韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2006. 2. 제 45권, 제 1호, 105-121.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
February, 2006, Vol. 45, No. 1, 105-121.

중등 예비교사의 수학적 지식
- y=1, y=x, x=0, x^2 + y^2 = 1의 그래프 -

한 정 순 (한양대학교)
차 인 숙 (한양대학교 겸임교수)

I. 서 론

예비교사의 수학적 지식과 관련된 연구는 분수(서관석 · 전경순, 2000; Chinnappan, 2000; Fuller, 1996; Hutchison, 1997; Khoury & Zazkis, 1994), 함수(차인숙 · 한정순, 2004; Cha, 1999; Ebert & Risacher, 1996; Even, 1990; Even, 1993; Meel, 2003; Wilson, 1993; Wilson, 1994; Winsor, 2003), 덧셈과 뺄셈(이종욱, 2003), 나눗셈(김민경, 2003; Ball, 1990; Lubinski, Fox, & Thomason, 1998; Silver & Burkett, 1994; Simon, 1993; Tirosh, 2000; Tirosh & Graeber, 1990; Zazkis & Campbell, 1994), 기울기 개념(Stump, 1997), 0(zero)에 대한 개념(Wheeler & Feghali, 1983), 소수(Stacey, Helme, Steinle, Baturo, Irwin, & Bana, 2001), 이진법(Zaslavsky & Peled, 1996), 수 개념(Bruno, Espinel, & Martinon, 1997; Putt, 1995; Watson & Chick, 1997), 확률과 통계(Begg & Edwards, 1999; Cooper, 2002; Lane, 2002), 삼각법(Fi, 2003), 기하변환(Harper, 2002), 둘레와 면적(Baturo & Nason, 1996; Menon, 1998; Reinke, 1997), 삼각형의 높이 개념(Gutierrez & Jaime, 1999), 속도에 대한 그래프 표현(*Billings & Klanderman, 2000*), 그리고 수학적 귀납과 증명(Movshovitz-Hadar, 1993)에 대한 영역에서 이루어졌다. 예비교사의 지식을 더 향상시키기 위해서는 다양한 영역에서의 수학적 지식에 대한 실태 분석 연구가 필요하다.

수학적 지식의 이해와 의미를 학생들에게 잘 지도하기 위해서는 교사의 수학적 지식이 무엇보다 중요하다는 사실을 많은 논문에서 찾을 수 있다(김민경, 2003; 문광호 · 우정호, 1999; 박임숙, 2000; 신현용 · 이종욱, 2004; 이종욱, 2003; 정인철, 2003; Ball, 1990; Brophy, 1991; Brckreis, 2000; Carpenter, Fennema, Peterson, & Carey, 1988; Even, 1993; Fennema & Franke, 1992; Lampert, 1991; Lampert & Ball, 1998; Lehrer & Franke, 1992; Leinhardt & Smith, 1985; Lloyd & Wilson, 1998; Peterson, 1988; Shulman, 1986, 1987; Steinberg, Haymore & Marks, 1985; Thompson, 1984, 1992; Thompson, Philipp, Thompson, & Boyd, 1994; Thompson & Thompson, 1994; Tirosh, 2000). 따라서 교사의 지식을 분석하여 부족한 점을 아는 것은 중요하다. 예비교사가 어떤 지식을 어떻게 가지고 있는지를 조사하여 부족하거나 잘못된 지식과 믿음을 찾아 변화할 수 있는 기회를 제공하여야 한다. 본고는 중등 예비교사의 수학적 지식에서 y=1, y=x, x=0, x^2 + y^2 = 1의 그래프를 구성하는 과정에서 어떤 제한된 지식을 가지고 있는지를 조사하여 예비교사교육을 위한 프로그램 개발에 중요한 자료를 더하고자 한다.

식에 대한 이해와 의미 지도를 위해 그래프의 표현은 식에 대한 의미를 시각적으로 보여주는 좋은 방법이다. 학교수학에서는 주로 추상적이고 논리적인 기호조작의 대수식에 많은 시간을 할애하고 있으므로(송정화 · 권오남, 2002) 학생들은 대수 학습에서 대수 기호를 이해하고 사용하는데 많은 어려움을 경험하는 것이 사실이다(김성준, 2002a). 이러한 어려움의 원인을 김성준(2002a)은 대수 언어의 기호적 표현과 의미 사이의 관계를 정확하게 파악하지 못하고 그 의미 대신 형식적인 규칙의 학습에 집중하기 때문으로 보았고 이로 인해 기호적 표현과 의미 사이의 관계를 파악하는 데 있어서 학생들의 사

* 2005년 10월 투고, 2006년 2월 심사완료
* ZDM분류 : B59
* MSC2000분류 : 97B50
* 주제어 : 예비교사교육, 교사지식, 그래프 표현

고 과정이 유기적으로 연결되지 못한 데서 찾고 있다. NCTM(1989)에서는 학생들이 대수에서의 형식적인 학습의 기본을 형성하기 위해서는 비형식적인 방법으로 대수개념을 탐구하는 것이 필수적임을 지적하고 비형식적인 탐색을 위해 물리적 모델, 자료, 그래프의 사용을 강조하였다. 우정호(2000)는 언어적 표현이 주가 되는 대수화 · 산술화가 엄밀한 수학적 사고를 가능하게 하고 교수학적 변환이 쉽다 하더라도, 그림을 그려서 생각하는 것은 매우 중요한 수학적 사고 전략이며, 시각화 기능 없이 수학은 의미 있게 전개되기 어렵다(송정화 · 권오남, 2002, pp.167, 재인용)고 언급하고 있다.

현 교육과정은 다양한 표현체계를 이용한 개념 원리 법칙의 이해와 사고의 확장 및 사고의 유연성 개발을 강조하고 있다(NCTM 1989, 2000; 교육부, 1997). 특히, 그래프는 수학적 이해와 사고 능력을 확장 시킬 수 있는 중요한 도구이다. 그래프는 대수, 기하, 통계 등 수학의 여러 영역에서 수학적 개념 이해를 좀 더 깊고 풍부하게 강화시킨다(문광호 · 우정호, 1999; 송정화 · 권오남, 2002; 신동선 · 류희찬, 1998; 이대현 · 박배훈, 2002; 이대현 2003). 송정화 · 권오남(2002)은 수학에서는 대수식, 수치적인 값을 나타내는 표, 그래프가 주된 표현 요소인데, 이러한 표현들을 서로 연결하여 기학학적인 변형과 대수연산 사이의 연결성을 탐구함으로써 수학을 대상으로 인식하여 구조적으로 보는 관점과 수학을 절차로 인식하여 조작적으로 보는 관점을 조화롭게 발달시켜 이해를 강화시켜나가는 것이 중요함을 강조하였다. 그리고 여러 표현들 중 그래프는 수치적인 체계와 기하학적인 체계를 통합한 형태로서, 대수 통계 기하 각 영역에서 뿐 아니라, 여러 수학 영역들을 연결시킬 수 있다는 점에서 수학교육에서 큰 의의를 갖는다(송정화 · 권오남, 2002). 그러나 학교 수학에서 정적으로 제시된 그래프 표상은 학습자의 개념 형성이나 사고의 유연성 계발에 제약을 줄 수 있다. 예를 들어 2차원 좌표 평면 위에서만 대수식의 그래프를 그리는 것과 좌표축을 가로는 x축 세로는 y축으로만 그리는 습관은 사고의 확장과 유연성 계발에 제약을 줄 수 있을 것이다. 따라서 좌표축의 방향을 다양하게 변화시키고 대수식을 다양한 차원에서 생각하는 것은 사고의 확장과 유연성 계발에 도움을 줄 수 있을 것이다.

중 · 고등학교 수학에서 $y=1$, $y=x$, $x=0$, $x^2 + y^2 = 1$의 그래프 내용을 언제 어떻게 지도하고 있는지를 조사하기 위해서 현재 실행되고 있는 7차 교육과정 수학 7가부터 수학10나까지 16종의 교과서와 교사용 지도서 그리고 수학I과 수학II 12종의 교과서와 교사용 지도서 모두를 살펴보았다.

$y=1$의 그래프는 수학8가 단계의 일차함수단원에서 좌표평면에서 $y=k$의 그래프를 배우면서 공부하게 된다. $y=x$는 수학7가 단계인 함수의 그래프 단원에서 정비례 반비례 개념을 이해하고 그 관계를 식으로 나타내고 y가 x에 정비례하는 식이 $y=x$이며 이를 그래프로 표현하는 것을 배우게 된다.

$x=0$은 수학8가 단계의 일차함수단원에서 x축의 방정식은 $y=0$이고 y축의 방정식은$x=0$임을 지도하면서 배우게 되거나, 일부 교과서에서는 방정식 $y=k$와 $x=k$의 그래프 설명에서 $x=0$을 참고로 혹은 특별한 경우로 제시함으로써 배우게 된다. 12종의 수학II 교과서와 교사용지도서에서 단 한 종의 교사용 지도서에 공간좌표단원을 가르치는 지도 지침 중에 보충자료로 '공간좌표에서 yz의 평면의 방정식이 $x=0$임'을 제시하고 있다.

$x^2 + y^2 = 1$은 수학10나 원의 방정식 단원에서 배우게 된다. 원의 방정식 단원의 학습목표는 원의 방정식을 대수적 조작에 의해 구하는 것에 집중되어 있고 모든 종의 교과서 중에서 한 종의 교과서에서만 '방정식이 나타내는 원을 좌표평면 위에 그릴 수 있다'는 학습목표를 제시하고 있다.

하나의 대수식이 다양한 차원(1차원(수직선상), 2차원(좌표평면), 3차원(좌표공간))에서 어떻게 다르게 표현되는지를 학습하는 것이 식의 이해와 사고의 확장에 도움을 줄 수 있을 것이라는 믿음으로, 이 영역에 대해서 교과서에서 어떻게 다루어지고 있는지를 추가적으로 분석하였다. 교과서 분석 결과 식의 의미를 다양한 차원(dimension)에서 다루고 있지 않았다. 차원이라는 용어도 거의 모든 교과서 및 교사용 지도서에서 찾아 볼 수 없었다. 수학II 단계의 오직 한 종의 교과서에 차원에 대한 개념설명이 단원 마지막에 보충적인 읽기 자료로 다음과 같이 소개하고 있다:

차원(Dimension)
수직선 위의 점은 변수 하나를 사용하여 (x)로, 좌표평면 위의 점은 변수 둘을 사용하여 (x, y)로 , 좌표공간의 점은 변수 셋을 사용하여 (x, y, z)로 나타낸다. 이러한 뜻

에서 직선을 1차원 공간, 평면을 2차원 공간, 공간을 3차원 공간이라고도 한다. 그런데 수학에서는 4차원, 5차원, n차원 공간도 생각한다. 4차원 이상의 공간은 실제로 존재하지 않는 추상적인 공간으로 생각할 수도 있지만 물리학이나 우주론의 이론을 설명하는 데 유용하게 활용된다. 실제로 아인슈타인(Einstein, A.; 1879-1955)은 우리가 살고 있는 3차원 공간에 시간의 축이 더해진 4차원 공간으로 우주를 생각하여 '상대성 이론'을 발표하였다. 아인슈타인은 상대성 이론에서 시간, 길이, 무게 등이 절대적인 것이 아니며 속도에 따라 변한다고 주장하였다.(p.235)

학생들이 수학적 개념을 형성하고 이해하는 정도는 교사가 제시하는 표현에 의해 크게 좌우된다(문광호·우정호, 1999). 따라서 대수식의 시각적 의미를 표현하는데 있어서 2차 좌표평면에서만 다루는 것 보다 1차원 3차원 4차원 등에서 그리고 다양한 축의 방향에서 표현해 보는 활동이 학생의 개념 이해의 깊이와 사고의 확장, 사고의 유연성 개발 그리고 공간 능력 개발에 도움을 줄 수 있을 것이다. 초등학교 1학년 때부터 6학년 때 까지 지속적으로 학생들은 입체도형과 평면도형에 대한 다양한 활동을 통해 기본 공간 감각을 학습하게 된다. 또한 3차원의 모양을 2차원의 모양과 관련짓는 활동을 통해 공간 능력을 발달시킨다. 중·고등학교 과정에서 다소 간과되어 지는 공간능력 개발을 함수와 도형의 방정식을 다양한 차원에서 그래프로 표현해 보는 활동을 통해 초등학교에 이어서 지속적으로 공간 능력 개발을 도울 수 있을 것이다. 또한 그래프 표현 체계로 인해 대수의 다양한 공식에 적응함으로써 Thorpe(1989)가 제시한 대수 학습 목표의 하나인 학생들이 미래에 물리나 공학에서 필요로 하는 다양한 기술을 준비시키고 과학 문헌을 지적으로 읽어 나가는 데 도움을 줄 수 있을 것이다(김성준, 2002b, pp.29, 재인용). 이를 위해서는 이러한 영역에 대한 교사의 지식이 갖추어져 있어야 한다. 따라서 본고는 선택적으로 $y=1$, $y=x$, $x=0$, $x^2 + y^2 = 1$의 식에 대하여 중등 예비교사가 다양한 차원에서 그리고 다양한 축의 방향에서 그래프를 구성할 수 있는지에 대하여 조사하였다.

II. 연구 방법

1. 조사 대상

조사대상은 서울에 위치한 H대학교 수학교육 전공 교육대학원 석사과정 학생 25명, K대학교의 수학과 학생 중에 교직을 이수하는 학부 4학년 학생 18명과 동 대학교 교육대학원에서 수학교육을 전공하는 석사과정 학생 20명으로 총 63명의 예비교사가 참여하였다. 면담은 이들 중 2명을 선택하여 실시하였다. 면담 내용은 검사 도구에 기술한 응답 내용을 좀 더 상세히 설명하고 검사문항에 대한 내용을 중·고등학교 때 어떻게 배웠는지를 묻는 문항으로 구성되었다. 검사 도구는 선택형 문항의 검사도구와 구성형 문항의 검사 도구를 제작하여 실행하였다. 모든 대상자는 처음에 구성형 검사 도구를 실시하고 이를 수거한 후에 선택형 검사 도구를 실행하였다. 2004년도 2학기 수업 첫 주(9월 초)에 검사 도구가 실행되었으며 두 가지 검사 도구 실행 소요시간은 약 40분에서 50분 정도이었다. 면담은 두 번째 주에 개별적으로 실시되었으며 소요시간은 30분 정도 이었다.

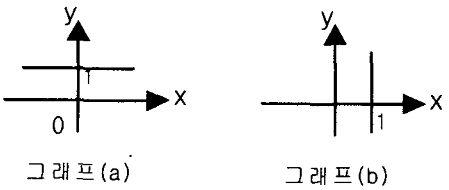
2. 검사도구

검사 도구는 구성형과 선택형으로 제작하였으며 구성형 검사 도구는 $y=1$, $y=x$, $x=0$, $x^2+y^2=1$의 식을 주고 그래프를 그리도록 하였다. 선택형 검사 도구는 6개의 보기 중에 $y=1$의 그래프에 모두 O표하고 그 이유를 설명하게 하였다(<그림 2> 참조). $y=x$ 의 그래프에 대해서는 6개의 보기를(<그림 4> 참조>), $x=0$의 그래프에 대해서는 8개의 보기(<그림 5> 참조), 그리고 $x^2+y^2=1$의 그래프에 대해서는 6개의 보기(<그림 8> 참조)를 제시하고 해당 그래프에 O표하게 한 후 그 이유를 설명하게 하였다.

III. 연구 결과

1. y=1의 그래프

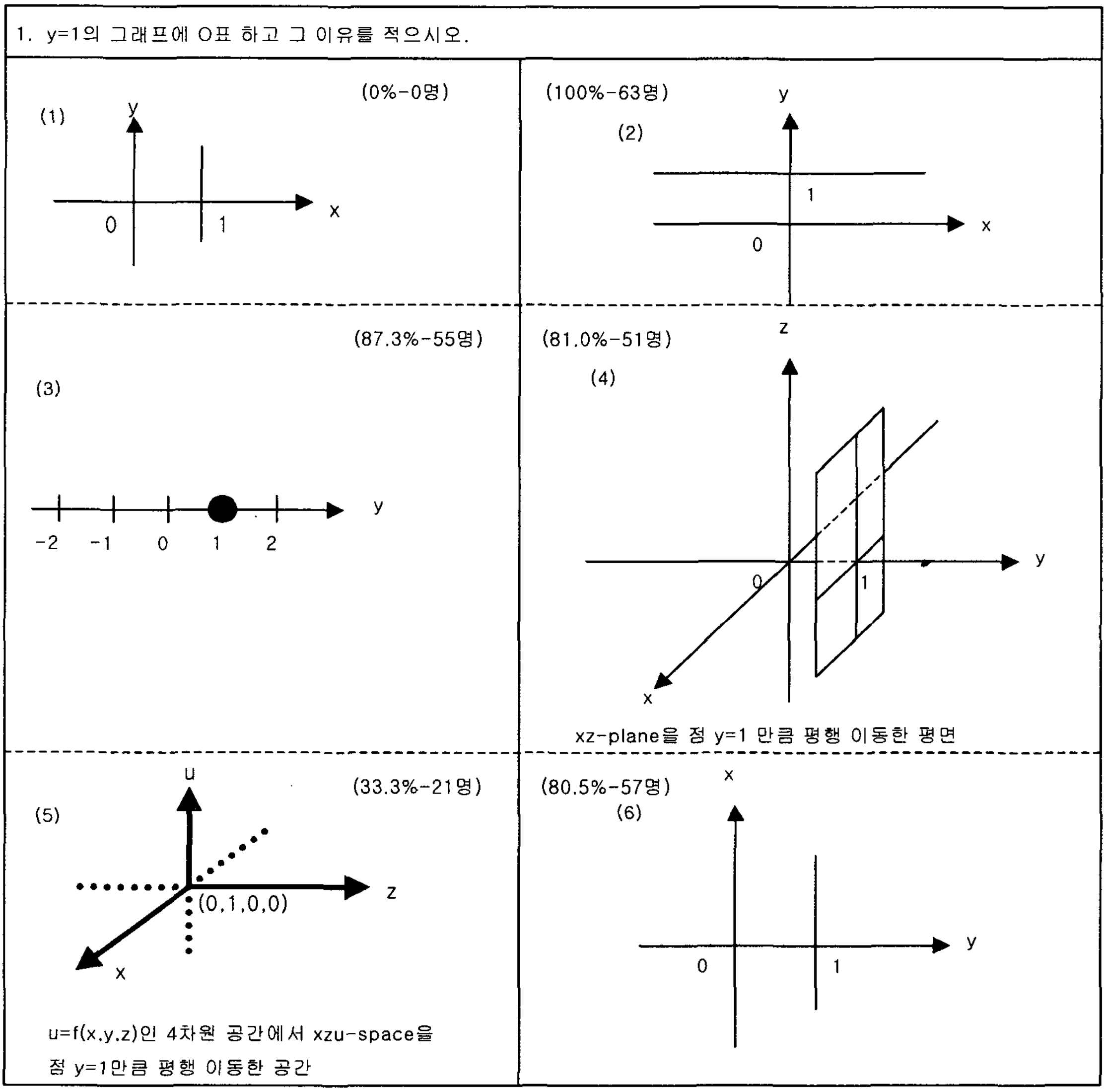
그래프 구성형 검사 도구에서 '$y=1$의 그래프를 그리시오'라는 질문에 대해 모든 예비교사는 하나의 그래프만 그려놓았다. 그들 중 62명(98.4%)의 예비교사는 <그림 1>의 그래프(a) 유형 하나만을 그렸으며 나머지 1명의 예비교사는 그래프(b) 유형 하나만을 그렸을 뿐이다.



<그림 1>

<그림 1>에서 볼 수 있듯이 모든 예비교사가 2차 좌표 평면에서만 그래프를 그렸으며 축의 방향도 가로는 x축 세로는 y축으로 일정한 모습을 보이고 있다.

선택형 검사도구의 6개의 보기 중(<그림 2> 참조)에서 y=1의 그래프는 (2), (3), (4), (5), (6)이다. 5개의 보기를 모두 선택한 예비교사 수는 18명(28.6%)뿐 이었다. 보기(2)는 모든 예비교사가 y=1의 그래프로 선택하였다.



<그림 2> y=1의 그래프 선택형 검사 도구 (응답자수)

보기(3)은 55명(87.3%)의 교사가 y=1의 그래프로 선택하였다. 선택한 이유로는 *'y축 밖에 없어서 y=1이다'*(예비교사[16], [17], [19], [21], [23]), *'수직선상에서 y=1의 그래프'*(예비교사[26]), *'y라는 직선 좌표상에서 1이라는 값을 가지므로 y=1이다'*(예비교사[32]), *'E^1 (1차원)에서 y=1인 그래프'*(예비교사[25])라는 이유가 있었다. 선택하지 않은 이유로 *'점의 좌표이므로 y=1로 나타내면 안 된다'*(예비교사[11])가 있었다. 보기(3)을 선택하지 않은 예비교사 대부분의 이유로는 y=1의 그래프를 2차원의 좌표평면에서만 나타낼 수 있다고 믿고 있거나(예비교사[19], [31], [54]), 2차원 3차원 4차원에서는 y=1의 그래프를 나타낼 수 있으나 1차원의 수직선상에서는 y=1의 그래프를 나타낼 수 없다고 믿고(예비교사[55]) 있었다.

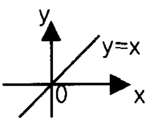
보기(4)를 y=1의 그래프로 선택한 예비교사 수는 58명(92.1%)이 있었으나 보기(5)를 y=1의 그래프로 선택한 예비교사 수는 20명(31.2%)으로 나타났다. 보기(4)를 선택한 예비교사 대부분은 구체적인 이유를 제시하지 않고 단지 '다른 모든 값의 변화와 상관없이 (혹은 미지수에 관계없이) y의 값이 항상 1이기 때문'이라고 언급하였다. 소수의 예비교사만이 다음의 조금 더 구체적인 이유를 제시할 수 있었다: *'y축을 기준으로 봤을 때 원점으로부터 +1만큼 이동되었으므로'*(예비교사[30]), *'xz-평면은 y=0(3차원에서)을 나타낸다. 그러므로 xz-평면을 원점에서 (+1)만큼 y축으로 평행 이동한 평면은 어떠한 x와 z의 값에서도 y=1을 만족하게 된다*(예비교사[25], [26], [32]).

보기(6)은 57명(90.5%)의 예비교사가 y=1의 그래프로 선택하였으나 6명의 예비교사는 y=1의 그래프로 선택하지 못하였다. 보기(6)을 선택하지 않은 예비교사들의 이유로는 '*가로가 x축 세로가 y축이라고 정의된 것에 위배되므로 y=1의 그래프로 될 수 없다*(예비교사[11], [20], [50], [57])'이었다. 선택한 이유 중에 *'2차원 좌표평면 상에서 x, y축을 일반적인 방법과는 달리 잡은 것이지만 y=1의 그래프를 의미하는 것은 맞다'*(예비교사[56])고 한 경우도 있었다. 보기(6)을 선택한 예비교사 다수의 이유로는 *'모든 x에 대해서 y는 항상 1의 값을 갖기 때문에 y=1의 그래프이다'*이었다. 다른 선택 이유로는 *'보기(2)의 그래프를 90°만큼 시계방향으로 회전시킨 그래프이므로 y=1의 그래프이다'*(예비교사[47], [59]), *'보기(1)이 x=1의 그래프인데 보기(1)의 그래프에서 x축과 y축을 바꾸었기에 y=1이 된다'*(예비교사[25], [32]), *'보기(2)의 그래프에서 변수의 위치만 바뀌었음'*(예비교사[26], [60])들이 있었다.

y=1의 그래프를 다양한 차원에서 그리고 다양한 축의 방향에서 그려낸 예비교사는 63명 중에서 한 명도 없었다. 선택형 검사 도구에 제시된 보기들 중에서 y=1의 그래프 모두를 선택할 수 있었던 예비교사는 18명(28.6%)에 불과하였다. y=1의 그래프를 선택하는데 가장 많이 나온 이유는 '다른 미지수에 관계없이 y의 값이 항상1이기 때문'으로 나타났다. 이들 중 몇 명은 이 원칙이 2차 좌표평면에서만 적용이 된다고 생각하였고, 또 다른 이들은 1차원의 수직선상에서는 이 원칙이 적용이 되지 않는다고 생각하였고, 또 다른 이들은 3차원까지만 적용이 된다고 생각하였다. 그리고 다른 이들은 2차원 평면에서 축의 방향이 가로는 항상 x축 이어야 하고 세로는 항상 y축 이어야 한다고 믿고 있었다.

2. y=x 그래프

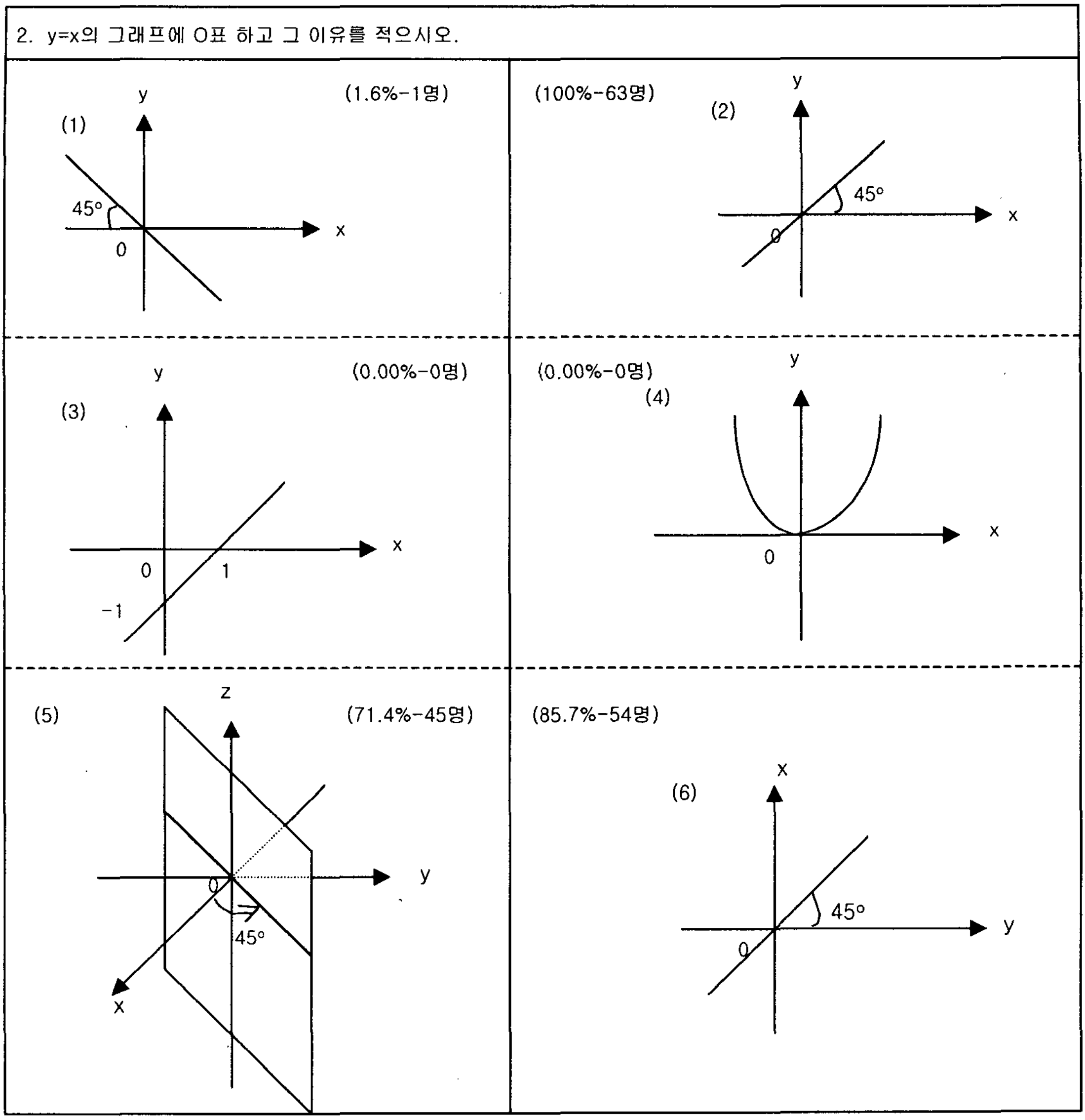
그래프 구성형 검사 도구에서 'y=x의 그래프를 그리시오'라는 질문에 대해 모든 63명(100.0%)의 예비교사는 <그림 3>에 그려진 그래프 유형 하나만을 그려놓았다.



<그림 3>

선택형 검사 도구에 제시된 6개의 보기 중(<그림 4> 참조)에서 y=x의 그래프는(2), (5), (6)이다. 3개의 보기를 모두 선택한 예비교사 수는 42명(66.7%)으로 나타났다. 보기(2)는 모든 예비교사가 y=x의 그래프로 선택하였다. 예비교사[12]는 6개의 보기 중에서 보기(1)과 보기(2)만을 y=x의 그래프로 선택하고 그 이유를 *'y=x의 그래프란 원점을 중심으로 x가 1만큼 증가할 때 y도 1만큼 증가한다고 생각한다. 그리고 시점을 어떻게 잡느냐에 따라 x축과 y축의 양의 방향이 달라질 수 있으므로 보기(1)과 (2)의 그래프라고 생각한다'*고 기술하였다.

보기(5)는 45명(71.4%)의 예비교사만이 y=x의 그래프로 선택하였다. 보기(5)를 선택한 71.4%의 예비교사 중에 예비교사[13]과 [15]는 보기(5)에서 보여지는 평면을

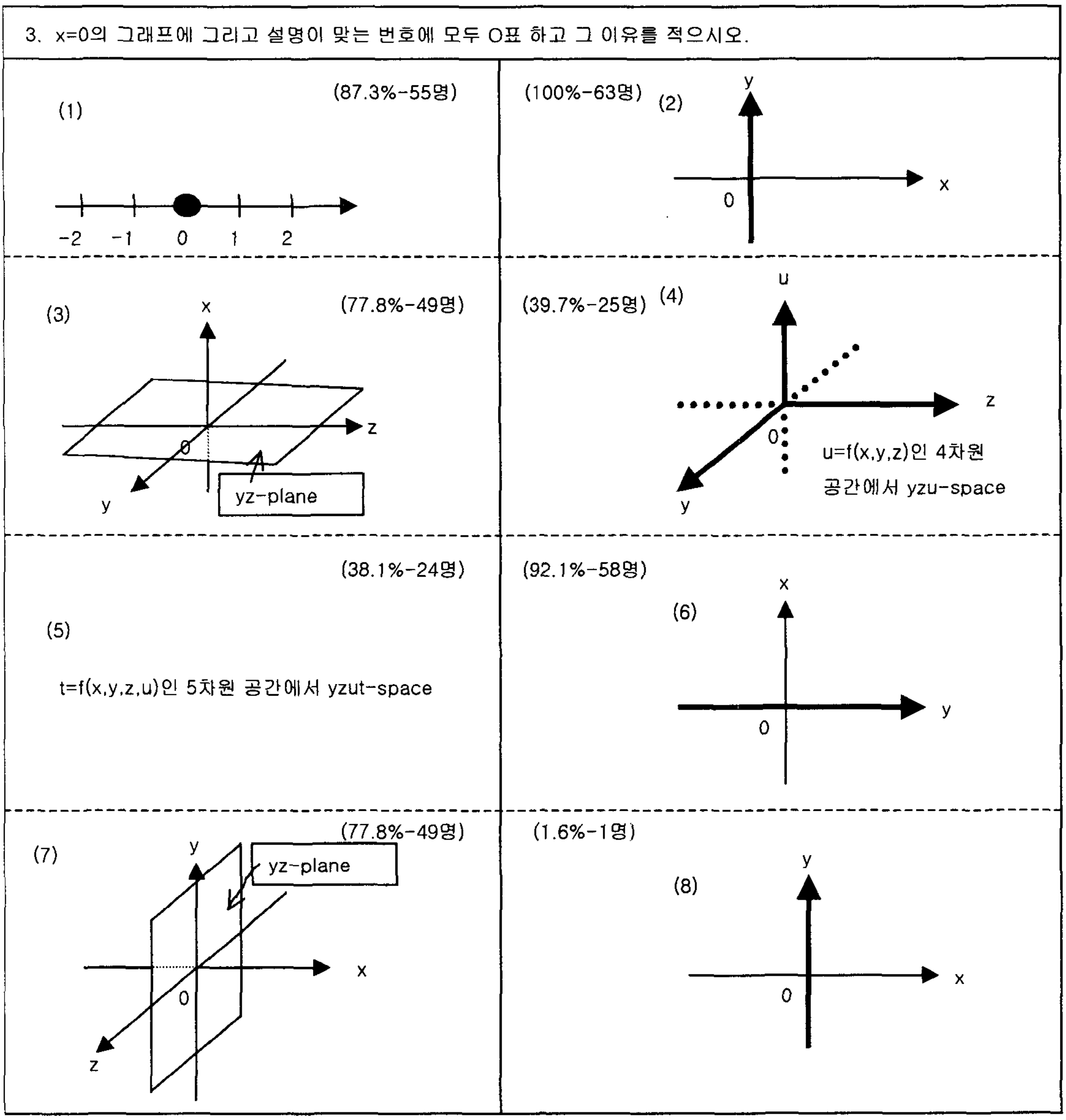


<그림 4> y=x의 그래프 선택형 검사 도구 (응답자수)

y=x의 그래프로 생각하지 못하고, '*평면 위의 직선이 원점을 지나고 기울기가 1인 직선이므로 y=x의 그래프*'로 생각하고 보기(5)를 선택하였다. 따라서 20명의 예비교사들이 3차원의 좌표 공간에서 y=x의 그래프를 찾을 수 없었다. 보기(6)을 y=x의 그래프로 선택한 예비교사 수는 54명(85.7%)이었다. y=x의 그래프로 선택하지 않은 예비교사 들의 이유는 '*x축과 y축의 방향이 틀려서*'(예비교사[11], [12], [32], [33], [57])이었다.

3. x=0의 그래프

그래프 구성형 검사 도구에서 'x=0의 그래프를 그리

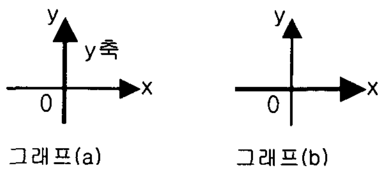


<그림 5> x=0의 그래프 선택형 검사 도구 (응답자수)

시오'라는 질문에 대해 모든 63명의 예비교사는 2차 좌표평면에서만 그리고 일정한 축의 방향에서만 그래프를 그렸을 뿐이다. 이들 중 62명(98.4%)은 그래프(a) 유형 하나만을(<그림 6> 참조) 그리고 나머지 1명의 예비교사는 그래프(b) 유형 하나만을 그렸다.

선택형 검사 도구의 8개의 보기 중(<그림 5> 참조)에서 x=0의 그래프는 (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7)이다. 7개의 보기를 모두 선택한 예비교사 수는 18명(28.6%)으로 나타났다. 55명(87.3%)의 예비교사가 보기(1)을 x=0의 그래프로 선택하였다. 그러나 보기(1)을 선택하지 않

은 예비교사 들의 이유로는 '*점의 좌표이므로 x=0의 그래프로 나타낼 수 없다*'(예비교사[11]), '*1차원에서는 그래프를 그릴 수 없다*'(예비교사[53], [55])이었다.



<그림 6>

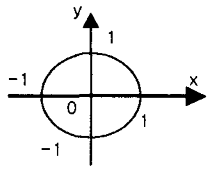
보기(2)는 모든 예비교사들이 x=0의 그래프로 선택하였다. 보기(3)은 49명(77.8%)의 예비교사가 보기(4)는 25명(39.7%)의 예비교사가 보기(5)는 24명(38.1%)의 예비교사가 보기(6)은 58명(92.1%)의 예비교사가 보기(7)은 49명(77.8%)의 예비교사가 x=0의 그래프로 선택하였다. 보기(3)과 보기(7)을 선택하지 못한 예비교사 들의 이유는 좌표축이 틀려서(예비교사[11]) 그리고 3차원 공간에까지 x=0의 그래프를 확장하지 못한(예비교사[31], [54]) 이유였다. 많은 예비교사가 보기(4)와 보기(5)를 x=0의 그래프로 선택할 수 없었는데, 선택한 예비교사들의 이유도 구체적이지 못하였다. 보기(4)와 보기(5)를 선택한 예비교사들이 제시한 이유로는 '*x를 제외한 변수의 값에 관계없이 x=0인 점들의 모임*'(예비교사[14], [18], [29], [49], [52]), 혹은 '*x축을 제외한 다른 축들의 값을 대입시켜도 x가 0을 유지하는 그래프*'(예비교사[13], [23], [30], [51])이었다. 예비교사[55]는 다음과 같이 기술 하였다: *보기(2)와 (6)은 확실!!, 보기(3),(4),(5),(7)은 기억이 가물가물! 2차원에서 x=0이라 함은 다른 변수 y에 영향을 받지 않고 늘 x=0인 것! 그렇다면 확장한 3, 4, 5차원에서 역시 다른 변수 y, z, u, t에 영향을 받지 않고 늘 x=0이므로 동일하게 x=0 그래프*

보기(3), (4), (5), 혹은 (7)을 선택한 적지 않은 예비교사들이 예비교사[55]와 같이 왜 그러한지에 대한 구체적인 이유를 제시하지 못하고 '다른 변수에 상관없이 무조건 x가 0이 되기 때문이다'라는 이유로 막연하게 3차원 4차원 혹은 5차원으로 확장하여 선택하였다.

모든 예비교사는 다양한 차원에서 그리고 다양한 축의 방향에서 x=0의 그래프를 그릴 수 없었으며 예비교사 10명 중에 2~3명의 예비교사만이 주어진 8개의 보기 중에서 x=0의 그래프를 모두 선택할 수 있었다.

4. $x^2+y^2=1$의 그래프

그래프 구성형 검사 도구에서 '$x^2+y^2=1$의 그래프를 그리시오'라는 질문에 대해 63명(100.0%)의 예비교사가 아래(<그림 7>)와 같은 유형의 그래프 하나만을 그렸다. 모든 예비교사가 2차 좌표평면에서만 그리고 일정한 축의 방향에서만 그래프를 그렸을 뿐이다.



<그림 6>

선택형 검사도구의 6개의 보기 중(<그림 8> 참조)에서 $x^2+y^2=1$의 그래프는 (3), (5), (6)이다. 3개의 보기를 모두 선택한 예비교사 수는 38명(60.3%)으로 나타났다. 보기(5)를 $x^2+y^2=1$의 그래프로 선택한 예비교사 수는 40명(63.5%)으로 나타났다. 보기(3)은 모든 예비교사가 선택하였으나 보기(6)의 경우는 56명(88.9%)의 예비교사만 선택하였다. 보기(6)을 선택하지 않은 7명의 예비교사들은 좌표축이 항상 가로는 x축이어야 하고 세로는 y축 이어야 한다고 믿고 있었다.

보기(5)를 $x^2+y^2=1$의 그래프로 선택하지 않은 예비교사[59]는 '*보기(5)는 원기둥이므로 z좌표가 포함된다. 그러므로 $x^2+y^2=1$의 그래프가 아니다*'라고 기술하였다. 다음은 보기(5)를 선택한 예비교사 들의 이유 들이다 :

'*보기(5)는 3차원 공간이지만 z값이 0 이므로 $x^2+y^2=1$ 식을 만족한다*'(*예비교사[61]*).

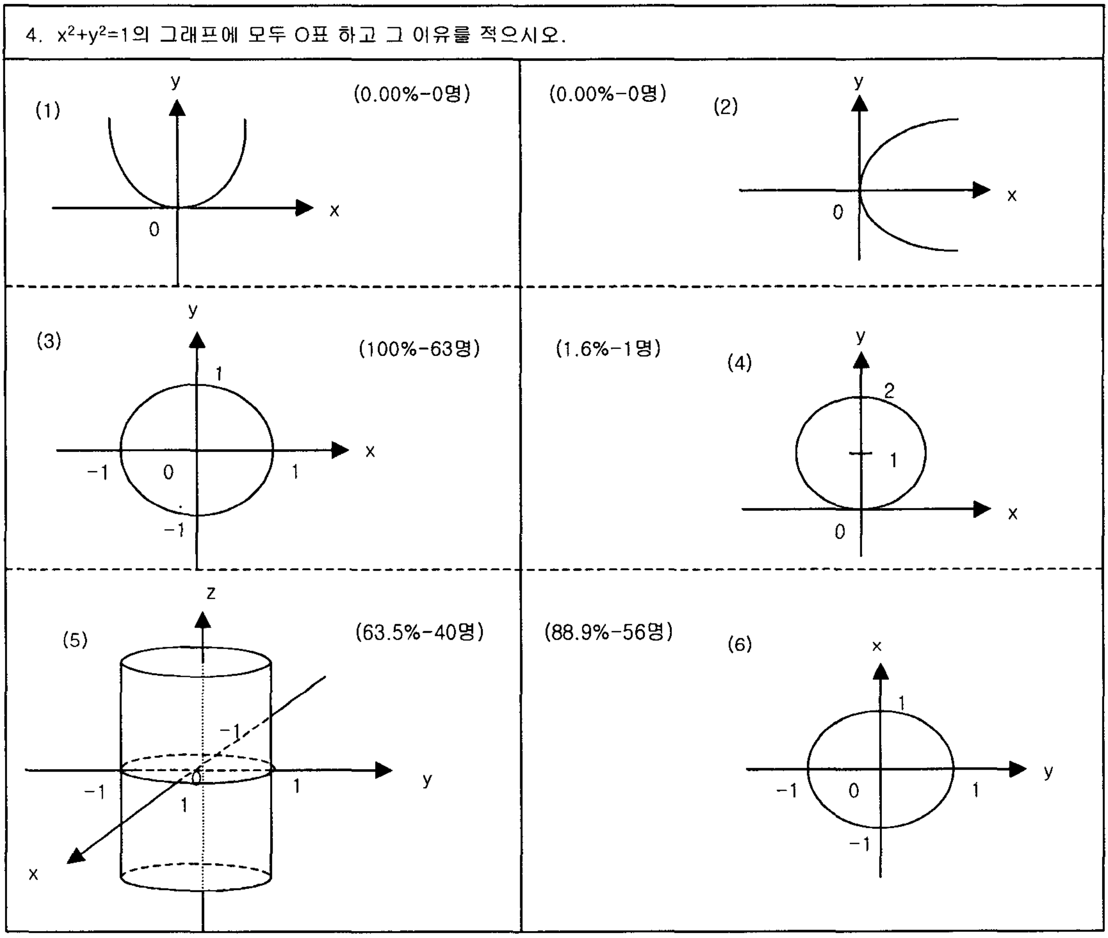
'*3차원에서는 z값에 관계없이 항상 $x^2+y^2=1$을 만족하면 되므로 보기(5)와 같은 그림이 될 수 있다*'(*예비교사[47]*).

'*보기(5)는 z축이 영향을 미치지 않는 $x^2+y^2=1$인 식이므로 $x^2+y^2=1$인 그래프에 속함*'(*예비교사[23]*).

'*E^3에서 z축이 정의되지 않은 $x^2+y^2=1$의 그래프는 원기둥과 같다*'(*예비교사[25]*).

'*3차원에서 $x^2+y^2=1$의 그래프는 xy평면에서 $x^2+y^2=1$의 그래프를 z축으로 연장하므로 원기둥이 나온다*'(*예비교사[26]*).

'*z축을 따라 수많은 원이 모여 생긴 원통의 모양이므로 xy축 만으로 봤을 때 $x^2+y^2=1$을 만족한다고 볼 수 있*



<그림 8> $x^2+y^2=1$의 그래프 선택형 검사 도구 (응답자수)

다'(예비교사[30]).

'모든 z값에 대응되는 $x^2+y^2=1$을 만족'(예비교사[32]).

'R^3공간에서 z의 값이 어떤지를 모르므로 모든 z값에 대해 원을 그리면 되지 않을까 생각했다'(예비교사[51]).

'f(x, y, z)에서 임의의 z값에 상관없이 x, y가 주어진 식을 만족하므로'(예비교사[55]).

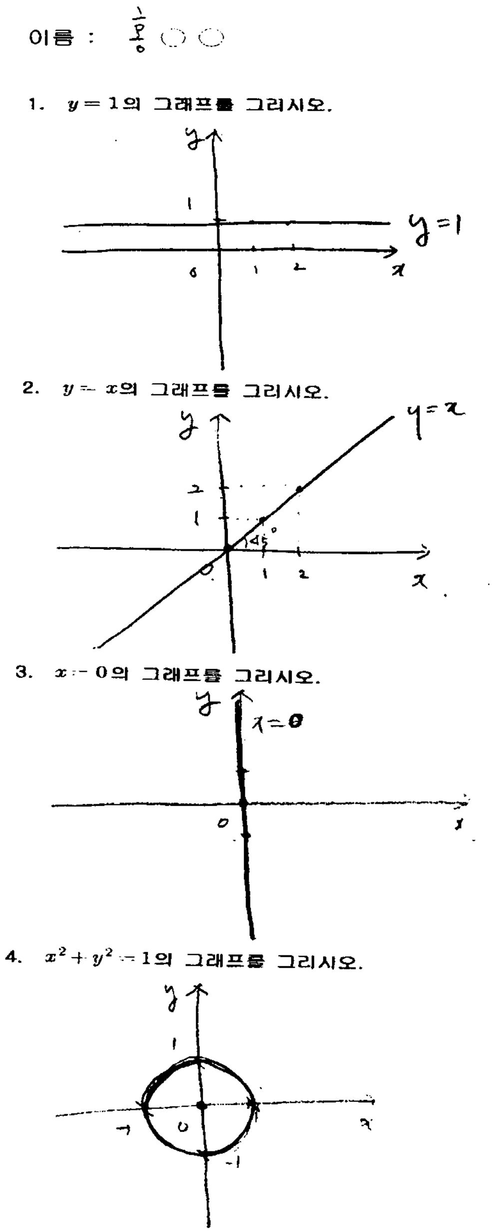
'$x^2+y^2=1$의 그래프는 평면좌표에서는 원점으로부터 떨어진 거리가 1인 점들의 집합(원)이므로 보기(3)과 (6)의 그래프와 같이 나타나고, 공간좌표에서는 그런 원들의 집합이므로 보기(5) 그래프와 같이 원기둥 모양으로 나타난다(단, z축 양끝으로 끝없이 이어진다고 가정할 때)'(예비교사[62]).

5. 홍OO의 사례

(1)구성형 검사 도구에 대한 응답

다음은 예비교사 홍OO의 구성형 검사 도구 응답지이다(<그림 9> 참조). 홍OO도 다른 모든 예비교사들과 마찬가지로 2차 좌표평면에서만 그리고 일정한 축의 방향에서만(가로는 x축 세로는 y축) 그래프를 그려놓았다. 다음의 면담 내용은 홍OO이 각각의 식에 대한 그래프를 그리는 과정을 설명한 내용이다.

y=1의 그래프에 대해서,



<그림 9> 홍OO의 구성형 검사 도구 응답지

y는1의 그래프를 그릴 때 x값에 관계없이 y는 항상 1이라는 점을 지나니까 x가 0일 때에도 y는 1이고 x가 1일 때에도 y는 1이고 x가 2일 때에도 y는 항상 1이니까 이점들을 다 연결하면 x축에 평행인 y는 1이라는 점들을 지나는 직선의 그래프 모습이 되겠고

y=x의 그래프에 대해서,

y=x의 그래프를 그릴 때에도 마찬가지로 x는 0, 1, 2 각각의 점들을 대입해 보면 x가 0일 때 y는 0, x가 1일 때 y는 1, x가 2일 때 y는 2인 점들을 지나니까 이 점들을 연결해 주면 x축과 45도의 각을 이루는 원점을 지나는 직선의 모습이 그래프로 그려지게 되고

x=0의 그래프에 대해서,

세 번째 x=0의 그래프를 그릴 때에도 마찬가지로 y값에 관계없이 x는 항상 0이라는 점을 지난다는 얘기니까 y가 1일 때에도 x는 0이고 y가 0일 때에도 x는 0이고 y가 -1일 때에도 x는 0이라는 점을 지나는데 이 점들을 다 연결해 주면 y축과 일치하는 직선의 모습이 그래프로 그려지게 되고

$x^2+y^2=1$의 그래프에 대해서,

네 번째 $x^2+y^2=1$은 중심이 (0,0)이고 반지름이 1인 원의 방정식이므로 좌표축에서 중심을 체크해주고 다음에 x축과 y축에 각각 반지름의 길이가 1이므로 (1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)인 점을 찍어주고 컴퍼스가 없어서 정확히 그릴 수는 없지만 축에 찍어준 점들을 원점에서 거리가 1인 점들의 집합으로 그림을 그려주게 되면 원의 그래프가 그려지게 됩니다.

홍OO의 설명에서 볼 수 있듯이 다른 차원에서 그래프를 그리려고 하는 의도가 전혀 나타나 있지 않으며 축의 방향을 바꿔 표현해 보려는 의도도 전혀 나타나 있지 않음을 볼 수 있다. 변수가 하나인 방정식 (y=1, x=0)에서는 일차원, 이차원, 삼차원에서 그래프를 그릴 수 있으며, 변수가 두개인 방정식(y=x, $x^2+y^2=1$)인 경우에는 이차원, 삼차원에서 그래프를 그릴 수 있다. 그러나 홍OO은 주어진 방정식에 변수가 한개(y=1, x=0)이거나 두개(y=x, $x^2+y^2=1$)인 어떤 경우에도 항상 이차원 평면상에서만 그래프를 그리려고 시도하였다는 것을 알 수 있었다.

(2)선택형 검사 도구에 대한 응답

홍OO은 선택형 검사 도구 1번 문항에서 y=1의 그래프로 보기(2), (4), (6)을 선택하였다. y=1의 그래프로 보기(3)번과 보기(5)번을 선택하지 못하였다. 다음은 홍OO이 풀이과정을 설명한 내용이다.

y=1은 x축에 평행한 직선이니까(약 20초가량 말없이 혼자 생각함), 보기(4)번은 다른 축의 값에 상관없이 y는 항상 1이면 되니까 (4)번도 되고, (약 30초가량 혼자 중얼거림), 보기(5)번은 4차원 공간, 어떻게 생각하지 (약 15초간 생각함) 우선, y=1의 그래프로 (2)번 (4)번 (6)번이라고 생각하는데, (2)번 (4)번 (6)번을 y=1의 그래프라고 생각하는 이유는 다 동일하게 다른 좌표축의 값과는 상관없이 y=1이라는 일정한 값을 지나는 그래프이기 때문에 선택을 했는데, 보기(5)번은 4차원 공간이라는 의미를 잘 생각을 못해서 (5)번 부분은 잘 모르겠고, 보기(3)번은 1차원 얘기인 것 같은데, 점도 그래프에 해당 하는 건가요?[홍OO의 질문에 응답하지 않았음] (3)번은 그냥 이 좌표에 해당하는 점만 찍은 거라서 그래프에 해당하는 건지 그 부분을 잘 모르겠는데요. (1)번은 명백히 아닌 걸로 보기(1)은 x=1이라는 그래프이고 보기(2)번 (4)번 (6)번은 얘기했듯이 다른 축의 값과는 상관없이 y=1이라는 일정한 값을 지나니까 확실하게 이것은 맞는 것 같아요.

y=x의 그래프에 대해서 홍OO은 보기(2)(5)(6) 모두를 선택하였다. 다음의 내용은 홍OO이 풀이과정을 설명한 것이다.

(1)번 그래프는 (약 20초간 생각함) y=−x그래프 이니까 아니고, (2)번은 x값에 대해서 y값도 똑같이 나오는 그래프 이므로 (2)번 맞고, (3)번은 y=x그래프가 y축 방향으로 (-1)만큼 평행이동 한 것으로 볼 수도 있지만 x축 방향으로 1만큼 평행이동 한 것으로 볼 수도 있고 정확히 y=x그래프는 아니고, (4)번 그래프는 $y=ax^2$ 그래프 이차 그래프 이어서 (4)번도 아니고, (5)번 그래프는 3차원에서 z값에 관계없이 y=x와 같은 값을 갖는다는 의미로 표현을 해보면 되니까 (5)번 그래프는 z값에 관계없이 y=x와 같은 값을 가지는 점들의 집합이니까 (5)번도 맞고, (6)번은 (이렇게 봐야 하나 하면서 검사 도구지를 90°돌려서 보는 행위를 함) x, y축이 바뀌긴 했지만 그 이루는 각이 똑같이 x축 y축 둘 다 45도 각이 같으니까 이것도 y=x 그래프로 볼 수 있다고 생각해요.

x=0의 그래프에 대해서 홍OO은 보기(1)(2)(3)(6)(7)을 선택하였다. 보기(4)와 보기(5)는 x=0의 그래프로 선택하지 못하였다. 다음의 내용은 홍OO이 풀이과정을 설명한 것이다.

(1)번은 1차원에서 x=0이라는 좌표 점이 찍혔는데 (10초가량 생각함) 이점도 그래프로 생각한다면 x=0인 그래프로 보는 게 맞는 것 같아요. x=0이라는 값을 가지고 있으니까, (2)번은 2차원에서 우리가 흔히 생각하는 모습으로 y축과 일치하는 x가 항상 0값을 가지니까 (2)번도 맞고, (3)번은 3차원에서 (약 30초간 그래프를 보고 있음) yz축의 값에 관계없이 x는 0이라는 일정한 값을 지나는 점들의 모임이니까 (3)번도 맞고, (4)번은 4차원 공간에서 y, z, u (약 20초가량 생각함), 이 뒤에 점선으로 나온 것은 실선의 연장인가요?(홍OO의 질문에 실선의 연장으로 마이너스 방향이라고 대답하였음)(홍OO은 약 20초가량 다시 생각함), x가 0이니까(약 15초간 다시 생각함) (4)번은 잘 모르겠고, 3차원까지는 알겠는데 4차원 5차원은 잘 모르겠어요. (4)번의 그래프와 3차원과의 차이점이 어떤 건지 잘 모르겠어요. 다음에 (6)번은 흔히 보는 좌표축에서 x, y축의 위치가 서로 바뀌어 있긴 하지만 y값에 관계없이 x=0이라는 일정한 점들을 지나기 때문에 (6)번도 x=0의 그래프에 해당하고, (7)번은 축의 위치가 바뀌어도 (3)번과 마찬가지로 x=0이라는 일정한 값을 갖고, x=0의 그래프에 해당하고, (8)번은 x=0의 그래프가 아니라 x값은 계속 바뀌고 있는데 반해서 y=0이라는 일정한 값을 지나고 있으니까 y=0의 그래프에 해당해요. (4)번 (5)번은 잘 모르겠어요.

$x^2+y^2=1$의 그래프에 대해서 홍OO은 보기(3)(5)(6) 모두를 선택할 수 있었다. 다음의 내용은 홍OO이 풀이과정을 설명한 것이다.

(1)번은 $y=ax^2$ 이차함수 그래프인데 y는 1차이고 x는 2차이니까 $x^2+y^2=1$의 그래프와 겹쳐질 수가 없고, (2)번 또한 마찬가지로 $x=ay^2$ 그래프이므로 우선 x와 y둘 다 이차가 되어야 되는데 x가 1차이니까 (2)번도 아니고, 그 다음에 (3)번은 이차원에서 중심의 좌표가 (0,0)이고 반지름이 1인 중심에서 거리가 1인 점들의 집합이므로 (3)번은 맞고 (4)번은 반지름은 1이 맞긴 하지만 중심이 (0,1)이니까 $x^2+y^2=1$의 그래프를 y축으로 1만큼 평행이동한 그래프이고, (5)번은 $x^2+y^2=1$이라는 값이 성립하면 되니까 3차원에서 z축의 값과는 관계없이 z은 어떤 값을 갖던지 간에 $x^2+y^2=1$이 성립하므로 (5)번은 맞고, (6)번은 x, y축의 위치가 바뀌긴 했지만 타원이면 모르겠지만 원에서는 축의 위치가 바뀌어도 중심이 원점에 있다면은

그래프가 똑같이 일치하니까 (5)번도 $x^2+y^2=1$의 그래프예요.

홍OO은 구성형 검사 도구에서 2차 좌표평면에서만 그리고 일정한 축의 방향에서만(가로는 x축 세로는 y축) 그래프를 그린 사실과 선택형 검사 도구에서 1차원과 4차원 그리고 5차원에서 식의 그래프를 선택하지 못한 이유로 과거 수학 학습 경험을 주요 원인으로 언급하고 있다.

다음은 구성형 검사 도구와 선택형 검사 도구에 대한 응답의 차이와 과거 수학 학습 경험에 대한 면담 내용이다.

차 : 선택형 검사 도구에서는 여러 개(several)를 선택할 수 있었는데, 구성형 검사 도구에서는 각각의 식에 대해서 하나의 그래프만을 그렸습니다. 그 이유가 뭐라고 생각하십니까?

홍 : 우선 다 하나씩만 그린 이유가, 고등학교까지 배운 내용이 이차평면에 x축이 가로고 y축이 세로인 그래프를 가장 기본적으로 계속 다루고 있었기 때문에 그 부분만 먼저 생각이 나서 이렇게 그렸거든요. 만약에 여기서 'y=1의 그래프를 여러 가지 그리시오'라고 질문 했다면 조금 더 생각을 해서 아마 3차원의 일반적인 그래프는 그렸을 것 같아요... '여러 가지 그리시오'라고 질문 했어도 축의 위치를 바꾼다거나 이런 생각은 하지 못했을 것 같아요.

차 : 그러면 y=1의 그래프 보기 중에서 (3)을 선택하지 못했는데 그 이유는 뭐라고 생각하세요?

홍 : 수직선상에서 좌표를 찍거나 하는 기억은 나는데 그것을 그래프라고 표현 했던 거는 지금은 생소한 것 같아요. 그런데 제 생각에는 축의 이름이 y축이니까 y=1이 되니까 y=1의 그래프인 것 같은데 약간 애매한 것 같은데요. 만약 점도 그래프에 해당이 된다면 이것도 y=1의 그래프에 해당이 된다고 봐요.

차 : 다른 동료 예비교사 들도 구성형 검사 도구의 각각의 식에 대해서 2차원 평면상에서만 그리고 일정한 좌표축의 방향에서만 그래프를 그렸는데 이것에 대해서 어떻게 생각하세요?

홍 : 보통 교과서에서 배울 때 중심적으로 다루는 내용이, 3차원에 대해서는 이과생만 따로 살짝 배우는 부분이 되고 1차원에 대해서는 어떻게 보면 2차원을 얘기하기 위해서 간단히 짚고 넘어가는 식으로 그렇게 배웠던 것 같아요. 점과 좌표의 거리를 구하는 것도 또한 그랬고 이차원에서만 계속 거기에서만 숙달되어 있다 보니까 1차원 개념에서 2차원개념이 나왔는데도 1차원 개념이 나오면 거기서 또다시 모르게 되고 2차원 중심으로 계속해 왔던 게 원인이 됐던 것 같아요. 주로 다루었던 게 2차원이기 때문에 식이 나와도 이것을 1차원 2차원 3차원의 그래프로 연결해서 배우지 않았고 단지 계산해서 푸는 게 우선이 된 것 같아요.

IV. 결 론

본고는 중등 예비교사가 y=1, y=x, x=0, $x^2 + y^2 = 1$의 그래프를 구성하는 과정에서 어떤 제한된 지식을 가지고 있는지를 조사하여 예비교사교육을 위한 프로그램 개발에 중요한 자료를 더하고자 하였다. 특히 y=1, y=x, x=0, $x^2 + y^2 = 1$의 식에 대하여 중등 예비교사가 다양한 차원에서 그리고 다양한 축의 방향에서 그래프를 그릴 수 있는지를 조사하였다. 현 교육과정은 수학교육을 통해 사고의 확장과 사고의 유연성을 새로이 강조하고 있다(교육부, 1997). 수학교수학습에서 그래프의 사용은 다음과 같은 많은 장점을 갖고 있다 : (1)수학의 여러 영역에서 수학적 개념 이해를 좀 더 깊고 풍부하게 강화시키며(문광호·우정호, 1999; 송정화·권오남, 2002; 신동선·류희찬, 1998; 이대현·박배훈, 2002; 이대현 2003), (2)대수식과 그래프를 서로 연결하여 기학학적인 변형과 대수 연산 사이의 연결성을 탐구함으로써 수학을 대상으로 인식하여 구조적으로 보는 관점과 수학을 절차로 인식하여 조작적으로 보는 관점을 조화롭게 발달시켜 이해를 강화시켜 나갈 수 있으며(송정화·권오남, 2002), (3)여러 수학 영역들을 연결시킬 수 있으며(송정화·권오남, 2002), (4)그래프 표현 체계로 인해 대수의 다양한 공식에 적응함으로써 미래에 물리나 공학에서 필요로 하는 다양한 기술을 준비시키고 과학 문헌을 지적으로 읽어 나가는 데 도움을 줄 수 있으며(Thorpe, 1989), 그리

고 (5)추상적이고 형식적인 기호조작의 대수식에 많은 시간을 할애 하는 중·고등학교 과정에서 식에 대한 의미를 시각적으로 보여' 줄 수 있다. 그러나 이러한 장점도 2차원 좌표 평면 위에서만, 그리고 일정한 모양의 좌표축에서만 그래프를 표현할 경우 학습자의 이해와 사고의 확장 및 유연성 계발에 제약을 줄 수 있음을 강조하면서 다양한 차원에서 다양한 좌표축의 방향에서 식의 그래프를 표현하는 활동이 학교수학에서 다루어져야 함을 주장하는 바이다.

본고는 현 교육과정 교과서와 교사용 지도서 모두를 분석하고 예비교사의 지식을 조사한 결과 다음의 사실을 알 수 있었다. 첫째, 교과서와 교사용 지도서는 식의 시각적 의미를 다양한 차원에서 다양한 축의 방향에서 다루고 있지 않다. 둘째, 모든 예비교사는 다양한 차원에서 다양한 축의 방향에서 y=1, y=x, x=0, $x^2 + y^2 = 1$의 그래프를 그리지 못하고 가로가 x축 세로가 y축인 2차원 평면으로 제한되어 있었다. x=0그래프와 $x^2 + y^2 = 1$의 그래프에 대해서 예를 들면 x=0에서는 식의 y변수가 없음에도 불구하고 y의 변수를 생각하여 2차원 평면에 그래프를 그리는 반면 x변수만 있는 1차원에서의 그래프는 생각하지 못하는가 하면, $x^2 + y^2 = 1$의 그래프를 그리는데 있어서 2차원 평면상에 그래프는 그리고 있으나 z변수를 생각하여 3차원 공간상의 그래프는 그리지 못하고 있는 것을 알 수 있다. 이것은 학생들이 주어진 방정식에 대한 그래프를 그리는데 있어서 항상 2차원 평면으로 한정되어 있다는 것을 보여주는 단면이다. 셋째, '*수직선상의 점의 좌표는 식의 그래프로 표현 될 수 없다*', '*좌표축은 항상 가로가 x축 세로가 y축이어야한다*'는 제한된 지식을 보여 주고 있었다.

따라서 학습자의 사고의 확장 및 유연성 그리고 창의성 및 공간 능력 개발을 위해 중등예비교사 교육프로그램에서 식의 의미를 그래프로 표현하는 활동과 그래프 표현 시 다양한 차원에서 그리고 다양한 축의 방향에서 그려보는 활동이 포함되어야 한다.

참 고 문 헌

교육부 (1997). 제7차 수학과 교육과정, 서울: 대한교과서 주식회사.

김민경 (2003). 나눗셈 개념에 대한 초등예비교사의 이해도 분석, 학교수학 5(2), 223-240, 대한수학교육학회.

김성준 (2002a). 대수적 사고와 대수 기호에 관한 고찰, 대한수학교육학회 수학교육학연구 12(2), 229-245.

김성준 (2002b). 학교 대수 도입과 관련된 논의, 대한수학교육학회 학교수학 4(1), pp.29-47.

문광호 · 우정호 (1999). 중고등학교 수학의 시각화, 대한수학교육학회 학교수학 1(1), pp.135-156.

박임숙 (2000). 교사의 무한개념 이해도 조사 연구, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> 39(1), pp.37-47.

서관석 · 전경순 (2000). 예비 초등 교사들의 분수 연산에 관한 내용적 지식과 교수학적 지식수준에 대한 연구: 교사교육적 관점, 대한수학교육학회 수학교육학연구 10(1), pp.103-113.

송정화 · 권오남 (2002). 6차와 7차 교과서 분석을 통한 그래프 지도 방안, 대한수학교육학회 학교수학 4(2), pp.161-191,

신동선 · 류희찬 (1998). 수학교육과 컴퓨터, 서울: 경문사.

신현용 · 이종욱 (2004). 수학교사의 지식과 수업 실제와의 관계, 한국수학교육학회 시리즈 A 수학교육 43(3), pp.257-273.

우정호 (2000). 수학 학습 지도 원리와 방법, 서울대학교 출판부.

이대현 (2003). 수학교육에서 시각적 표현에 관한 소고, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> 42(5). pp..637-646.

이대현 · 박배훈 (2002). 수학교육에서 시각화와 직관, 대한수학교육학회 수학교육학연구 12(1), pp.71-79.

이종욱 (2003). 예비초등교사의 덧셈과 뺄셈에 관한 교수학적 지식, 대한수학교육학회 수학교육학연구 13(4), pp.447-462.

정인철 (2003). 수학 교육에서 이해의 의미와 구조에 대한 고찰, 수한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육 42(1), pp.11-1.

차인숙 · 한정순 (2004). 중등 예비교사의 함수 관계 상황 표현 능력에 대한 조사 연구, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> 43(2), pp.199-210.

Ball, D. (1990). Prospective Elementary and

Secondary Teachers' Understanding of Division. *Journal for Research in Mathematics Education* **21(2)**, pp.132-144.

Baturo, A., & Nason, R. (1996). Student Teachers' Subject Matter Knowledge within the Domain of Area Measurement. *Educational Studies in Mathematics* **31(3)**, pp.235-268.

Begg, A., & Edwards, R. (1999). Teachers' Ideas about Teaching Statistics. *Paper presented at the combined annual meeting at the Australian Association for Research in Education and the New Zealand Association for Research in Education,* Melbourne, Australia.

Billings, E., & Klanderman, D. 2000). Graphical Representations of Speed: Obstacles Preservice K-8 Teachers Experience. *School Science and Mathematics* **100(8)**, pp.440-450.

Brophy, J. (1991). Conclusion to Advances in Research on Teaching, Vol. 2: Teachers' Knowledge of Subject Matter as It Relates to Their Teaching Practice. In J. E. Brophy(Ed.), *Advances in Research on Teaching: Teachers' Subject Matter Knowledge and Classroom Instruction* (Vol. 2, pp.347-362). New York: Macmillan.

Bruno, A., Espiner, M., & Martinon, A. (1997). Prospective Teachers Solve Additive Problems with Negative Numbers. *Focus on Learning Problems in Mathematics* **19(4)**, pp.36-55.

Buckreis, W. (2000). *Elementary Mathematics Teachers Subject Matter Knowledge and Its Relationship to Teaching and Learning*, Doctoral Dissertation, Oregon State University.

Cha, I. (1999). *Prospective Secondary Mathematics Teachers' Conceptions of Function: Mathematical and Pedagogical Understandings.* Doctoral Dissertation, University of Michigan.

Carpenter, T., Fennema, E., Peterson, P., & Carey, D. (1988). Teachers' Pedagogical Content Knowledge of Students' Problem Solving in Elementary Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education* **19(5)**, pp.385-401.

Chinnappan, M. (2000). Preservice Teachers' Understanding and Representation of Fractions in a Java Bars Environment, *Mathematics Education Research Journal* **12(3)**, pp.234-253.

Cooper, L. (2002). *An Assessment of Prospective Secondary Mathematics Teachers' Preparedness to Teach Statistics.* Doctoral Dissertation, University of Maryland College Park.

Ebert, C., & Risacher, B. (1996). Alternative Pathways to Teaching: an Investigation of the Factors that Influence the Acquisition of Pedagogical Content Knowledge for Traditional and Non-Traditional Teachers. *Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association,* New York, NY.

Even, R.(1990). Subject Matter Knowledge for Teaching and the Case of Functions. *Educational Studies in Mathematics* **21(6)**, pp.521-544.

Even, R.(1993). Subject Matter Knowledge and Pedagogical Content Knowledge: Prospective Secondary Teachers and the Function Concept. *Journal for Research in Mathematics Education* **24(2)**, pp.94-116.

Fennema, E. & Franke, M. (1992). Teachers' Knowledge and Its Impact. In D. A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*(pp.147-164), New York: Macmillan.

Fi, C. (2003). *Preservice Secondary School Mathematics Teachers' Knowledge of Trigonometry: Subject Matter Content Knowledge, Pedagogical Content Knowledge and Envisioned Pedagogy.* Doctoral Dissertation, University of Iowa.

Fuller, R. (1996). Elementary Teachers' Pedagogical Content Knowledge of Mathematics. *Paper presented the Mid-Western Educational Research Association Conference*, Chicago, IL.

Gutierrez, A., & Jaime, A. (1999). Preservice Primary

Teachers' Understanding of the Concept of Altitude of a Triangle. *Journal of Mathematics Teachers Education* **2(3)**, pp.253-275.

Harper, S. (2002). *Enhancing Elementary Pre-service Teachers' Knowledge of Geometric Transformations.* Doctoral Dissertation, University of Virginia.

Hutchison, L. (1997). *Learning for Teaching: a Case of Constructing the Bridge between Subject Matter Knowledge and Pedagogical Content Knowledge,* ERIC#: ED413332.

Khoury, H., & Zazkis, R. (1994). On Fraction and Non-Standard Representations: Preservice Teachers' Concepts, *Educational Studies in Mathematics* **27**, pp.191-204.

Lampert, M. (1991). Connecting Mathematical Teaching and Learning. In E. Fennema, T. P. Carpenter, & S. J. Lamon (Eds.), *Integrating research on teaching and learning mathematics* (pp. 121-152). Albany, NY : SUNY Press.

Lampert, M. & Ball, D. (1998). *Teaching, Multimedia and Mathematics: Investigations of Real Practice,* NY: Teachers College Press.

Lane, F.(2002). *An Investigation of Preservice Secondary Mathematics Teachers' Conceptions of Probability and Statistics.* Doctoral Dissertation, University of Virginia.

Lehrer, R., & Franke, M. L. (1992). Applying Personal Consruct Psychology to the S서요 of Teachers' Knowledge of Fractions. *Journal for Research in Mathematics Education* **23(3)**, pp.223-241.

Leinhardt, G. & Smith, D. (1985). Expertise in Mathematics Instruction: Subject Matter Knowledge, *Journal of Educational Psychology* **77(3)**, pp.247-271.

Lloyd, G. & Wilson, M. (1998). Supporting Innovation: the Impact of a Teacher's Conceptions of Functions on His Implementation of a Reform Curriculum, *Journal for Research in Mathematics Education* **29**, pp.248-274.

Lubinski, C., Fox, T., & Thomason, R. (1998). Learning to Make Sense of Division of Fractions: One K-8 Preservice Teacher's Perspective. *School Science and Mathematics* **98(5)**, 247-253.

Meel, D. (2003). *Prospective Teachers' Understandings: Function and Composite Function,* ERIC#: ED473651.

Menon, R. 1998). Preservice Teachers' Understanding of Perimeter and Area. *School Science and Mathematics* **98(7)**, pp.361-368.

Movshovitz-Hadar, N. (1993). The False Coin Problem, Mathematical Induction and Knowledge Fragility. *Journal of Mathematical Behavior* **12(3)**, pp.253-268.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics,* Reston, VA.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics,* Reston, VA.

Peterson, P. (1988). Teachers' and Students' Cognitional Knowledge for Classroom Teaching and Learning. *Educational Researcher* **17(5)**, pp.5-14.

Putt, I. (1995). Preservice Teachers Ordering of Decimal Numbers: When More is Smaller and Less is Larger! *Focus on Learning problems in Mathematics* **17(3)**, pp.1-15.

Reinke, K. 1997). Area and Perimeter: Preservice Teachers' Confusion. *School Science and Mathematics* **97(2)**, pp.75-77.

Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching, *Educational Researcher* **15(2)**, pp.4-14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform, *Harvard Educational Review* **57(1)**, pp.1-22.

Silver, E., & Burkett, M. (1994). The Posing of Division Problems by Preservice Elementary School Teachers: Conceptual Knowledge and Contextual Connections. *Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research*

Association, New Orleans, LA.

Simon, M.(1993). Prospective Elementary Teachers' Knowledge of Division. *Journal for Research in Mathematics Education* **24(3)**, pp.233-254.

Stacey, K., Helme, S., Steinle, V., Baturo, A., Irwin, K., & Bana, J. (2001). Preservice Teachers' Knowledge of Difficulties in Decimal Numeration. *Journal of Mathematics Teacher Education* **4(3)**, pp.205-225.

Steinberg, R., Haymore, J., & Marks, R. (1985). *Teachers' Knowledge and Structuring Content in Mathematics*(Technical Report No. CC-09), Stanford, CA: Knowledge Growth in a Profession Project, Stanford University.

Stump, S. (1997). Secondary Mathematics Teachers' Knowledge of the Concept of Slope. *Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association*, Chicago, IL.

Thompson, A. (1984). The Relationship of Teachers' Conceptions of Mathematics Teaching to Instructional Practice, *Educational Studies in Mathematics* **15**, pp.105-127.

Thompson, A. (1992). Teachers' Beliefs and Conceptions : A Synthesis of Research. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.127-146). New York: Macmillan.

Thompson, A. G.; Philipp, R. A.; Thompson, P. W. & Boyd, B. A. (1994). Calculational and conceptual orientations in teaching mathematics. In A. Coxford (Ed.), *Professional Development for Teachers of Mathematics*, 1994 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (pp. 79-92). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Thompson, P. W., & Thompson, A. G. (1994). Talking about Rates Conceptually, Part I: A Teacher's Struggle, *Journal for Research in Mathematics Education* **25**, pp.279-303.

Tirosh, D. (2000). Enhancing Prospective Teachers' Knowledge of Children's Conceptions: the Case of Division of Fractions, *Journal for Research in Mathematics Education* **31(1)**, pp.5-25.

Thorpe, J. (1989). Algebra: What Should We Teach and How Should We Teach It? *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* **4**, pp.11-24, National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA.

Tirosh, D., & Graeber, A. (1990). Evolving Cognitive Conflict to Explore Preservice Teachers' Thinking about Division. *Journal for Research in Mathematics Education* **21(2)**, pp.98-108.

Watson, J., & Chick, H. (1997). Irrational Beliefs about Numbers. *Australian Senior Mathematics Journal* **11(2)**, pp.4-13.

Wheeler, M., & Feghali, I. (1983). Much Ado about Nothing: Preservice Elementary School Teachers' Concept of Zero. *Journal for Research in Mathematics Education* **14(3)**, pp.147-155.

Wilson, M. (1993). One Preservice Secondary Mathematics Teachers' Evolving Understanding of Mathematical Functions. *Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association*, Atlanta, Georgia,

Wilson, M. (1994). One Preservice Secondary Teacher's Understanding of Function: the Impact of a Course Integrating Mathematical Content and Pedagogy. *Journal for Research in Mathematics Education* **25(4)**, pp.346-370.

Winsor, M. (2003). *Preservice Mathematics Teachers' knowledge of Functions and its Effect on Lesson Planning at the Secondary Level.* Doctoral Dissertation, University of Iowa.

Zaslavsky, O., & Peled, I. (1996). Inhibiting Factors in Generating Examples by Mathematics Teachers and Student Teachers: the Case of Binary Operation. *Journal for Research in Mathematics Education* **27(1)**, pp.67-78.

Zazkis, R., & Campbell, S. (1994). Divisibility and Multiplicative Structure of Natural Numbers: *at the annual meeting of the American Educational* Preservice Teachers' Understanding. Paper presented *Research Association*, New Orlenas, Louisiana

Preservice Secondary Mathematics Teachers' Mathematical Content Knowledge: Graphical Representation of y=1, y=x, x=0, $x^2+y^2=1$

Han, Jeongsoon

Department of Applied Mathematics, Hanyang University, 1271 Sa-1 dong, Sangnok-gu, Ansan, Kyeonggi-do, Korea

han@hanyang.ac.kr

Cha, Insook

Department of Mathematics, Hanyang University, 17 Haengdang-dong, Seongdong-gu, Seoul, Korea

chais314@hanyang.ac.kr

The purpose of this study is to investigate preservice secondary mathematics teachers' knowledge about graphical representation and provide implications for better mathematics teaching and learning in our schools. For this purpose, sixty-three preservice teachers were selected and given diverse graphical representation problems of y=1, y=x, x=0, $x^2+y^2=1$. All preservice teachers completed two types of questionnaires. First type is about constructing the graphs of the above each equation, and the second one is to make them find the appropriate graphs from given examples of the each equation. The results indicated that all the participant preservice teachers were unable to construct graphs in terms of various dimensions and various direction of coordinate axis. All of the participants represented the graph of each equation on only two-dimensional coordinate system. In addition, some preservice teachers believed that the axis of coordinates have to be x-axis on horizontal line and y-axis on vertical line. From this study, it is implicated that preservice teacher education program needs to provide the experience of representing the graphs of equation in terms of various dimensions and various direction of coordinate axis so as to develop their future students the flexibility and creativity in mathematical thinking especially in the area of space perception.

* ZDM Classification : B59
* 2000 Mathematics Classification : 97B50
* Key Word : preservice teacher education, teachers' knowledge, graphical representation