대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 16 권 제 1 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 16, No. 1, 79-94. Feb 2006

도형의 최대 분할 과제에서 초등학교 수학 영재들이 보여주는 정당화의 유형 분석[1)]

송 상 헌* · 허 지 연** · 임 재 훈***

본 연구는 10명의 초등학교 5-6학년 수학영재들이 평면과 공간의 최대 분할이라는 과제를 해결하면서 보여주는 정당화 유형을 분석한 것이다. 우선 문헌 연구를 통해 본 과제의 해결 과정에서 영재들이 보일 것으로 예상되는 정당화 유형 분석의 틀을 마련하고 실제로 초등 수학영재들이 자신의 능력에 따라 보여주는 정당화 과정의 특성을 분석하였다. 연구 결과, 초등 수학영재들 사이에도 정당화 수준에는 상당한 차이가 있는 것으로 나타났다. 초등 수학영재들에게서 외부적 정당화는 거의 나타나지 않았으며, 귀납적 정당화를 시도한 학생은 소수 있었다. 초등 수학영재들에게서 가장 많이 나타난 정당화 유형은 포괄적 정당화였으며, 형식적 정당화 수준에 이른 초등 수학영재도 일부 있었다. 이러한 결과는 초등 수학 영재들에게 패턴 찾기 탐구 주제를 제시할 때에 귀납적인 사례를 조사하도록 이끄는 방식이 그다지 적절하지 않으며, 일반화된 식의 산출보다는 정당화에 좀 더 초점을 맞춘 학습 지도가 필요함을 시사한다.

I. 서 론

수학교육에서 우선순위에 두어야 할 것 중 하나는 수학적 소양과 힘을 기르는 것이다(NCTM, 1987, 2000). 수학적 소양과 힘을 기르는데 주요한 역할을 하는 수학적 추론에는 귀납과 유추, 연역 등이 있으며, 연역적 추론의 핵심은 증명이다. 증명은 과제의 해결 과정 속에 나타나는 수학적 추론이 옳다는 것을 자신은 물론 다른 사람에게 논리적, 조직적으로 보여 주는 것이다.

전통적으로 수학교육에서 증명은 유클리드 원론에 기원하는 형식적 증명을 뜻하는 것으로 여겨져 왔다.

그러나 최근에는 오류주의와 구성주의의 영향으로, 어떤 주장이 참임을 정당화하는 수단 또는 추측을 확인하고 개선하기 위한 수단과 같이 전보다 폭넓은 의미로 사용되고 있다(나귀수, 1998). Hanna(1983)는 '입증하는 증명(proofs that prove)'과 '설명하는 증명(proofs that explain)'으로 증명을 나누고 있다. 전자와 달리 후자는 명제가 참임을 보이려는 것뿐 아니라 명제가 참이 되는 이유를 제시하려는 데에 목적이 있다.

교육적인 측면에서 자신의 생각이 참임을 주장하기 위한 하나의 수단으로 증명을 폭넓게 해석한다면, 형식적 증명 이외에도 학생들이

* 경인교육대학교, shsong@ginue.ac.kr
** 반월초등학교, walnamhjy@hanmail.net
*** 경인교육대학교, jhyim@ginue.ac.kr
1) 이 논문은 2005년도 정부재원(교육인적자원부 학술연구조성사업비)으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 연구되었음(KRF-2005-079-BS0123)

자신들의 경험과 지식에 의존하여 나름대로 하는 설명도 증명의 범주에 포함될 수 있다. 전통적인 형식적 증명의 전 단계로서 정당화의 지도는 사회적 변화에 적극적이고 능동적으로 대처하는 교육과정을 추구한다면 긍정적으로 검토할 필요가 있다(신현용, 한인기, 2001).

한편, 수학적 추론 능력을 포함한 수학 영재들의 능력에 관한 연구가 이루어져 왔다. Krutetskii(1976)는 수학적으로 우수한 아동들을 연구하여, 그들이 일반화 능력, 추론을 단축하는 능력, 사고의 유연성, 전형적인 구조를 일반적인 형태로 기억하는 능력에서 뛰어남을 밝힌 바 있다. 송상헌(1998, 2000, 2006)에 의하면, 수학영재들은 수학적 추론 능력과 일반화 하는 능력, 그리고 장시간 과제에 집중할 수 있는 능력이 우수하다. 또한 보통의 학생들과 달리 주어진 문제의 정보를 형식화하여 인식하고 문제의 형식과 구조를 파악하며, 보다 나은 풀이를 찾으려는 태도를 바탕으로 주어진 과제를 일반화하고, 통합, 적용하려는 경향이 있다. 또한 일반화된 가설을 세워 증명하고 그것을 설명해 낼 수 있는 능력이 뛰어나며 교사의 설명을 듣기보다는 자신의 생각을 다른 사람에게 표현하고자 하는 욕구를 가지고 있다.

그러나 수학 영재들이 가지고 있는 사고 특성이 보다 세밀하고 구체적으로 연구될 필요가 있다. 점차 영재교육이 활성화되고 있는 시점에서 보다 내실 있는 영재교육이 이루어지기 위해서는 영재아의 수학적 사고 특성에 대한 좀 더 세밀한 이해와 그에 따른 영재교육과정의 구성 및 운영이 요구된다. 이경화(Lee, 2005)는 영재들을 위한 교수학적 상황은 비형식적 추론의 발전을 이끌어 다양한 종류의 추론에 의해 형식적인 증명에 근접하게 하는 것이어야 한다고 하면서, 수학영재들이 수학적 추론능력이 탁월하다고는 하지만 그것이 구체적으로 어떻게 나타나고 있는지에 대해서는 더 많은 사례의 수집과 분석이 필요하다고 하였다.

이에 본 연구에서는 초등 수학영재들이 과제해결 과정에서 보이는 정당화를 그 유형에 초점을 맞추어 좀 더 세밀히 살펴보고자 한다.[2) 문제 해결 과정에서 수학영재들이 보여주는 정당화 유형을 분석하고, 이를 통해 초등 수학영재들이 자신의 생각을 일반화하는 과정에서 어떠한 근거를 들어 자신의 주장이 참임을 설명하는지, 수학 영재들의 능력 차이에 따라 정당화 유형에 어떤 차이가 나타나는 지를 알아보고자 한다.

II. 정당화의 유형

여기서는 Balacheff(1987)가 제시한 증명의 4가지 유형과 Simon과 Blume(1996)이 제안한 정당화 수준을 개관하고 이를 바탕으로 본 연구에서 수학영재들의 정당화 과정을 분석할 틀을 마련하고자 한다.

1. Balacheff의 증명 유형

Balacheff(1987)는 관찰 방법을 통하여 13-14세 학생들 14명이 보여주는 증명의 유형을 분석하여, 다음과 같은 네 가지 증명의 유형을 제시하였다.

2) 보통 수준의 초등학생들을 대상으로 한 정당화의 유형에 관한 연구는 일부 이루어져 있으나(권성룡, 2003), 초등 수학 영재를 대상으로 정당화 과정과 유형을 자세히 분석하는 작업은 별로 이루어지지 않았다.

<표 Ⅱ-1> Balacheff의 증명의 4가지 유형

증명의 유형	내 용
소박한 경험주의 (native empiricism)	사례로 인한 설명
결정적 실험 (crucial experiment)	광범위한 사례를 통한 설명
포괄적인 예 (generic example)	특별한 예를 통한 연역적 설명
사고 실험 (thought experiment)	일반적인 연역적 설명

'소박한 경험주의'에 속하는 학생들은 적은 개수의 사례에 대한 조사로부터 일반적 타당성을 결론지었다. '결정적 실험' 방식을 선호하는 학생들은 몇몇 사례에 대한 검사가 추측을 정당화하기에 충분하지 않다는 것을 인식하면서 보다 광범위한 테스트를 통해 추측을 정당화하려고 시도하였다. '포괄적인 예' 방식을 선호한 학생들은 추론을 이용해서 추측의 타당성을 설명하려고 하였지만, 설명에 있어서는 특정한 사례를 사용하였다. '사고 실험' 방식을 선호한 학생들은 보다 일반적인 용어를 사용하여 추론을 통해 추측의 타당성을 설명한다(Knuth, Elliott, 1998; 김성대, 2003).

2. Simon과 Blume의 정당화의 수준

Simon과 Blume(1996)은 Balacheff(1987)를 비롯한 기존의 연구를 바탕으로 <표 Ⅱ-2>와 같은 정당화 수준을 제안하고 있다. 이것은 대수적 관계의 일반화 과정에서 이루어지는 정당화를 구분하는 수준을 제시한 것이다. 그들은 3개의 과제를 제시하여 동일한 과제에 대해 각자 해결한 방법을 설명하는 과정이 서로 다른 것을 통해 학생들의 정당화의 수준을 파악하고, 많은 학생들이 수준 2와 수준 3에 있음을 확인하였다.

<표 Ⅱ-2> Simon & Blume의 정당화의 수준

정당화 수준	설 명
Level 0 정당화 없음	반응에 정당화가 들어 있지 않다.
Level 1 외부의 권위에 호소	공인된 다른 사람이나 자료를 통해 참고 사항을 만든다.
Level 2 경험적 증거	정확한 특정한 예들을 통해 정당화를 제시한다.
Level 3 일반적 예	특정 사례에 대해 연역적 정당화를 표현한다.
Level 4 연역적 정당화	특정 사례들과는 별개로 연역적인 논증을 제시한다.

이 연구에 따르면, 동일한 일반화의 과정을 시도했다 할지라도 이를 설명하는 과정은 다를 수 있다.

또한 수학 수업에서의 정당화는 수학 사회에서 확립된 기준을 충족하는 과정을 통해 받아들여져야 한다. 이는 엄밀한 의미의 증명을 목적으로 했던 전통적인 관점과는 다르게 사회적 구성원들에 의해 그 유형이 결정되며, 정당화는 학생과 교사 사이의 토론 과정에서 합의의 과정으로 이루어진다는 것이다.

3. 초등 수학영재의 정당화 유형 분석의 틀

Balacheff(1987)는 기하 과제를 통해 정당화의 각 유형을 제시하였고, Simon과 Blume(1996)은 대수적 과제를 통해 정당화의 수준까지 고려하였다. 이 연구에서는 위의 두 연구를 기반으로 하여 다음 <표 Ⅱ-3>과 같이 정당화의 수준과 유형을 구분하고, 이를 통해 초등 수학영재들이 보이는 정당화 과정을 분석하고자 한다.

<표 II-3> 정당화의 수준과 유형

수준	유 형	설 명
1	외부적 정당화	외부의 권위(교사, 책, 이미 알고 있는 결과적 지식)를 빌려 자신의 생각이 옳음을 설명함
2	귀납적 정당화	구체적인 사례들의 공통된 성질이나 규칙을 귀납하면서 추측, 확장하여 설명함(문자를 사용하지만 핵심 구조를 보지 못하는 경우를 포함)
3	포괄적 정당화	일반(포괄)적인 사례를 들어 연역적으로 설명함
4	형식적 정당화	특정한 사례는 보조 수단으로만 사용하며, 문제의 핵심 구조를 바탕으로 기호를 사용하여 논리적으로 설명함

외부적 정당화(1수준)에서는 자신의 생각을 바탕으로 정당화하지 못하고 교사나 책을 통해 이미 알고 있던 결과적 지식과 같은 외부적인 권위를 빌어 자신의 생각이 옳음을 설명하는 수준이다. Simon과 Blume의 Level 1이 여기에 해당한다. 귀납적 정당화(2수준)는 자신이 직접 시도해 본 구체적인 경험 사례들을 증거로 삼아 그것을 확장하여 추측하면서 자신은 옳다고 말하지만 다른 사람들에게 확신을 주지 못하는 경우이다. Balacheff의 소박한 경험주의와 결정적 실험, Simon과 Blume의 외부적 권위의 호소에 해당된다. Balacheff는 단순한 사례와 광범위한 사례를 구분하고 있지만 수학영재들은 사례의 다소에는 큰 차이를 보이지 않는다. 초등학교 고학년 수학 영재들은 문자(n)를 사용하여 일반항을 표현할 수 있다. 그러나 단순화와 귀납에 의한 사례에만 초점을 맞추고 패턴의 구조를 설명하지 못한다면 문자를 사용한다고 해도 여전히 귀납적 정당화 수준에 속하는 것으로 보는 것이 타당하다. 포괄적 정당화(3수준)는 과제의 구조적 본질을 보여주는 일반(포괄)적인 사례를 들어 나름대로 조리를 세워 설명하는 수준이다. Balacheff의 '포괄적인 예'의 유형과 Simon과 Blume의 '일반적 예'가 여기에 해당한다. 마지막으로 형식적 정당화(4수준)는 특정 사례를 보조수단으로 사용하기는 하지만, 문자나 기호를 사용하면서 연역적 논증을 통해 일반적으로 설명하는 수준을 말한다. Balacheff의 사고실험과 Simon과 Blume의 연역적 정당화가 여기에 해당된다.

III. 연구 방법

1. 연구 대상

초등 수학영재들에게서 보이는 정당화의 유형별 사례를 분석하기 위해, 경기도의 지역 교육청부설 영재교육원 5, 6학년 학생들(C집단), 대학부설 영재교육원 기초반 학생들(B집단), 보다 능력이 뛰어난 학생들로 구성된 대학부설 영재교육원심화반 학생들(A집단)의 세 집단의 학생들을 대상으로 연구를 진행하였다. 집단적으로 볼 때, 이 세 집단의 수학적 능력은 서로 상이한 것으로 가정될 수 있다. 각 집단의 수학적 능력 수준은 C집단이 가장 낮고, B집단, A집단 순으로 높다고 할 수 있다.[3] 각 집단은 10-20명의 학생들로 구성되어 있다. 각 집단에서 기존의 수업을 통해 표현력과 사고력이 가장 우수한 학생들 2-4명을 선정하여 연구의 대상으로 삼아 집중 관찰하였다. 과제는 각 집

3) 대체로 대학부설 영재교육원 선발 시험에서 탈락한 학생들이 교육청부설 영재교육원의 시험에 응시한다. 그리고 심화반 학생들은 기초반을 거쳐 온 2년차 계속 교육대상자들이며 신규 입학생들 중에서도 선발시험의 결과가 탁월한 일부 학생들이 심화반에 포함되고 있다.

단의 정기 수업 시간에 투입하였다.

<표 Ⅲ-1> 연구 대상자

수업에 참여한 대상자				분석 대상자	
소 속	학년	수준	인원	인원	학생
경기도의 두 지역 교육청 영재교육원 (C집단)	6	1%	19	4	C6_SJ C6_TW C6_TH C6_TY
	5	1%	20	0	·
경기도의 A 대학부설 영재교육원 기초반 (B집단)	4-6	0.05%	10	4	B5_YS B5_DS B6_JS B6_YJ
경기도의 A 대학부설 영재교육원 심화반 (A집단)	5-6	0.01%	10	2	A6_JH A6_IS

각 집단의 학생들은 공동연구자들의 일부와 적어도 6-10개월 이상 관계를 맺고 있었으므로, 학생들의 개인별 특성은 사전에 충분히 파악된 상태였다. 과제에 반응하는 학생들의 ID를 C6_SJ, B5_YS, A6_JH 등과 같이 각 집단별로 영문자와 학년, 그리고 그 학생의 영문 첫 글자를 표시하여 소속집단과 학년, 학생을 구분하여 확인할 수 있도록 하였다.

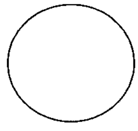
2. 과제 선정

본 연구에서 사용한 평면분할과 공간분할의 과제는 Polya(2003)가 개연적 추론을 설명하면서 제시한 바 있다. 이 과제는 귀납적 접근과 연역적 접근이 모두 가능한 과제이기 때문에 아동들의 다양한 정당화 과정의 사고 특성을 관찰할 수 있을 것으로 판단되어 선택되었다. 과제의 내용은 아래와 같다.

(과제 1) 다음의 원판에 선분을 하나씩 그어 원판을 여러 개의 면으로 분할하려고 합니다. 각 물음에 답하시오.

(1) 어떤 방법으로 선을 그어야 최대한 많이 분할된 면이 나올지 설명하시오.

(2) 선분의 수를 늘려가면서 얻어지는 최대분할면의 개수를 구하시오.

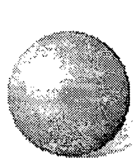


(과제 2) 다음의 구를 면으로 잘라서 여러 개의 공간으로 분할하려고 합니다. 각 물음에 답하시오.

(1) 4개의 면을 이용하여 분할할 때 최대로 만들어 질 수 있는 공간의 개수를 구하시오.

(2) 10개의 면으로 공간을 분할할 경우, 최대 몇 개의 공간으로 분할될지 구하시오.

(3) 그렇게 생각한 이유를 설명하시오.



3. 자료 수집

본 연구에서는 연구 대상 학생들이 개별적으로 문제를 해결하는 과정을 비디오로 촬영한 자료, 관찰 자료, 면담 자료, 학생 활동지를 수집하여 분석하였다. 학생들에게 자신들의 생각을 학습지에 최대한 자세히 적도록 하였으며, 생각을 수정할 경우에도 이미 기록한 내용을 지우지 않고 별도로 쓰게 하였다. 연구자는 학생들이 적어가는 과정을 직접 살펴보면서 필요시 적절한 질문을 통해 학생들의 반응을 가능한 한 정확히 수집하려고 노력하였다. 학생들에게 과제를 해결할 수 있는 시간을 충분히 주었으며, 각자 과제를 해결하는 시간 뒤에 쉬는 시간을 가진 후, 다른 학생들과 토론하면서 자신의 생각을 수정 발전시켜 갈 수 있는 기회를 제공하였다.

Ⅳ. 연구 결과 및 논의

본 연구에서 제시한 두 과제에 대해 각 집단에 속한 수학영재들이 보여준 정당화의 방법을 그 유형별로 살펴보면 다음과 같다.

1. 평면 분할(과제 1)

가. 외부적 정당화(1수준)

보통의 초등학생들은 자신이 인정한 권위(교사 또는 책)에서 얻은 지식은 옳다고 믿는 경향이 있다. 또한 가끔은 대략 듣기만 한 사실에 대한 기억까지도 신뢰하려고 한다.

본 연구의 대상자인 초등 수학영재들의 대부분이 평면의 최대분할 과제를 이전에 본 적이 있다고 대답했다. 그러나 초등 수학영재들 중 기억에 의존하여 외부적 정당화를 시도한 것은 단 한 명뿐이었다.

C6_SJ는 자신의 기억에 의존하여 별 모양으로 평면을 분할하려 하였으며, 정당화를 요구하였을 때 외부적인 정당화를 하였다.

T: 넌 어떻게 이 과제를 해결했니?
C6_SJ: 저는 동그랗게 그려진 평면을 별 모양으로 나눌 수 있도록 해야 한다고 생각해서 이렇게 그리고 있습니다.
(중략)
T: 별 모양으로 그리면 가장 최대라는 것을 어떻게 알았니?
C6_SJ: 어디서 들었는데요. 별 모양으로 그리는 것이 가장 많은 면으로 분할할 수 있어요.

C6_SJ는 별 모양이라는 것에 초점을 맞추어 원 안에 별모양을 여러 방향으로 그리며 설명을 하였지만, 결국 왜 그런지에 대한 이유를 끝까지 알아내지 못하였다.

나. 귀납적 정당화(2수준)

초등 수학영재들은 단순화와 귀납적인 사고에 의해 규칙을 찾아내는 능력이 뛰어났다. 규칙이 그다지 복잡하지 않은 경우라면 귀납을 통해 얻은 몇 개의 수치 자료를 토대로 일반적인 경우의 식을 문자를 사용하여 나타낼 수 있었다.

C6_TW, B5_YS는 평면분할 과제를 해결할 때에 구체적인 사례를 조사하여 얻은 자료로부터 공통된 성질을 찾아 자신의 생각을 정당화하려고 시도하였다.

B5_YS: 저는 앞에 있는 그림에 선을 그어가면서 찾아봤는데요. 7번째까지 찾아봤어요. 그랬더니 아래 표처럼 나와요.

자른 횟수	1	2	3	4	5	6	7
최대 분할면의 개수	2	4	7	11	16	22	29

이런 모양을 보고 다음과 같은 규칙을 찾았어요.

규칙 : $1+\frac{\text{자른횟수}(\text{자른횟수}+1)}{2}$

T: 그렇구나. 그런데 그런 자른 횟수가 3일 때 왜 7개라고 생각하지?
B5_YS: 그건 다 공식에 다시 넣어보면 알 수 있어요.
T: 공식으로 알 수 있는 방법 말고 다른 방법은 없을까?
B5_YS: 그건 그림을 그려보면 알 수 있어요. 로 나누는 것 보다  모양으로 나누는 것이 더 많이 나누어지잖아요.. 그러니까 새로운 직선이 지날 때 기존의 직선을 많이 만나도록 그리면 그렇게 나와요.
T: 왜 그렇다고 생각했니?
B5_YS: 직접 그려보면서 확인해 보니까, 교점이 많이 생길 때가 가장 많은 분할 면이 생기는 것 같아요. 이와 같은 방법으로 면을 나누어서 분할을 해 보니까 1, 2, 4, 7, 11로 분할 면이 늘어나는 것을 알 수 있었어요.
T: 왜 그렇게 분할을 해야 하는 걸까?
B5_YS: 글쎄요. 그건 그어보면 알게 되는 거예요.

B5_YS는 『①사례 확인하기→②사례들 사이의 규칙 찾기(귀납)→③패턴의 관계를 추측하

기→④더 많은 사례로 그 추측을 확인(귀납)하면서 이유 설명하기』의 과정을 거쳐 문제를 해결하였다. B5_YS는 평면을 자른 횟수를 변화시켜가면서 여러 가지 방법으로 분할하여 생기는 수의 규칙을 통해 새롭게 긋는 기존의 수만큼 분할 면이 늘어나는 것을 발견하고 이를 일반적인 문자(n)을 포함하는 공식으로 일반화하였다. 그러나 그것이 정말 최소인지에 대한 이유와 그 일반식이 정말 맞는지에 대해서 논리적으로 설명하지는 못했다.

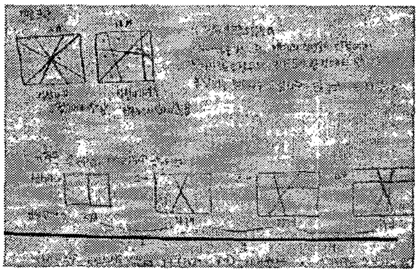
다. 포괄적 정당화(3수준)

C6_TH, C6_TY, B5_DS, B6_JS, B6_YJ는 평면분할 과제 해결 과정에서 포괄적 정당화를 시도하였다. 다음은 B6_JS의 예이다.

B6_JS: 교점이 많아지도록 선을 그어야 하고, 그 때 서로 일치하지 않도록 그어야 많은 면으로 나누어질 수가 있어요. 이와 같은 방법으로 하면 규칙이 나왔는데요.. 이 규칙을 알아보면 n개의 선을 그었을 때 2+(2+3+⋯n)=최대분할 수라고 할 수 있구요, n=1일 때는 2개라고 외우는 것이 더 좋을 것 같아요.

T: 그렇구나! 그러면 선분이 더 많은 경우도 교점이 많도록 그리면 된다는 거니?

B6_JS: 그렇게 매번 그려볼 수는 없는 것이구요. 그렇게 긋다보면 새로 그으려는 선은 기존의 선을 지나기 때문에 교점이 기존의 선의 수만큼 생기는 거예요. 따라서 교점의 개수보다 하나 더 많은 새로운 면이 생기게 되는 거예요.



[그림 Ⅳ-1] B6_JS의 평면 분할 해결 과정

B6_JS은 일반화된 규칙을 찾아낼 때에는 귀납적인 방법을 사용하였다. 그러나 찾아낸 규칙을 정당화하는 경우에는 새롭게 긋는 선으로 인해 각 선분들끼리 최대한 많이 그러나 서로 다른 점에서 만나야 한다는 관계를 이용하여 조리를 세워 설명하였다.

또 다른 사례인 B6_YJ의 경우를 제시하면 다음과 같다.

B6_YJ: 직선 0개로는 1개, 직선 1개로는 2개, 직선 2개로는 4개, 직선 3개로는 7개의 평면이 나오게 되는데, 이를 다시 표현하면, 직선 1개일 때는 1, 직선 2개일 때는 1+1, 직선 3개일 때는 1+1+2, 직선 4개일 때는 1+1+2+3이라고 나타낼 수 있어요. 이것을 수식으로 표현하면 1+(1+2+3+n)개의 평면은 $1+\frac{(n+1)n}{2}$개의 평면이 나오게 되는 거예요.

T: 왜 그런 수의 배열이 보일지는 생각해 봤니?

B6_YJ: 그것은 지나가는 교점의 수와 관련이 있어요. 그 전에 있던 직선을 모두 지나가야 하니까. 3번째 직선을 긋는다고 할 때에는 두 개의 직선을 지나요. 그러면 3개의 면을 지나기 때문에 교점보다 하나가 더 많은 3개의 면이 새롭게 생기구요, 4번째 직선을 그을 때는 4개의 면을 지나기 때문에 새롭게 4개의 면이 생기는 거예요. 따라서 1, 2, 3과 같은 형식으로 수가 늘어난다고 할 수 있어요. 이를 규칙적으로 생각해보면 위의 식처럼 나타낼 수 있는 거예요.

B6_YJ는 선분의 교점을 통해 새롭게 지나가는 면의 수에 초점을 두고 늘어나는 면의 수의 규칙에 대한 포괄적인 정당화를 시도했다.

위의 두 학생은 『①사례 확인하기→②패턴을 통해 규칙 찾기(귀납)→③관계를 일반화하기→④일반적인 사례를 들어 그 이유 설명하기』의 과정을 통해 과제를 해결하였다. 이들은 처음에는 귀납적 사고의 과정을 거쳤으나, 귀납적으로 추측한 것을 더 많은 사례를 동원

하지 않고 보다 일반(포괄)적인 관계를 내포하는 사례를 통해 자신의 생각을 조리를 세워 정당화하는 모습을 보여 준다.

라. 형식적 정당화(4수준)

가장 높은 수준의 정당화는 특정한 사례들보다는 문제의 핵심적인 일반적 관계를 문자나 기호를 사용하여 연역적으로 설명하는 것이다. 형식적 정당화는 대학부설 영재교육원 심화반에 속한 두 학생에게서 나타났다. 다음은 A6_JH의 사례이다.

T: 너는 어떻게 해결했니?
A6_JH: 원이 있으면 여기에 새로운 직선이 지나가잖아요. 선은 직선이기 때문에 그어진 선들을 한번씩만 지날 수 있어요. 그죠?
T: 그래서?
A6_JH: 그러면, 원 안에 몇 개의 선들이 있다고 가정을 해요. 여기서 새로운 선을 그으면 그 전에 있던 선분을 모두 만나게 되어야 최대가 될 것 아니에요. 그러면 최대가 몇 개의 선과 면이 만들어지잖아요. 다시 말하면 새롭게 그어지는 선은 기존의 선과 만나면서 점과 새로운 선분으로 분할이 되는 거잖아요. 맞죠?
T: 그렇구나.
A6_JH: 그러면 새롭게 긋는 선은 1+n의 선분이 새롭게 생기는 거잖아요. 그러니까 새로운 면이 나타나는 거예요.

A6_JH의 경우는 몇 가지 간단한 경우에 대해 선을 그어 보면서 표를 만들거나 더 많은 사례를 찾지 않고 곧바로 관계의 구조적 이해를 통한 일반화를 시도했다. 최대분할이 되기 위해서는 모든 선분을 꼭 한 번씩 지나야 한다는 규칙을 알아냈으며 기존의 선분들보다 하나 더 많은 수(늘어나는 면은 만나는 교점의 수보다 1큼)만큼 면이 새롭게 생긴다고 생각하였다.

A6_IS도 간단한 사례를 통해 문제의 일반적 구조를 이해하고, 자신의 풀이를 적절히 기호를 사용하여 연역적으로 설명해 나갔다.

A6_IS: (왜냐면요...)원을 n개의 직선으로 분할한다고 할 때, 최소 분할개수로 분할 때는 모든 직선이 평행할 때이잖아요. 이 때의 개수는 $1+{}_nC_1$개에요. 여기서 직선을 조금씩 움직이면 직선이 하나씩 겹칠 때마다 새로운 면이 하나씩 생기잖아요.. 어떤 직선끼리도 서로 두 번 이상 겹칠 수는 없으니까. 모두 한 번 겹치는 것이 최대에요. 모든 직선이 한 번씩 겹치는 개수는 직선을 두 개씩 고르는 가지 수와 같으니까..... 두 선분이 만나면서 점이 ${}_nC_2$개 추가되니 최대분할면의 개수는 $1+{}_nC_1+{}_nC_2$개가 되는 거예요.

A6_IS는 최대분할 면의 개수를 구하는 문제상황의 구조를 명확히 파악하였으며, 원의 내부에 있는 점과 선의 개수에 주목하였다. 그리고 선과 선이 만나면서 새로운 점이 생기는데 이렇게 만나는 점의 수만큼 면이 추가된다는 핵심관계를 파악하였다. 그는 이러한 핵심관계를 나중의 공간분할에도 쉽게 응용하였다.

A6_JH와 A6_IS는 『①특수한 사례의 시도→②사례를 찾아가는 방법 속에서 핵심 구조 파악→③일반화하기→④연역적으로 설명하기』의 과정을 거쳤다. A6_JH는 그은 선분의 개수에 주목하였고 A6_IS는 내부의 점의 개수에 주목하였다.

이상에서 동일한 과제라 할지라도 초등 수학 영재들이 과제를 해결하는 방법이나 설명하는 방식, 선호하는 정당화의 유형에는 상당한 차이가 있음을 알 수 있다. 학생들이 사용하는 정당화 유형은 그들의 사고 수준과 지식에 따라 다르게 나타났으며, 능력이 뛰어난 학생일수록 포괄적 정당화, 나아가 형식적 정당화를 선호하는 경향이 있음을 알 수 있다.

2. 공간 분할(과제 2)

공간 분할 과제에서는 이미 알고 있는 2차원의 평면분할을 3차원 공간분할 또는 그 이상으로 확장하는 과정에서 초등 수학영재들이 보여주는 반응을 관찰하였다. 평면분할 과제는 대부분의 학생들에게 낯익은 과제였고 한 명을 제외하고는 모두 해결에 성공하였다. 그러나 공간분할 과제는 일부 학생을 제외한 초등학생들에게는 낯선 과제였다. 이러한 낯선 과제에서 수학영재들이 사용하는 정당화의 유형이 앞의 경우와 어떤 차이가 있는지 비교해 볼 수 있을 것이다.

가. 외부적 정당화(1수준)

평면을 공간으로 확장한 과제를 풀어본 적이 있는지를 물었을 때 대부분의 학생들은 그렇지 않다고 대답했다. 일부 학생은 어디선가 본 듯 하지만 잘 모르겠다고 했다. 이 과제를 각자 해결하는 과정에서 외부적 정당화에 해당하는 사례는 나타나지 않았다. 오히려 사고능력이 뛰어난 학생들은 증명되지 않은 사실에 대해서는 그것을 완전히 인정하려 하지 않았으며 그것을 자신이 직접 증명해야 한다는 태도를 갖고 증명해 내려는 강한 의지를 보였다.

나. 귀납적 정당화(2수준)

C6_SJ와 B5_YS는 귀납적 정당화를 시도하였다. 이들은 「①사례 확인하기→②사례들 사이의 규칙 찾기(귀납)→③패턴의 관계를 추측하기→④더 많은 사례로 그 추측을 확인(귀납)하면서 이유 설명하기」의 과정을 거쳤다. C6_SJ의 사례를 제시하면 다음과 같다.

C6_SJ: 정육면체 그림으로 생각해 보면요. 면을 하나 그을 때, 공간은 2개로 나누어져요. 그리고 면을 두 개로 나누면 공간은 4개로 나누어져요. 그리고 면을 3개로 나누면 8개로 나누어져요.

T : 그래?

C6_SJ: <u>2, 4, 8로 증가하니까. 곱하기 2만큼씩 증가하는 것을 볼 수 있어요. 그러니까. 4번째의 경우는</u> 16개가 되는 거예요.

이 유형에 해당하는 학생들은 귀납적으로 4번째 자른 면으로 최대 16개의 분할 면을 만들 수 있다고 잘못 예상하였다. 그러나 그들은 자신의 답에 대한 강한 확신을 보였다. 수업 중에 한 동료 학생에 의해 면이 0개일 때 최대분할공간의 개수가 1이라는 사례까지 동원되자 그 확신은 더욱 강해졌으며 나름대로의 방식으로 귀납적인 정당화를 계속 시도하였다.

다. 포괄적 정당화(3수준)

귀납적 정당화를 시도한 B5_YS와 C6_SJ는 2, 4, 8의 패턴으로부터 4번째 면으로 공간을 분할할 때 16개로 분할될 것이라고 보았으나, 포괄적 정당화를 시도한 학생들은 높이가 추가된다는 등의 이유를 제시하면서 14개가 되거나 16개보다는 적을 것이라고 생각하였다.

C6_TH, B5_DS, B6_YJ 등은 포괄적 정당화를 시도하였다. 공간감각의 부족 등의 이유로 인해 올바른 답을 찾아내지 못하였으나, 자신들의 생각을 귀납적인 시도가 아니라 포괄적인 예시를 통해 조리를 세워 설명하려고 시도하였다. 몇 가지 사례를 제시하면 다음과 같다.

C6_TH: 원이나 구나 분할하면 같은 방식으로 면이나 공간의 개수가 나와요. 그러니까 원의 최대분할 개수가 구의 최대분할 개수가 된다고 할 수 있어요.

T: 그래? 그럼 (면이 3개일 때는 분할공간이) 7개가 되어야 하는 거 아니니?

C6_TH: 아니요. <u>구는 원보다 높이가 더 추가되는 거잖아요. 그러니까. 원의 분할 면에서 ×2를 해 줘야 해요.</u>

B6_YJ: 저는 공간이 14개로 나뉠 것 같아요. 그 이유는 평면보다 공간은 높이가 추가된 것이기 때문에 평면에서 나누어진 수 7에 곱하기 2를 하면 되니까요.

T: 다른 사람들의 의견은 어떠니? 모두 동의하니?

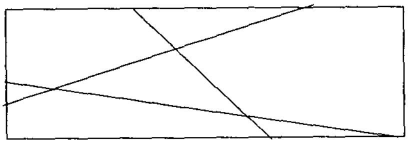
B5_DS: 저는 14개이긴 한데요, B6_JS와는 달라요. 평면에서 나눈 방법을 생각해서 이미 나누어진 공간 8개에 새로운 직선이 지나가면서 6개의 공간이 또다시 나누어지니까 8+6이니 14개가 되는 거예요.

이들은 공간의 관계를 평면의 관계에서 유추해 보려고 시도했으나, 어떤 경우에 새로운 공간이 추가되는지에 대한 문제의 핵심을 파악해 내지는 못하였다. 나중에 이들은 토론을 통해 3개의 면을 사용하여 정육면체를 8등분한 다음 4번째 면은 코너에 있는 하나의 공간을 지날 수 없으므로 최대 15개의 공간으로 분할된다는 것을 알게 되었다. 그러나 이후 5번째 면이 통과할 때 분할되는 공간의 개수를 구하도록 요구했을 때 여전히 문제를 해결하지 못하였다. 이는 이들이 아직 분할되는 관계(구조)를 보지 못했기 때문이다.

라. 형식적 정당화(4수준)

사고력이 매우 뛰어난 일부 학생들은 공간분할 과제를 유추를 통해 평면분할 과제로부터 스스로 일반화하고 확장했으며, 형식적인 정당화를 시도하였다. A6_JH와 A6_IS가 이 경우에 해당한다.

A6_JH: 공간을 가로, 세로, 그리고 높이 방향으로 자르면 8개로 나누어지잖아요. 여기에 새로운 면이 지나가면 아래 그림과 같은 모양이 나오잖아요.



[그림 Ⅳ-2] 공간을 자른 단면(A6_JH)

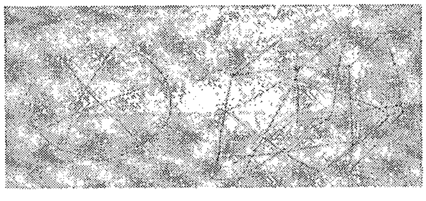
이 그림은 공간에서 한 면을 잘라서 본 모양인데 평면을 선분으로 자른 모양이랑 같잖아요. 그러니까, 이런 면의 개수만큼 새로운 공간이 생기잖아요. 따라서 8개에다가 새롭게 생긴 7개를 더하면 15개의 공간이 나오는 거지요.

이것을 일반화하면 f_n은...... 아니지. f_n이라고 하면 안 되니까, $g_{n+1}=g_n+\frac{n(n+1)}{2}+1$ 이 되겠죠. 이것을 풀면 $g_{n+1}=g_n+f_n$이 되요.

A6_JH는 공간분할을 평면분할과 연관하여 생각하고, 이 관련 속에서 문제의 핵심 구조를 파악하였다. 그는 공간에서 한 단면을 잘랐을 때 그 면에서 나타나는 분할면의 개수만큼 새로운 공간이 생긴다고 생각하였다. A6_JH는 나중에 이러한 방식이 차원을 줄이거나 늘일 때도 동일하게 적용된다는 것을 알게 된다.

A6_JH가 점의 개수를 통해 늘어나는 공간의 개수를 추측하자, A6_IS가 조합의 기호를 사용하여 그것을 일반화하고 정당화하였다.

A6_IS : 원에 선분이 그어있다고 생각해 보세요. 그리고 그것을 사각형으로 표현해요. 그리고 사각형 그림을 잡아당겨서 입체로 확장을 해요.([그림 Ⅳ-3]처럼 그린다.) 그러면 면들은 모두 공간을 나누게 되잖아요. 면이 3개가 모이면 공간이 하나 생기게 되는데, 면을 고르는 가지 수가 ${}_nC_3$이니까. 이를 정리하면 공간에서 나누어지는 최대분할 면의 수는 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3$이 되는 거예요. 그러니 4번째 면을 그으면 1+4+6+4에서 15개가 나오는 거지요. 다른 경우도 마찬가지예요.



[그림 Ⅳ-3] A6_IS의 공간 분할 해결 과정

A6_IS는 평면분할에서 2개의 선분이 만나서 새로운 점이 생기는 만큼 공간에서는 3개의 면이 만나 새로운 공간이 생긴다고 생각했다. 이처럼 공간분할에서는 2개의 면이 만나 하나의 선분을 이루고 3개의 면이 만나 하나의 점을 이루므로 늘어나는 분할공간의 개수는 공간의 내부에 생기는 점, 선, 면의 개수와 관련이 있을 것이라고 생각하였다. 그리고 선분을 점 분할한 개수, 면을 선 분할한 개수, 공간을 면 분할한 개수들을 서로 관련지으면서 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3$ 라는 일반화된 식을 만들었다.

A6_IS와 A6_JH는 좀 더 일반화된 해법을 찾기 위한 토론을 벌였다. 이후 그들은 4차원 초입체를 3차원 입체로 분할하였을 때 나타나는 최대분할 초입체의 개수를 구해보라는 도전과제를 받았다.[4] A6_JH는 최대분할 공간의 개수만큼 새로운 4차원 공간이 생긴다고 하였고, A6_IS는 공간 4개가 만나 새로운 4차원을 이루기 때문에 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+{}_nC_4$ 만큼의 4차원 초입체가 생긴다고 했다. 이들은 토론을 통해 k차원의 도형을 $k-1$차원 도형 n개로 분할하는 최대 개수를 ${}_nC_0+{}_nC_1+\cdots+{}_nC_k=\sum_{i=0}^{k}{}_nC_i$ 라고 표시하였다.

형식적 정당화에 성공한 2명의 학생은 과제의 핵심적인 구조를 파악하고 평면분할과 공간분할을 관련지어 일반화해 나갔다. 이들은 다른 집단의 학생들과 달리 공간직관에 그다지 의존하지 않은 채 공간 분할 문제의 구조를 파악하여 문제를 해결할 수 있었고 토론을 통해 서로의 사고력과 지식을 결합하여 보다 확장된 사고를 전개할 수 있었다.

3. 논의

평면분할 과제와 공간분할 과제에 대한 초등 수학영재들의 일반화 여부 및 정당화의 수준과 유형(또는 수준)을 정리하면 <표 Ⅳ-1>와 같다.

<표 Ⅳ-1> 초등 수학영재들의 정당화 수준과 유형

과제	집단 / 수준(유형)	교육청부설 영재교육원 (C집단)				대학부설 영재교육원					
						기초반 (B집단)				심화반 (A집단)	
평면분할	4(형식적)									★	★
	3(포괄적)			★	★		★	★	★		
	2(귀납적)		★			★					
	1(외부적)	☆									
공간분할	4(형식적)									★	★
	3(포괄적)			☆	☆		☆	☆	☆		
	2(귀납적)	☆				☆					
	1(외부적)										
학생		C6 SJ	C6 TW	C6 TH	C6 TY	B5 YS	B5 DS	B6 JS	B6 YJ	A6 IS	A6 JH

[주]☆는 일반화에 실패, ★ 일반화까지 성공

초등 수학영재들이 평면분할과 입체분할 과제에서 보여주는 정당화 과정의 분석을 통해 다음의 사실을 확인할 수 있었다.

첫째, 능력별 집단 간에 또한 동일한 영재교육 대상자 집단에 속하는 아동들 간에도 정당화의 수준에는 차이가 나타났다.

C집단과 B집단에 속한 학생들은 대부분 귀납적 정당화와 포괄적 정당화를 시도하였다. 그러나 A집단에 속한 학생들은 형식적 정당화를 선호하였다. 또 C집단과 B집단에 속한 학생들 중에는 공간분할 과제를 옳게 해결한 학생

4) A집단은 공간분할과제를 해결한 다음 날 4차원의 3차원 모형을 탐구하였다. 이때 연구자는 그들에게 전날의 과제를 보다 확장해 보라는 연구 과제를 주었다. 그 후 1주일 만에 그들을 다시 불러 당시의 과제를 어떻게 해결하였는지를 확인하면서 풀이 과정을 설명하라고 요청했다.

들 중에는 공간분할 과제를 옳게 해결한 학생은 한 명도 없었다. 귀납적인 접근을 시도한 학생들은 16개라는 틀린 풀이에 도달하였으며, 포괄적 정당화를 시도한 학생들도 과제의 핵심 구조를 제대로 파악하지 못한 결과 14개가 될 것 같다는 등의 잘못된 결과에 도달하였다. 이들은 공간분할과 평면분할과의 관련성을 제대로 인식하지 못하였다. 그에 비하여 A집단의 학생들은 공간분할을 평면분할과 관련지어 구조적으로 파악하고 형식적 정당화까지 해 내었다. 뿐만 아니라 과제를 k차원까지 확장하고 그 원리를 일반화할 수 있었다.

둘째로, 외부적 정당화와 관련하여, 초등 수학영재들에게서 외부적 정당화는 거의 나타나지 않았다. 외부적 정당화는 평면 분할 과제에서 C6_SJ에게서 단 한번 나타났으며, 공간분할에서는 전혀 나타나지 않았다. 초등 5-6학년 수학영재들은 대부분 외부적 정당화를 벗어난 수준에 있는 것으로 보인다.

셋째로, 귀납적 정당화와 관련하여, 평면분할, 공간분할에서 각각 2명씩의 학생만 이 수준의 정당화 유형을 보여주었다. 대부분의 초등 5-6학년 수학영재들은 귀납적으로 몇 가지 사례를 조사하여 얻은 수치로부터 수적 조작을 통하여 일반화된 규칙을 찾는 수 감각이 뛰어나다. 이 점을 고려할 때, 귀납적 정당화를 시도한 학생이 소수였다는 것은 상당수의 초등 5-6학년 수학 영재들이 규칙을 찾는 수단으로서의 귀납의 의의와 더불어 정당화 수단으로서의 귀납의 한계를 인식하고 있음을 시사한다. 앞에서 예시한 B6_JS의 경우, 평면분할 과제 해결 시 일반화된 규칙을 찾아낼 때에는 귀납적인 방법을 사용하였지만 찾아낸 규칙을 정당화하는 경우에는 귀납에 의존하지 않고 선분의 위치 관계에 기초하여 조리를 세워 포괄적으로 설명하려 하였다.

넷째로, 포괄적 정당화와 관련하여, 네 가지 정당화 유형 중 초등 수학영재들에게서 가장 많이 나타난 유형이 포괄적 정당화였다. 비록 공간분할과제에서 일반화된 답을 찾는 것에는 성공하지 못했으나 10명 중 절반인 5명이 평면분할 과제, 공간분할 과제에서 포괄적 정당화를 시도하였다. 포괄적 정당화는 귀납적 정당화와 구분되는 것으로서 연역적인 설명 방식에 속하는 것이다. 이는 상당수의 초등 5-6학년 수학영재들이 연역적인 설명을 정당화의 적절한 수단으로 받아들이고 있음을 시사한다.

다섯째로, 형식적 정당화와 관련하여, 연구 대상자 중 형식적 정당화 수준에 이른 경우는 대학부설 영재교육원 심화반의 두 학생뿐이었다. 이는 초등 수학영재 중에서도 형식적 정당화의 수준에 이른 학생이 존재함을 보여주지만, 동시에 이 수준에 이른 초등 수학영재가 극소수임을 시사하고 있다.

여섯째로, 평면분할과 공간분할에서 초등 수학영재들은 대체로 동일한 유형의 정당화를 보이고 있다. 10명의 학생 중 2명[5]을 제외한 나머지 7명의 학생 모두가 평면분할과 공간분할에서 동일한 정당화 유형에 해당하는 정당화를 시도하였다. 이는 정당화 유형이 그것을 소유한 개인에게 일관성 있는 하나의 사고 형식 또는 사고 경향임을 시사한다.

V. 결 론

이 연구는 초등 수학영재를 대상으로 평면과 공간의 분할 과제를 투입하여 초등 수학영재들

5) C6_SJ는 평면분할에서는 외부적 정당화, 공간분할에서는 귀납적 정당화를 보였다. C6_TW는 평면분할에서는 귀납적 정당화를 보였으나 공간분할에서는 어떤 정당화도 시도하지 않았다.

이 보이는 정당화 과정을 유형에 초점을 맞추어 분석한 것이다. 연구 결과, 초등 수학영재들간에도 정당화 수준에서 상당한 차이가 있는 것으로 나타났다. C집단과 B집단에 속한 학생들은 귀납적 정당화와 포괄적 정당화를 선호하였으나, A집단에 속한 학생들은 형식적 정당화를 선호하였다. 초등 수학영재들에게서 외부적 정당화는 거의 나타나지 않았다. 초등 5-6학년 수학영재들은 대부분 외부적 정당화를 벗어난 수준에 있는 것으로 보인다. 또한 귀납적 정당화를 시도한 학생이 소수에 지나지 않았다. 초등 수학영재들에게서 가장 많이 나타난 정당화 유형은 포괄적 정당화였으며[6], 형식적 정당화 수준에 이른 경우도 소수 있었다. 그리고 평면분할과 공간분할에서 초등 수학영재들은 대체로 동일한 정당화 유형을 보이고 있다.

이상으로부터 다음과 같은 교육적 시사를 얻을 수 있다.

첫째, 포괄적 정당화와 형식적 정당화를 할 수 있는 수준에 있는 초등 수학영재를 대상으로 하는 영재교육에서 패턴 탐구 주제를 소재로 한 수업을 할 때에는, 보통 아동을 지도할 때와 같이 몇 가지 사례를 관찰하여 일반화하게 하는 귀납적인 해결 전략을 사용하도록 유도하는 것은 적절하지 않다. 초등 수학영재 중에도 귀납적 정당화 수준에 있는 경우가 일부 있다. 그러나 이들에 대한 교육 역시 이들의 정당화 수준을 귀납적 정당화에서 포괄적 또는 형식적 정당화 수준으로 끌어올리는 데에 초점을 두어야 한다. 이렇게 볼 때, 이들의 경우에도 귀납적인 방식으로 패턴을 탐구하도록 유도하는 것은 이들을 현재 정당화 수준에 머물게 하여 교육적으로 별 효과를 거두지 못할 수 있다.

둘째, 어떤 패턴을 일반화하거나 발견한 후 결과로 나온 식의 맞고 그름보다는 그 식의 타당성을 조리를 세워 설명하는 활동을 영재교육에서 중요시할 필요가 있다. 초등 수학영재들은 자기 자신뿐 아니라 상대방에게도 연역적인 설명을 요구하는 경향이 강하다. 사고 수준이 높은 아동일수록 귀납보다는 연역적으로 사고하려고 하며 이를 중요하게 생각한다. 따라서 어떤 패턴을 일반화하거나 발견한 후 결과로 나온 식의 맞고 그름보다는 그 식의 타당성을 조리를 세워 설명하는 활동을 영재교육에서 중요시할 필요가 있다. 초등 5-6학년의 수학영재들은 몇 가지 사례를 조사하여 몇 개의 수치를 얻기만 하면, 그로부터 수적 조작을 통해 일반화된 식을 찾아내는데 상당히 뛰어나므로, 일반화된 식의 옳고 그름에 초점을 맞추는 수업은 현재 가지고 있는 수적 조작을 통한 식 찾기 능력을 강화할 뿐 그 이상의 교육적 효과를 기대하기 어렵다. 자신의 해법에 대한 이유를 근거를 찾아 조리를 세워 논리적으로 설명할 수 있는 기회를 주고 그것을 확장하여 보다 일반화된 풀이에 대한 탐구를 하게 하는데 주안점을 두어야 한다. 초등 수학영재를 대상으로 한 패턴 과제 수업은 일반화된 식의 산출보다는 산출된 식의 정당화에 좀 더 초점을 맞추는 것이 바람직하다.

셋째, 관련이 적은 다양한 과제를 제시하는 것보다는 서로 관련이 많은 주제 중심의 탐구과제를 개발하여 사용하는 것이 영재교육에 효과적일 것으로 보인다. 초등 수학영재들에게서는 기존 지식과 새로운 문제 상황을 관련지어 생각하려는 경향이 관찰된다. 본 연구에서 제시한 공간의 분할 과제를 해결할 때에도 평면

6) 실험에 참가한 학생들이 정당화의 유형(수준)에서는 대부분 포괄적 정당화를 시도했으나 <표 5>에서 보듯이 실제로 문제해결에까지 성공한 것은 아니다. 이것은 문제해결의 성공여부에 따른 수학적 사고의 수준과 정당화의 수준은 다를 수 있음을 시사한다.

분할에서 사고한 방식이나 내용을 바탕으로 하여 차원을 확장해 나가려는 생각을 보인 학생들이 있었다. 이러한 사고를 촉진하기 위해서라도 관련이 적은 다양한 과제를 제시하는 것보다는 상호 관련이 많은 주제 중심의 탐구 과제를 개발하여 사용하는 것이 영재교육에 효과적일 것으로 보인다.

끝으로, 정당화에 초점을 둔 영재 수업을 하고자 할 때에는, 정당화 수준에 너무 큰 차이가 나지 않도록 집단을 편성하여 교육할 필요가 있다. 동일한 초등 수학영재라고 해도, 정당화 수준에 있어서는 상당한 차이가 있음이 확인되었다. 상호토론을 통해 이러한 차이가 다소 보완되는 면도 있으나, 사고의 수준이 다른 상태에서 접근 방법이 다른 경우에는 상호토론을 하게 해도 깊이 있는 토론이 이루어지지 못하고 개인별 발표로만 끝나는 경우가 적지 않다. 이것은 정당화에 초점을 둔 영재 수업을 하고자 할 때에는, 정당화 수준에 너무 큰 차이가 나지 않도록 집단을 편성하여 교육할 필요가 있음을 시사한다.

참고문헌

권성룡(2003). 초등학생의 수학적 정당화에 관한 연구. **초등수학교육, 7**(2), 85-99.

김성대(2003). **증명지도에서 정당화의 의미와 사례연구**. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

나귀수(1998). **증명의 본질과 지도 실제의 분석.** 서울대학교 대학원 박사학위논문.

송상헌(1998). **수학영재성 측정과 판별에 관한 연구.** 서울대학교 대학원 박사학위논문.

송상헌(2000). 수학 영재아들을 위한 행동특성 검사지의 개발과 활용에 관한 연구. **학교수학, 2**(2), 427-457.

송상헌(2006). **수학영재교육의 이해.** 이화여자대학교출판부. (근간).

신현용, 한인기(2001). 외국의 사례에 비춰본 우리나라의 제 7차 수학과 교육과정. 제19회 수학교육 심포지엄. 대한수학회.

Balacheff, N (1987). Processes of proof and situation of validation. *Educational Studies in Mathematics, 18,* 147-176.

Hanna, G. (1983). Rigorous proof in mathematics education. Toronto: Oise Press.

Knuth, E. J., & Elliott, R. L. (1998). Characterizing student understandings of mathematical proof. *The Mathematics Teacher, 91*(8), 714-717.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children.* The Univ. of Chicago Press.

Lannin, J. K. (2005). Generation and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking And Learning, 7*(3), 231-258.

Lee, K. H. (2005). Mathematically gifted students' geometrical reasoning and informal proof. *Proceedings of the 29th Annual meeting of the International Group of Psychology of Mathematics Education, 3,* 241-248.

Miyazaki, M (2000). Levels of proof in lower secondary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 41,* 47-68.

NCTM (1987). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (2000). *Principle and standard for school mathematics.* Reston, VA: The National Council of Teacher of Mathematics.

Polya, G. (2003). **수학과 개연 추론.** (이만기, 최영기, 진병기, 홍갑주, 김민정, 역). 서울: 교우사. (영어 원작은 1954년 출판).

Recio, A. M., & Godino, J. D. (2002). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematic, 48,* 83-99.

Simon, M. A., & Blume, G. W. (1996). Justification in the mathematics classroom : A study of prospective elementary teachers. *Journal of Mathematical Behavior, 15,* 3-31.

Analysis on the Types of Mathematically Gifted Students' Justification on the Tasks of Figure Division

Song, Sang Hun (Gyeongin National University of Education),
Heo, Ji Yeon (Banwol Elementary School),
Yim, Jae Hoon (Gyeongin National University of Education)

The purpose of this study is to find out the characteristics of the types(levels) of justification which are appeared by elementary mathematically gifted students in solving the tasks of plane division and spatial division. Selecting 10 fifth or sixth graders from 3 different groups in terms of mathematical capability and letting them generalize and justify some patterns. This study analyzed their responses and identified their differences in justification strategy.

This study shows that mathematically gifted students apply different types of justification, such as inductive, generic or formal justification. Upper and lower groups lie in the different justification types(levels). And mathematically gifted children, especially in the upper group, have the strong desire to justify the rules which they discover, requiring a deductive thinking by themselves. They try to think both deductively and logically, and consider this kind of thought very significant.

* **Key words** : justification(정당화), proof(증명), mathematically gifted(수학영재), figure division(도형 분할)

논문접수 : 2006. 1. 7
심사완료 : 2006. 2. 6