 관점에서 학생 4는 2번 문제와 3번 문제가 같은 구조를 가지고 있음을 이해하고 있다고 보았고, 3번 문제에서 해결한 방법을 2번 문제 상황에 적용할 수 있는지 물었다.

연구자 그럼 조건들을 정리해서 다시 말해줄 수 있겠어요?

학생 4 그러니까요 4개의 봉투에 똑같은 편지를 뽑아서 임의로 넣어야 하니까 순서를 고려하지 않고 3개를…임의로 선택하면 되요.

이 학생은 3번 문제를 통해 2번 문제를 봉투를 선택하는 진술로 바꿀 수 있었다. 그리고 2, 3, 6번 문제가 분배하는 방식이 비슷하기 때문에 같은 방법으로 해결하면 된다고 한 아이디어를 토대로 6번 문제에서는 편지를 분배하는 전략이 아닌 편지를 넣을 봉투를 선택하는 전략을 바로 사용하였다.

연구자 이 문제(6번)는 어떻게 ${}_9C_4$가 나왔지?

학생 4 딱 보는 순간 갑자기 문제의 유형이 연결되면서… 이걸 딱 문제를 보는데, 그때 그 순간 이 문제(편지지 3장인 2)번 문제)랑 똑같다라는 것을 딱 느꼈어요. 이것도 그렇게 풀어야 될까 딱 생각하는 데요, 앞에서 combination을 풀었잖아요. 그래서…

연구자 만약 이 문제(3번)가 없었다면 어떻게 했을 것 같아요?

학생 4 이렇게(2번 문제처럼) 했겠죠.

인터뷰 내용에서 볼 수 있듯이 학생 4에게 3번 문제는 6번 문제의 해결에 도움이 된 기준 문제의 역할을 하고 있었고 3번 문제를 선택 유형으로 바꾸어 생각하는 활동을 통해 사례 수가 큰 문제의 활동을 효과적으로 해결할 수 있었다. 그리고 배치 유형이 선택 유형으로 일대일 대응이 되면서 학생 4는 모든 배치 유형의 문제를 선택 유형으로 바꿔서 해결할 수 있었다.

나) 대응을 잘 찾지 못한 경우

배치 유형에서 선택 유형으로 대응을 잘 찾지 못한 학생들은 주어진 배치 유형의 문제에서 조합을 순열로 잘못 생각하고 문제를 해결하려고 하였다. 이들 중에는 문제의 전체적인 구조를 보지 못하고 핵심 단어에 의존하여 문제를 이해하려는 학생들도 있었다. 학생 2는 이러한 이유 때문에 2번 문제에서 오답을 얻었다.

연구자 어떠한 문제가 풀이 방법이 비슷하다고 생각해요?

학생 2 2번, 3번이 같은 거 같은데요…

연구자 2번, 3번이 같고 1번과 다르다는 건가? 왜 다른지 말을 해줄 수 있어요?

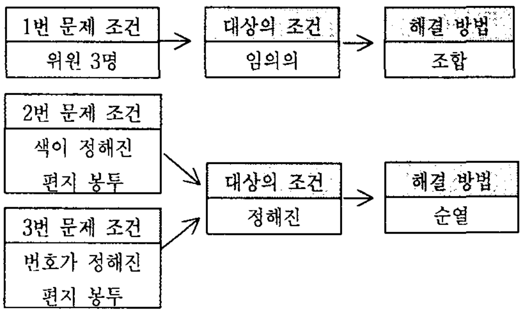
학생 2 2번하고 3번 같은 경우에는 요, 2번 같은 경우에는 편지들이 빨강 주황 노랑 초록같이 그 어디에 넣어야 되냐는 임의의 그 4개가 아니라, 편지 봉투 4개가 아니라, 주어져 있잖아요. 빨강 주황 노랑 초록이…

연구자 주어져 있고.

학생 2 그리고 3번 도요…번호가 1, 2, 3, 4라고 적힌 신발장이라고 했는데…1번 같은 경우를 보면은 그냥…특별하게 주어진 자격…그…뭐라 그럴까 지정이 아니라 임의로 3명을 뽑는다고 했잖아요…그래가지고 임의랑, 정해진 거랑…다르게 생각해서…순열하고 조합이라고 생각했는데요.

왜 다른지 물었을 때 학생 2는 색깔이 주어진 편지봉투, 번호가 적힌 신발장과 위원 3명을 비교하여 설명

하였다. 학생 2는 문제에서 핵심이 되는 조건을 모두 다 고려하지 않았다. 학생 2는 1번 문제에서 3명의 위원과 2번 문제의 4장의 서로 다른 편지 봉투, 3번 문제의 4개의 서로 다른 번호가 매겨진 신발장을 대응시켜서 설명하였고 두 대상의 특성(임의/정해짐)이 다르기 때문에 두 문제는 관련이 없다고 하였다. 복잡한 문제의 진술에서 핵심 요소들에 대한 명확한 대응을 줄 수 없었던 이유는 순열과 조합에 대한 학생 2의 개념 이미지와 관련이 있다. 순열과 조합에 대한 학생 2의 개념 이미지는 대상의 이름 또는 대상의 성질이 특정하게 정해진 경우에는 순열이고 임의적일 경우는 조합이라는 것이다.



<그림 4> 순열과 조합에 대한 학생 2의 개념 이미지

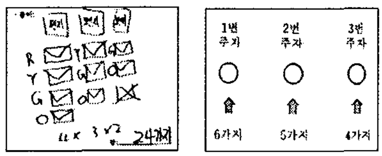
Sowder(1988)는 학생 2와 같이 문제 정보에 대해 충분히 생각하지 않고 문제 진술 중에 특정 단어로부터 힌트를 얻어 답을 얻는 전략을 '키워드 전략'이라고 지적하였다. 키워드 전략은 문제의 전체적인 구조 대신에 지엽적인 정보에 집중하게 하기 때문에 문제의 큰 틀을 이해하는데 방해하는 요소가 된다.

그리고 선택 유형으로 바꿀 때 구별 불가능한 부분 대상을 구별 가능한 것으로 오인하여 '똑같은 대상을 넣는 상황'을 '넣을 공간만을 선택하는 상황'으로 해석하지 못한 경우가 있었다. 학생 5는 2번 문제에서 '똑같은' 편지를 넣고 있음을 인식하지 못하고 편지를 넣는 순서를 생각하고 있었다.

학생 5 편지를 넣을 수 있는 봉투의 수는 4개이고 만약 이 편지를 빨간색 편지 봉투에 넣었다고 하면은 그 가지 수가 세 개로 줄어들고 또 두개로 줄어들고…그렇게…가지치기…하다 보면… 그렇게 하다 보면 4개에서 각각 3개가 분류가 나오고, 3개에서 각각 또 2개가 나오고…그렇게…

연구자 그렇게 나온다, 그러면 이 문제(3번 문제)도?
학생 5 얘도 똑같은 방법으로.
연구자 그럼 얘(6번 문제)도 똑같은 방법으로?
학생 5 네.

2번 문제를 순열로 해결한 학생들은 대부분 학생 5와 같은 그림 또는 설명을 하고 있었다. 학생 5가 문제 구조를 어떻게 이해하고 있었는지 학생 5가 해결 과정을 그린 <그림 5>에서 문제점을 발견할 수 있었다.



<그림 5> 학생 5의 잘못된 유추(왼쪽)와 참고 그림(오른쪽: 최용준 외, 2002)

<그림 5>의 오른쪽 그림은 '6명의 릴레이 선수 중에서 1번 주자, 2번 주자, 3번 주자까지 3명을 뽑는 방법의 수는 몇 가지인지 구하여라.'(최용준 외, 2002)의 해결 과정에 제시된 그림이다. 1번 주자, 2번 주자, 3번 주자를 서로 구별 가능한 6명의 릴레이 선수에서 선택하므로 뽑히는 순서를 고려하여 선택해야 하는 상황이다. 하지만 2번 문제는 편지가 들어갈 봉투를 선택하는 것이고 편지가 모두 똑같으므로 봉투를 선택할 때는 순서를 고려하지 않아야 한다. 그런데 학생 5는 편지가 똑같다는 문제의 조건을 인터뷰 중에 직접 말로 언급을 하였음에도 불구하고 해결 과정에서는 그 사실을 잊은 채 편지를 넣을 수 있는 봉투의 순서를 고려하고 있었다. 편지가 구별된다고 생각했기 때문에 편지를 넣을 봉투를 선택하고 나서 편지를 넣을 상황을 다시 고려해야 한다고 생각하였다.

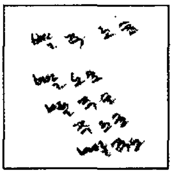
<그림 5>의 오른쪽 그림은 비워져 있는 자리나 공간에 숫자나 어떠한 대상을 채워 넣는 경우를 해결하기 위해 주로 사용되는 그림이다. 대부분의 학생들은 빈 공간에 r개의 대상을 넣는 상황에서 넣으려는 대상이 구별가능할 때와 구별 불가능할 때가 명확히 구별되지 못한 채, 어떠한 대상을 '채워 넣는' 문제 상황에서 학생들은 자리 역할을 하는 밑줄을 긋고 첫 번째 자리부터 대상을 채워 나간다. 이렇게 대상을 '넣는' 상황에 대한 고정적인 문제 해결 방법으로서 <그림 5>의 오른쪽 그림이 선

호되고 있는 것은 특정 유형 문제를 해결할 수 있는 방법을 선택하는데 그 문제의 해결에 적절한 해결 방법이 강하게 연결될 때 나타날 수 있는 '갖춤새 효과'(set effect)에 기인한다고 볼 수 있다. 특정 유형의 문제 해결 방법에 편파성을 초래할 수 있는 갖춤새 효과가 문제의 구조를 보는 것에 방해를 줄 수 있다.

2) 토의

배치 유형에서 선택 유형으로 대응을 잘 찾지 못한 학생들이 대응을 잘 찾을 수 있도록 몇 가지 시도를 하였다. 먼저, 문제의 특수한 조건에 초점을 맞추지 말고 전체 구조를 보도록 지도하였다. Reed(1987)는 문제를 핵심 요소로 분석하는 것이 요소 사이의 대응을 쉽게 확인할 수 있다고 하였다. 학생 2에게 문제를 구성하는 핵심이 되는 요소가 무엇인지 물었다.

연구자　1번 문제에서 문제를 푸는데 필요한 중요한 요소가 무엇인지 말해줄래요?
학생 2　여기…4명의 후보랑 3명의 위원이요….
연구자　그러면 2번 문제는?
학생 2　빨, 주, 노, 초 봉투 4장이랑… 편지 3장…
연구자　봉투 4장은 색깔이 정해져 있죠. 그러면 편지 3장은 어떤 조건이 있죠?
학생 2　똑같다는 거요…아…잠깐만요. (종이에 오른쪽과 같이 적음) 빨, 노, 초하고, 빨, 주, 초하고, 주, 노, 초하고, 빨, 주, 노 해 가지고 4가지. 4가지밖에 안 나와요.



학생 2는 직접 나열을 해 본 후 자신의 답이 어느 부분이 잘못 되었는지 확인할 수 있었다.

학생 2　순열이기 때문에 이걸 넣은 다음에 바꾸는 방법까지 세면 24가지가 나오는 거고 $_4C_3$은 일단 넣을 수 있는 방법만을 생각해서 했기 때문에 4가지가 나올 수밖에 없는 거예요. 그래서 넣는 것만 생각하면 $_4C_3$이고 그걸 또 넣어 가지고 순서를 바꿔주면 24가지가 나오는데, 이 문제에서 물어본 것은 넣을 수 있는 방법만을 물어 본 거니까 4가지가 정답이…

학생 2는 문제의 특정 부분에 초점을 맞추던 시도에서 벗어나 전체 문장을 보기 시작하면서 인터뷰의 처음과 달리 1번 문제와 2번 문제가 그다지 다른 것 같지 않다고 하였다. 그리고 2번 문제의 진술을 1번 문제의 진술인 선택 유형으로 바꾸어 진술하려고 시도하였다.

학생 2　아니…그다지 다른 것 같지 않은데요? 4명의 후보나…4가지 봉투나…전체적인 걸로 4명의 후보를 먼저 두고 여기도 전체적으로 4가지 봉투로 둔 다음에…4명의 후보에서 3명의 위원을 뽑아야 하는 거니까…
연구자　지금 4명이 있고 3명을 뽑는다고 했지?
학생 2　네. 그러니까 2번도 빨강, 주황, 노랑, 초록이라는 전체적인 4가지가 있고 3장의 똑같은 편지를 뽑으라는 조건이 있잖아요. 이걸 (봉투) 전체적인 것으로 보고 이걸(편지) 조건이라고 보면 나올 것 같아요…
연구자　3장의 똑같은 편지를 뽑는다고?
학생 2　아…아니요. 똑같은 편지를 넣을 3장의 봉투요…

학생 2는 인터뷰 과정을 통하여 자신이 조합 문제를 해결하기 위해 가졌던 개념 이미지를 수정할 수 있었고, 문제의 특정한 조건에 집중하였던 시각에서 벗어나 전체적인 문제의 구조를 보려고 시도하였다. 이 학생은 배치 유형의 기준 문제인 2번 문제가 선택 유형의 진술로 구조적으로 대응이 되는 과정을 학습한 후 인터뷰 후에는 2번 문제와 동형인 3번 문제의 오류를 수정하여 선택 유형으로 구조적 대응을 시킬 수 있었다. Novick(1988)도 문제의 진술에서 숫자(양적인 값)가 뜻하는 것이 무엇인가보다는 오히려 문제에서 그 숫자가 다른 것들과 어떻게 연관되는지를 우선 결정해야 한다고 주장하면서, 학생들이 문제 상황에서 중요한 구조적인 특성을 확인하는 것이 무엇보다 필요하다고 주장한 바 있다.

그리고 배치유형에서 선택유형으로 대응을 잘 찾도록 하는 또 다른 시도로 구조를 잘 알고 있는 문제를 제시하여 그 문제를 구성하는 요소들과 일대일 대응을 줄 수 있도록 지도하였다. 지필 검사를 문제지 2로 했기 때문에 1번 문제를 풀지 않은 학생 5에게 선택 유형의 1번 문제를 제시하고 그 문제의 요소와 다른 문제와의 일대일 대응을 줄 수 있는지 알아보았다.

학생 5　위원이 다 똑같은 위치의 위원이면은… $_4C_3$ 4명 중에 3명 선택하는 가지 수.
연구자　그러면은 이 문제(1번 문제)랑 이 문제(2번 문제)랑은 (해결 방법이) 다른 거예요?
학생 5　이거(1번 문제)는 위원 3명이, 만약 abc를 뽑는

다면은 abc를 뽑는거나 bac를 뽑는거나 같으니까요. 그걸 생각했을 때는 $_4C_3$. 이런 방법을 쓰고…얘(2번 문제)는 4개 중에 3개를 선택해도 순서가 다르면 다른 거잖아요.
연구자 어…왜요?
학생 5 빨간색, 노란색, 초록색을 넣는 거 하고, 빨간색, 초록색, 노란색을 넣는 거 하고 다르니까.

1번 문제를 물어보았을 때 학생 5는 '똑같은 위치의 위원'인가를 제일 먼저 확인하였다. 그러고 나서 전체적인 상황인 '서로 다른 4명의 후보'에서 '같은 위치의 위원'을 뽑기 때문에 위원을 선택하는데 순서는 상관이 없음을 직접 예를 들어 설명하였다. 그런데 2번 문제에서는 편지의 조건이 '똑같은 편지'임을 직접 말했음에도 불구하고 편지가 들어가는 봉투의 순서를 고려하고 있었다. 다시 한 번 물었을 때 학생 5는 2번 문제를 선택 유형의 진술로 바꾸어서 1번 문제와 어떤 차이가 있는지 설명하려고 했다. 그런데 '빨간색, 노란색, 초록색을 넣는다.'라는 진술이 명확하지 않아서 재 진술을 요구하였고, 편지를 넣을 봉투를 선택해서 그 봉투에 편지를 넣는다고 자신의 말을 명확하게 진술하였다.

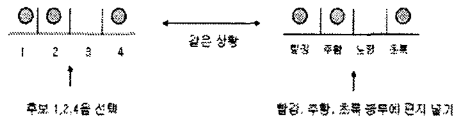
학생 5 그러니까 이 4개의 봉투 중에서 3개를 선택해야 되는 거잖아요.
연구자 네. 4명중에서 3명을 선택하는…여기서는 위원을 3명을 똑같다고 봤어…그리고 이 편지는…
학생 5 편지 똑같죠. 근데 이거는 후보가…이 4개 중에서 하여튼 편지를 넣을 수 있는 봉투는 3개이잖아요. 4개 중에서 편지가 들어갈 수 있는 봉투는 3개이잖아요. 그 4개 중에서…이 빈 봉투 4개 중에서 편지를 넣는 봉투 3개를 선택하는데, 그 봉투가 각각 만약, 빨간색, 노란색, 초록색을 선택했다고 생각하면은 어쨌든 이 세 개의 편지를 이 봉투에 넣어야 하는 거잖아요. 그런데 빨간색 노란색 초록색 넣는 거하고, 빨간색 초록색 노란색 넣는 거하고 각각 다르니까…

학생 5는 2번 문제에서 선택으로 진술을 바꾸는 과정에서 전체 대상이 무엇이고 무엇을 뽑으면 되는지는 이해하고 있었다. 그런데 편지를 넣을 봉투를 3장 고르고 그 봉투에 편지를 넣는 과정에서 편지를 넣는 순서를 고려하는 오류를 범하였다. 편지를 넣을 봉투를 뽑고, 뽑힌 봉투에 같은 편지를 넣어야 하는데 봉투를 넣는 순서에 따라서 다르다고 하였다. 왜 다르냐고 물었을 때, 그때서야 넣어야 하는 편지가 같음을 확인하였다.

연구자 왜 거기 달라요?
학생 5 아…편지가 똑같구나…

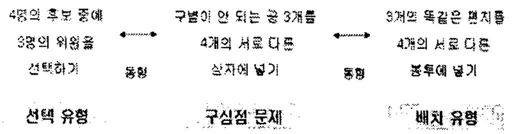
하지만 이러한 과정 중에서 몇 가지 한계점을 발견할 수 있었다. 먼저 각각의 배치 유형의 문제들을 선택 유형으로 바로 진술을 바꾸도록 유도하는 것은 다소 무리가 있었다. 무엇보다 학생들은 문제의 진술 유형을 쉽게 바꾸려고 하지 않는 경향이 있다.

따라서 학생들이 조합문제를 보다 잘 풀 수 있는 방법으로 다양한 조합 문제를 하나의 '구심점 문제'로 대응시켜 해결하도록 지도하는 방법을 생각해 보았다. 진술 유형이 다른 문제 사이의 대응을 찾는 것보다는 진술 유형이 같은 문제 사이의 대응을 찾는 것이 더 쉽기 때문에 선택 유형의 조합 문제들과 구조적으로 동형인 하나의 구심점 문제를 학생들에게 제시하고, 이 구심점 문제가 배치 유형의 조합 문제들과 구조적으로 동형이 됨을 지도한다면 결국 구심점 문제가 매개체가 되어 선택 유형과 배치 유형의 조합 문제가 구조적으로 동형이 됨을 학생들이 쉽게 확인할 수 있을 것이다. 예를 들어, 선택 유형의 1번 문제는 구별되지 않는 3개의 공을 서로 다른 4개의 상자에 많아야 하나의 공을 넣을 수 있는 문제 상황과 일대일 대응이 될 수 있다. 만일 후보 1, 2, 4가 선택되는 상황을 1, 2, 4번 상자에 공을 넣는 상황이라고 한다면, 똑같은 위원은 구별이 안 되는 공에 대응되고 각각의 후보들은 상자에 대응되어 위원 3명을 선택하는 상황은 공이 구별 불가능하기 때문에 공을 넣을 상자 3개를 선택하는 것과 같은 상황이 된다.



그리고 2번 문제를 구별이 되지 않는 3개의 공을 서로 구별되는 4개의 상자에 넣는 방법의 수를 구하는 문제에 대응시키면 똑같은 편지는 구별이 안 되는 공에 대응되고 서로 다른 봉투는 서로 다른 상자에 대응된다. 만일 빨강, 주황, 초록색의 봉투에 편지를 넣는다면 이것은 빨강, 주황, 초록색의 상자에 공을 넣는 것과 일대일 대응이 되는 상황이다. 선택 유형의 문제와 공과 상자 문제의 구조적 동형을 이해하고, 구심점 문제와 배치 유형 문제의 구조적 동형을 이해하여, 결국 외형적으로 진

술이 다른 조합 문제가 구조적으로 동형이 됨을 이해할 수 있다.



따라서 배치 유형의 문제 구조에서 무엇이 상자의 역할을 하고, 무엇이 공의 역할을 하는 것인지를 명확히 구별할 수 있다면 모든 배치 유형의 문제들은 공과 상자 문제라는 구심점의 문제로 돌아올 수 있다. 그리고 공과 상자 모델은 배치 유형의 문제를 가르칠 때 순열과 조합의 차이가 명확하게 보일 수 있는 장점이 있고 더 나아가 상자에 들어갈 수 있는 공의 수를 변화시키면서 다양한 배치 유형의 경우의 지도에 도움이 될 수 있다. Roberts(1984)는 조합론의 역사에서 '상자에 공을 넣는 문제'가 중요한 역할을 한다고 하였다. 상자의 구별 여부와 공의 구별 여부, 그리고 빈 상자가 생길 수 있는지의 여부에 따라 다양한 경우가 있으며, 그 중 순열은 r개의 서로 다른 색의 공을 n개의 서로 다른 상자에 많아야 하나의 공을 넣는 경우를 의미하고, 조합은 r개의 동일한 공을 n개의 서로 다른 상자에 많아야 하나의 공을 넣는 경우를 의미한다고 하였다. Goodaire와 Parmenter(2002)가 순열과 조합의 수를 계산하는 공식과 그 공식이 응용되는 경우를 나열하여 <표 6>와 같이 나타내었다.

<표 6> 순열과 조합의 수 계산 공식

${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$	· r개의 서로 다른 색의 공을 n개의 서로 다른 상자에 기껏해야 하나의 공을 넣는 방법의 수 · n개의 서로 다른 대상들을 하나씩 r개를 사용하여 순서대로 나열하는 방법의 개수
${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$	· r개의 동일한 공을 n개의 서로 다른 상자에 기껏해야 하나의 공을 넣는 방법의 수 · n개의 서로 다른 대상에서 r개를 중복하지 않게 선택하는 방법의 수

따라서 학생들은 순열과 조합을 한 가지 상황이 아닌 다른 여러 상황으로도 볼 수 있는 시각을 가져야 한다. 즉, 선택 유형과 배치 유형을 정확히 이해하고 두 유형 간의 구조적 연결성을 이해할 수 있도록 학습이 촉진되어야 한다. 조합에 대한 개념을 학습할 때도 선택 유형뿐만 아니라 배치 유형을 여러 가지 문제 상황으로 다루는 과정을 자주 제공하여 학생들이 좀 더 분석적으로 사고하고 순열과 조합에 대한 명확한 사고를 키울 수 있도록 해야 한다. 그리고 배치 유형의 진술을 선택 유형의 진술로 바꾸어 보는 과정, 즉 서로 다른 진술 사이에 같은 역할을 하는 요소를 대응시켜 보는 활동을 통해 다양한 문맥의 조합론의 문제들을 다루는데 유연한 사고를 할 수 있는 경험을 제공해야 한다.

5. 요약 및 결론

조합론에서 다루는 문제들은 일반적인 공식만을 사용해서 문제를 해결할 수는 없다(Dossey,1991). 왜냐하면 조합 문제의 진술은 여러 가지로 변형될 수 있으므로 다양한 문제 상황에서도 구조를 정확히 파악할 수 있어야 하기 때문이다. 학생들은 문제 구조를 보지 못한 체 각각의 문제들을 다르게 해결하려고 함으로써 실패를 경험하게 된다. 이러한 경험들의 원인은 학생들이 문제의 요소 사이의 일대일 대응에 의한 추론 과정인 유추를 적용하는 것을 실패하였기 때문에 더 자주 일어나게 된다(English & Halford, 1995). 따라서 조합 문제를 잘 해결하기 위해서는 복잡한 진술 속에서 문제의 큰 구조를 보고 핵심 요소가 무엇이며 기존에 알고 있는 유사한 상황과 이 요소들이 어떻게 대응될 수 있는지를 알아보는 과정이 무엇보다 중요하다.

본 연구에서는 문제의 진술은 다르지만 문제 구조는 동형인 문제 상황이 주어질 때 학생들이 어떻게 대응을 찾아내는지 그 과정을 분석하였다. 그 결과 선택 유형 사이의 대응을 찾는 과정이 배치 유형 사이의 대응을 찾는 과정보다 쉬웠음을 확인할 수 있었다. 그리고 문제를 해결하기 위해 배치 유형의 진술을 선택 유형의 진술로 바꾸는 경향이 있었는데 대응을 찾을 수 있는 정도는 학생들마다 달랐다. 대응을 한 번에 잘 찾는 경우가 있는 반면에 한 번에 찾을 수는 없었지만 다른 문제의 도움으

로 대응을 찾은 경우가 있었다.

반면에 대응을 잘 찾지 못한 학생들이 있었고 이러한 학생들이 문제 해결에 어떤 문제점이 있는지 그 원인을 분석하여 몇 가지 시도 및 제안을 하였다. 첫 번째 시도는 문제의 지엽적인 조건에 초점을 맞추는 시각에서 전체적인 구조를 명확하게 인식할 수 있도록 지도하였다. 두 번째 시도는 학생들이 이미 구조를 알고 있는 기준 문제를 제시하여 그 문제와 일대일 대응을 줄 수 있도록 지도해 보았다. 하지만 학생들에게 각각의 배치 유형을 바로 선택 유형으로 진술을 바꾸도록 하는 것에는 한계가 있었다. 무엇보다 학생들은 문제에서 주어진 진술을 바꾸려고 하지 않는 경향이 있었다. 그러나 학생들은 진술이 비슷한 문제 사이에는 대응을 잘 찾을 수 있으므로 다양한 조합 문제들에 모두 대응될 수 있는 하나의 구심점 문제를 사용하는 지도를 생각하게 되었다. 구심점의 문제로는 공과 상자 문제를 제시하였고 공과 상자라는 문제 요소와 조합 문제의 요소 사이의 일대일 대응을 줄 수 있도록 지도하는 방법을 제안하였다.

학생들은 문제 사이의 대응을 찾는 활동을 통해 기존에 가지고 있던 조합론의 기본 개념을 강화시킬 수 있었고 또한 잘못 학습된 개념들을 수정할 수 있었다. 그리고 유사한 해결 방법을 갖고 있는 문제들 사이의 관련성을 인식할 수 있으며, 또한 새로운 문제를 해결하는데 이러한 활동이 도움이 될 수 있음을 살펴볼 수 있었다.

본 연구 외에도 앞으로는 다양한 조합 문제를 하나의 구심점 문제로 대응시키는 활동이 문제 해결에 어떤 도움을 줄 것인지에 대한 체계적인 연구가 수행되어야 할 것이다. 그리고 조합 문제의 구조적 동형을 이해하는 것이 학생들의 조합 문제 해결력의 신장에 어떤 영향을 줄 것인지에 대한 더 깊은 연구도 필요할 것이다.

참 고 문 헌

신인선 (2003). 교과 내용 분석하기: 조합의 기본 개념, 청람수학교육 12, pp.181-238.

우정호 (2000). 학교 수학의 교육적 기초, 서울대학교 출판부.

우정호 · 류희찬 · 문광호 · 송갑석 · 박선화 · 박경미 (2002). 수학 I, 서울: (주)대한교과서.

이지현 (2004). 조합 문제에 대한 학생들의 이해와 해결 전략, 서울대학교 대학원 석사학위논문.

최용준 · 신현성 (2002). 수학 I, 서울: 천재교육.

황혜정 (2001). 수학적 사고 과정 관련의 평가 요소 탐색, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> **40(2)**, pp.253-263.

Anderson, J. R. (1995). *Cognitive psychology and its implications(4th ed.)*, 이영애 역(2000). 인지심리학과 그 응용, 서울: 이화여자대학교.

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V. & Godino, J. D. (1997). Effect of the Implicit Combinatorial Model on Combinatorial Reasoning in Secondary School Pupils, *Educational Studies in Mathematics* **32**, pp.181-199.

Dubois, J. G. (1984). Une systematique des configurations combinatoires simples. *Educational Studies in Mathematics* **15(1)**, pp.37-57.

Dossey, J. A. (1991). Discrete mathematics: The math for our time, In M. J. Kenny & C. R. Hirsch (Eds.), *Discrete mathematics across the curriculum K-12* (1991 yearbook of NCTM), Reston, VA: NCTM, pp.1-9.

English, L. D. (1993). Children's strategies for solving two- and three-dimensional combinatorial problems, *Journal for Research in Mathematics Education* **24(3)**, pp.255-273.

____________ (1996). Children's construction of mathematical knowledge in solving novel isomorphic problems in concrete and written form, *Journal of Mathematical Behavior* 15, pp.81-112.

____________ (1999a). Assessing for structural understanding in childrens' combinatorial problem solving, *Focus on Learning Problems in Mathematics* **21(4)**, pp.63-83.

____________ (1999b). Reasoning by analogy: A fundamental process in children's mathematical learning. In L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning K-12* (1999 Yearbook of NCTM), Reston VA: NCTM, pp.22-36.

English, L. D. & Halford, G. S. (1995). *Mathematics education: models and processes,* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Gentner, D. (1983). Structure mapping: A theoretical framework for analogy, *Cognitive Science* **7(2)**, pp.155-170.

Goodaire, E. G. & Parmenter, M. M. (2002). *Discrete mathematics with graph theory* (2nd ed.), Upper Saddle River, NJ :Prentice Hall.

Greer, B. & Harel, G. (1998). The role of isomorphism in mathematical cognition, *Journal of mathematical behavior* **17(1)**, pp.5-24.

Hadar, N. & Hadass, R. (1981). The road to solving a combinatorial problem in strewn with pitfalls, *Educational Studies in Mathematics* **12(4)**, pp.435-443.

Hiebert, J. & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding, In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, New York: Macmillan.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics, 구광조 · 오병승 · 류희찬 역(1992). 수학 교육과정과 평가의 새로운 방향, 서울: 경문사.

Novick, L. R. (1988). Analogical transfer, problem similarity, and expertise, *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition* **14(3)**, pp.510-520.

Polya, G. (1965). *Mathematical Discovery*(vol. II), John Wiley & Sons, Inc..

______ (1957). *How to solve it(2nd ed.)*, 우정호 역(1993). 어떻게 문제를 풀 것인가? 7판, 서울: (주)천재교육.

Reed, S. K. (1987). A structure-mapping model for word problems, *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition* **13(1)**, pp.124-139.

Roa, R. (2000). *Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparacin matemtica avanzada,* Tesis Doctoral, Universidad de Granada.

Roberts, F. S. (1984). *Applied combinatorics,* New Jersey: Prentice-Hall.

Ryle, G. (1984). *The concept of mind,* 이한우 역(1994). 마음의 개념, 서울: 문예출판사.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving,* Orlando: Academic Press.

Sowder, L. (1988). Choosing operations in solving routine story problem, In R. I. Charles & E. A. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (vol. 3) pp.148-158, Reston Virginia: Lawrence Erlbaum.

Sriraman, B. & English, L. D. (2004). Combinatorial mathematics: research into practice, *Mathematics Teachers* **98(3)**, pp.182-191.

A Structural Isomorphism between Problems Counting the Number of Combinations

Ju Young Lee
Dept. of Math. Education, Seoul National University, Seoul 151-742, Korea
jju2004@snu.ac.kr

Suh-Ryung Kim
Dept. of Math. Education, Seoul National University, Seoul 151-742, Korea
srkim@snu.ac.kr

Hye Sook Park
Dept. of Math. Education, Seowon University, Chongju, Chungbuk 361-742, Korea
hyespark@seowon.ac.kr

Wan Soon Kim
Dept. of Math., Hoseo University, Asan, Chungnam 336-795, Korea
kimws@office.hoseo.ac.kr

In this paper, we confirm through surveys and interviews that it helps students in solving a problem counting the number of combinations to find a structural isomorphism between the given problem and a typical problem with the same mathematical structure. Then we suggest that a problem of distributing balls into boxes might be a good candidate for a typical problem. This approach is coherent to the viewpoint given by English(2004) that it is educationally important to see the connection and relationship between problems with different context but with similar mathematical structure.

* ZDM Classification : K24
* MSC2000 Classification : 97D70
* Key Word : combinatorics, structural isomorphism, permutation, combination