대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 16 권 제 1 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 16, No. 1, 59-78. Feb 2006

등가속도 운동에서 미적분의 기본 아이디어 학습 과정에 관한 사례연구

신 은 주*

본 연구에서는 먼저, 미적분에서 수학과 물리를 연결한 학습-지도의 필요성을 논의하고, 이를 위한 교수-학습 자료를 개발하여 제시한다. 그 후, 교수-학습 자료 중 하나를 활용하여 질적 사례연구를 하여 등가속도 운동을 탐구하는 활동에서 평균속도와 순간속도 개념이 발달되는 과정을 분석하였다. 연구대상자들은 등가속도 운동을 탐구하는 물리적 실험 상황에서 평균속도, 순간속도, 가속도 개념을 배웠다. 이 과정에서 학생들은 순간속도가 시간과 이동거리의 이차함수 그래프 위의 한 점에서 접선의 기울기를 의미한다는 점과 시간과 속도의 관계그래프 아래의 넓이 변화율이 이동거리의 변화율을 의미한다는 점을 이해할 수 있었다.

Ⅰ. 서 론

Principle and Standards for School Mathematics (2000)의 연결성 규준에는 과학과 수학은 밀접한 관련을 가지고 있어서 한 영역 안에 있는 내용을 다른 영역 안에서 탐구함으로써 통합하는 것이 자연스럽다고 서술되어 있다. 또한 과학적인 현상을 수학을 사용하여 체계적이고 양적으로 탐구함으로써 수학적 아이디어를 개발할 수 있으므로 과학과 수학을 통일된 지식의 유기체로 볼 수 있다는 점이 강조되고 있다. 이러한 관점에서 본 연구에서는 먼저, 고등학교 미적분에서 수학과 물리를 연결한 학습-지도의 필요성을 논의하고, 이를 위한 교수-학습 자료를 개발하여 제시하고자 한다.

전형적인 고등학교 수학교재에서는 미적분학을 학습할 때 변화하는 현상을 실험적으로 다루는 것을 배제하고, 그 속에 담겨있는 수학만을 다루는 데 초점을 두어 왔다. 따라서 어떤 기법이 소개되고 본문의 예제와 비슷한 일련의 연습문제를 통하여 이 기법을 익히도록 되어 있다. 그러나 학생들이 과학적인 상황에서 함수 관계를 다루면서 미적분학의 기법을 개발하도록 지도해야 한다(Callahan & Hoffman, 2004). 이러한 강조점에도 불구하고 우리나라 고등학교 미적분 교수-학습에 대한 문제점이 제기되어 왔다.

교과서에서 미적분은 추상수학의 형식적인 관점이 강하기 때문에 미적분이 어떤 현실적인 의미를 갖는가는 고려되지 않고 대수적 접근을 지나치게 강조한다. 학교수학에서 미적분 지도의 목적이 함수적 사고의 육성과 과학적 사고를 위한 도구를 개발하기 위한 것이라면, 미적분은 도입부터 현실과의 관계를 고려하여 실세계 맥락에서 학습되어야 한다. 특히, 물리와의 관련성을 통해서 보다 의미 있게 지도되어야 한다. Freudenthal은 미적분의 교육적 적절성과

* 이화여자대학교 강사, eunjushin@dreamwiz.com

물리학 연구에서 미적분의 중요성을 논하면서 물리학에서는 실제적인 상황과 그 의미가 분명하므로 양적인 해석과 함수적 해석이 혼동을 일으키지 않는다고 설명한다(우정호, 1998).

본 연구에서는 이와 같은 미적분 교수-학습에 대한 제안점을 반영하여 물리와 수학을 연결하여 등가속도 운동 상황을 모델화한 그래프에서 변화를 해석하면서 미적분의 핵심 아이디어를 학습할 수 있도록 자료를 개발하고자 한다. 그 후에, 이 교수-학습 자료를 연구도구로 활용하여 질적 사례연구를 하여 연구대상 학생들이 등가속도 운동을 탐구하는 물리적 실험 상황에서 순간속도가 시간과 이동거리의 이차함수의 그래프 위의 한 점에서 접선의 기울기를 의미한다는 점과 시간과 속도의 관계그래프 아래의 넓이 변화가 이동거리의 변화를 의미한다는 점을 학습하는 과정을 분석하고자 한다.

II. 수학과 물리의 연결성을 고려한 미적분 학습-지도

1. 미적분에서 수학과 물리의 연결성을 고려한 수학학습-지도의 필요성

끊임없이 변화하는 수량을 다룰 때는 변화와 변화율을 구분할 필요가 있다. 총알이 공기를 지나갈 때 총알이 지나가는 거리와 시간은 계속 변화하지만 총알이 사람에게 맞는 순간에 중요한 것은 맞는 순간의 속도인 시간에 따른 거리의 변화율이지 총 이동거리나 시간이 아니다. 따라서 변량의 변화율은 그들이 변화하고 있다는 사실만큼이나 중요하다. 또한 변화의 변화율 중에서 평균 변화율과 순간 변화율을 구분해야 한다. 어떤 물체가 다양한 속도로 움직이고 있을 때 거리의 순간변화율인 순간속도를 다룰 수 있어야 한다. 변화율에 대한 정보를 쉽게 알 수 있는 경우가 물체가 지나간 거리, 시간, 속도, 가속도의 관계를 고려하는 운동 상황에서이다. 또한 물리학의 가장 기본적인 탐구의 기반이 되는 뉴턴의 두 번째 법칙은 변화율에 대한 진술이다. 이 법칙은 힘의 크기를 알면 가속도, 즉, 시간에 대한 속도의 변화율을 알 수 있다는 것이다. 이처럼 과학 법칙을 도출하는데 미적분학이 사용되었으며 근대 문명과 문화의 창조에 지대한 역할을 해왔다. 미적분학은 논리보다는 물리적 논쟁과 직관을 통하여 발전되었다(Klein, 1953).

미적분학은 공학, 물리, 사회과학에서 실제적인 상황을 모델화하는데 사용되는 학문이다. 따라서 학생들은 과학 문제나 공학문제를 모델화 하는데 미적분학을 사용할 목적으로 미적분학 수업을 수강하게 된다. 천체 운동과 같은 문제에 미적분학을 응용하는 경우 뿐 아니라 유체역학이나 생물학에서도 미적분은 분석도구로서 유용하다. 따라서 학생들에게 다양한 문제 상황을 제시해주어 미적분이 무엇인지, 미적분을 어떻게 응용할 수 있는지를 이해하게 도와야 한다. 미적분학 개혁 운동은 학생들이 미적분학의 기본 정리를 이해하도록 개념적 이해를 강조하고, 그래프 표현과 대수적 표현과 기호적 표현 사이를 연결하게 하고, 실제적인 응용에 미적분을 통합하게 하는 목적을 가진다. 따라서 개념적 변화, 교수학적 변화, 학습환경에서의 변화 모두를 초래하게 된다(Davis, 2000; Gordon, 2000; Smith, 2000).

그러나 전형적인 고등학교 수학교재에서는 미적분학을 학습할 때 변화하는 현상을 실험적으로 다루는 것을 배제하고, 그 속에 담겨있는 수학만을 다루는 데 초점을 두어 어떤 기법이 소개되고 본문의 예제와 비슷한 일련의 연습문제를 통하여 이 기법을 익히도록 되어 있다.

뉴턴, 오일러나 베르누이에게 미적분학이 과학의 구조를 탐구하는 언어이자 도구였던 것처럼, 학생들에게도 마찬가지로 지도되어야 한다. 과학적인 상황에서 함수 관계를 다루면서 이러한 관계의 근원이 되는 질문에 대한 총체적인 관점에 따라 미적분학의 기법이 개발되도록 해야 한다. 이러한 학습은 수학에 대한 실험적 태도를 향상시키고, 미적분학을 언어와 도구로서 다루고, 과학적 상황을 정량적으로 분석하여 그 상황을 이해하고 수학적 모델을 만들어 해결책을 찾는 능력을 기르게 하여 결과적으로 과학적 대상에 수학을 적용할 수 있는 능력이 자연스럽게 배양하는데 도움이 된다(Callahan & Hoffman, 2004).

이러한 강조점에도 불구하고 우리나라 고등학교 미적분 교수-학습에 대한 문제점이 제기되어 왔다. 미적분의 응용에서 속도, 가속도, 이동거리, 넓이, 부피를 다루는 정도에 그치고 있고 미적분 교재는 학생들이 그 자체가 목적인 것으로 인식하게 하여 학생들은 미적분의 핵심을 이해하지 못하고 기계적으로 미분하고 적분하고 있다. 미적분 교재를 그 기원이나 연구목적을 고려하지 않고 수학 내적인 체계로서 보다 엄밀하게 논리적으로 지도하는 형식주의 교육에서는 많은 문제점이 초래된다. 미적분의 힘은 변화의 동역학에 관한 지적인 탐구를 하고 관찰 결과를 종합하는 능력을 개발시키므로 곡선의 그래프로 시작하여 곡선의 동역학을 미적분을 이용하여 연구하는 학습이 필요하다(우정호, 1998).

신현성(2000)에 의하면, 미적분에서 학생들이 이해할 수 있는 형태로 변화를 표현해야 하고, 기본이 되는 변화의 종류를 이해해야 하고, 실세계에서 일어나는 특별한 종류의 변화를 인식해야 하고, 이들 기법을 활용해야 한다. 중학교에서는 동물의 성장 곡선에서 여러 성질을 탐구하거나 식물의 성장, 온도 변화, 시간에 따른 달의 위치 데이터의 패턴을 정리하면서 변화관계를 이해하는 학습을 할 수 있다. 고등학교에서는 너무 단순한 실세계보다는 주식시장의 동향, 물리나 화학 실험실의 데이터를 분석하여 수학적 모델을 만들면서 미적분학을 학습할 수 있다. 실세계에서 얻은 실제 데이터를 이용하는 이러한 접근 방법은 수학과 과학을 통합하는 좋은 교수-학습 방법이 된다.

미적분의 기본 정리의 역사 발생적 근원에 대한 고찰은 미적분 책에서 경시되는 미적분의 이해하게 돕는다. Galileo는 속도가 $v=gt$로 자유 낙하하는 물체가 t 동안 낙하한 거리가 $s(t)=\int_0^t gx\,dx = g\frac{t^2}{2}$ 임을 밝혔다. 속도함수 $v=gt$의 정적분은 물체가 t 동안 낙하한 거리 $s(t)$이며, 속도 함수의 그래프 아래의 넓이에 해당된다. 이 넓이는 순간 t 에서 속도를 나타내는 수선인 불가분량의 합이 되고, 이동거리의 순간변화율은 수선의 길이인 순간속도가 된다. 이 과정에서 "함수 $f(x)$ 가 폐구간 [a, b]에서 연속이고 단조함수 일 때, $F(t)=\int_a^t f(x)\,dx$ 라고 하며, $F'(t)=f(t)$ 이다."라는 미적분학의 기본정리가 발견된다(우정호, 1998).

이와 같은 진술들은 미적분을 지도할 때 미적분학의 발달 과정을 고려하여 연역적이고 형식적인 접근보다는 물리에서 등속도나 등가속도 운동을 모델화하는 상황에서 변화와 변화율, 순간변화율과 평균변화율을 학습해야 한다는 점을 대변해주는 것이다. 수학과 과학의 연결성을 고려한 학습-지도는 수학이 과학의 도구적 수단이 된다는 것을 부각시키기 위한 것이 아니다. 물론 수학은 과학적 문제를 해결하는데 없어서는 안 될 필수 도구로서의 역할을 한다. 그러나 그 뿐 아니라 과학의 진보에서 수학이 발명된 것처럼 수학의 역사발생적 원리를 고려

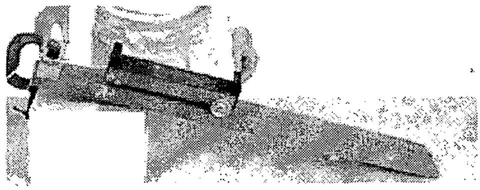
하면 과학과 수학의 연결성을 고려한 학습-지도는 의미 있는 교육적 기능을 가지게 된다. 학생들이 결과로서의 지식을 학습하지 않고 수학의 역사발생적 원리를 고려하여 수학학습을 하는 것의 중요성은 이미 수학교육에서 널리 강조되어 왔으므로 수학과 과학의 연결성을 강조한 수학 수업은 단순한 수단과 목적의 차원을 초월하는 것이다. 결국, 미적분에서 수학과 과학의 연결성을 강조한 수학 수업은 외재적 목적이 아닌 내재적 목적으로서, 수학과 과학의 발생적 측면과 수학과 물리에서 공통이 되는 개념, 원리, 법칙을 고려하여 학문으로서의 미적분을 가장 잘 학습-지도하기 위한 내재적 목적을 가지는 것이다. 본 연구에서는 이상에서 논의한 점들을 고려하여 수학과 과학의 연결성을 고려하여 미적분 단원 도입과정에서 활용할 수 있는 교수-학습 자료를 개발하고자 한다.

2. 등가속도 운동을 탐구하는 활동에서 학습하는 미적분 교수- 학습 자료

앞 절에서 고찰한 바를 기반으로 하여 물리와의 연결을 고려하여 물리적 실험 장치를 활용하여 등가속도 운동에서 변화를 모델화하면서 양적인 해석과 함수적 해석을 하는 미적분 지도에 초점을 둔다.

탐구활동: 빗면을 내려가는 수레의 운동에서 함수의 그래프를 그리고 해석하기

[그림 II-1]과 같이 책과 나무판을 이용하여 20cm 높이의 빗면을 만들고 시간기록계를 빗면의 위 끝에 클램프로 고정시킨다. 시간기록계의 먹지 아래로 지나는 종이테이프를 수레에 붙인다. 전원 스위치를 닫아 시간기록계를 작동시킨 후 수레를 놓으면 빗면을 내려가는 수레의 운동을 나타내는 타점이 종이테이프에 찍히게 된다. 타점이 종이테이프에 찍히면 이 종이테이프를 6타점 간격(0.1초) 마다 잘라서 모눈종이에 붙인다.



[그림 II-1] 시간기록계로 수레의 운동을 측정하는 실험

① 이 그래프에서 가로축과 세로축은 무엇을 나타내는가?

② 직선의 기울기는 무엇을 나타내며 얼마인가?

③ 이 그래프에서 수레의 속도는 어떻다고 말할 수 있는가?

④ 직선 아래의 넓이는 무엇을 나타내는가? 시간이 경과함에 따라서 직선 아래의 넓이는 어떻게 변화하는가?

⑤ 수레의 속도와 시간 사이의 관계 그래프는 어떤 모양인가?

⑥ 시간 간격을 줄여서 0.05초 간격마다 잘라서 위 실험을 한다면 위 과정에서 어떤 변화가 일어날 수 있는가? 시간 간격을 더 줄여서 0.0001초 간격마다 잘라서 위 실험을 한다면 위 과정에서 어떤 변화가 일어날 수 있는가?

⑦ 시간과 이동거리는 어떤 관계가 있는지, 이동거리는 어떻게 변하는지를 설명하여라.

이제 종이테이프를 6타점 간격(0.1초) 마다 위와 같이 자르지 않고, 0초부터 0.1초까지의 테이프를 하나 자르고, 다음에는 0초부터 0.2까지의 테이프, 0초부터 0.3초까지의 테이프, 0초부터 0.4초까지의 테이프를 각각 잘라서 붙인다.

① 이 그래프는 어떤 모양인가? 이 그래프에서 가로축과 세로축은 무엇을 나타내는가?

② 이 그래프에서 수레의 이동거리는 어떻게 변하는지를 설명하여라.

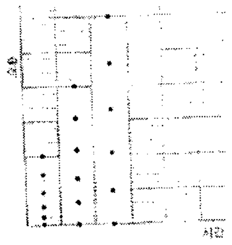
③ 수레의 이동거리와 시간 사이의 관계 그래프는 어떤 모양인가?

④ 이 그래프에서 수레의 속도는 어떻게 변하는지를 설명하여라. 0.2초 이동하는 동안 수레의 평균속력과 0.2초 때 수레의 순간속력을 구하여라.

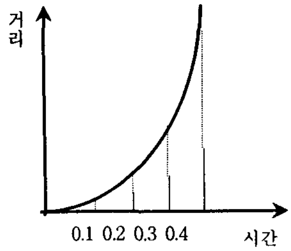
⑤ 시간 간격을 줄여서 0.05초 간격마다 잘라서 위 실험을 한다면 위 과정에서 어떤 변화가 일어날 수 있는가?

이상의 학습 과정에서 다음과 같은 개념을 학습할 수 있게 된다.

수레는 등가속도로 운동하므로 6타점 사이의 거리는 일정하게 변한다. 평균속도는 6타점 사이의 거리에서 시간 0.1초를 나눈 값이므로 6타점씩 자른 종이테이프의 길이에 비례한다. 자른 종이테이프의 길이가 일정하게 증가하므로 6타점씩 자른 테이프를 붙였을 때 세로축에 해당하는 종이테이프의 높이는 일정하게 증가한다. 그러므로 [그림 Ⅱ-2]의 그래프에서 속도는 일정하게 증가하고, 이 그래프 아래 넓이는 잘라서 붙인 종이테이프 전체 길이에 해당하므로 총 이동거리가 된다. 이 그래프의 기울기는 시간에 대한 속도의 변화이므로 가속도가 되고 기울기가 일정하므로 등가속도 운동이 된다. 시간과 이동거리의 관계그래프는 [그림 Ⅱ-3]과 같이 이차함수 모양이다.



[그림 Ⅱ-2] 수레가 0.3초 동안 이동 시 종이테이프를 붙인 모양



[그림 Ⅱ-3] 등가속도 운동에서 시간과 이동거리의 관계그래프

점선으로 표시된 부분은 각각 0.1초까지 이동한 거리에서 0초 때 거리를 뺀 값, 0.2초까지 이동한 거리에서 0.1초까지 이동한 거리를 뺀 값, 0.3초까지 이동한 거리에서 0.2초까지 이동한 거리를 뺀 값, 0.4초까지 이동한 거리에서 0.3초까지 이동한 거리를 뺀 값이다. 따라서 이 각각의 길이에서 시간 0.1을 나누면 각 구간에서 평균속도가 구해지고, 점선으로 표시된 부분의 길이에 비례하게 된다. 이 길이가 일정하게 증가하므로 속도가 일정하게 증가한다는 것을 이해할 수 있다. 따라서 이 그래프는 등가속도 운동의 그래프라는 점을 이해하고 이 그래프에서 점선의 길이의 변화를 보면서 시간과 속도의 그래프를 그릴 수 있다. 또한 등속도 운동의 경우와 마찬가지로 점선으로 표시된 부분의 길이를 모두 더하면 0.4초 동안 이동한 총 이동거리가 된다는 점을 학습할 수 있다. 다음에는 종이테이프를 더 작은 타점 간격(3타점)으로 잘라서 위와 같은 실험을 하고, 또 더 작은 간격(1타점)으로 잘라서 위와 같은 실험을 한다. 각 경우에 그래프에서 나타나는 변화를 분석한다. 시간 간격을 더 작게 하여 실험을 하였을 때 종이테이프를 붙인 그래프가 [그림 Ⅱ-3]의 이차곡선이 되고, 시간의 간격이 줄어들수록 시간 간격 동안 이동한 평균속도는 일정한 순간의 속도인 순간속도와 가까워진다는 점을 학습할 수 있게 된다. 시간과 속도의 관계그래프 아래의 넓이가 이동거리와 같아진다는 점을 이해하

고, 시간 간격을 더 줄였을 때 넓이는 일정한 시각에서 속도를 나타내는 수선의 합이 되고, 넓이의 변화는 일정한 시각에서 속도와 같아진다는 점을 이해하도록 유도할 수 있다.

이와 같은 활동은 속도함수 $v = gt$ 의 정적분은 물체가 t 동안 낙하한 거리 $s(t)$ 이며, 속도 함수의 그래프 아래의 넓이에 해당되고, 이 넓이는 순간 t 에서 속도를 나타내는 수선인 불가분량의 합이 되고, 이동거리의 순간변화율은 수선의 길이인 순간속도가 된다는 점을 학습하기 위한 기반이 된다. 따라서 위와 같은 탐구활동은 "함수 $f(x)$ 가 폐구간 [a, b]에서 연속이고 단조함수 일 때, $F(t) = \int_a^t f(x)dx$ 라고 하며, $F'(t) = f(t)$ 이다." 라는 미적분학의 기본 정리를 이해하는 수학학습에 도움이 된다.

III. 연구방법 및 절차

1. 연구방법

본 연구자가 과제의 상황만 설명해 준 후에 연구자가 이 활동지에 기반을 두고 연구대상 학생들과 반 구조화된 면담을 하는 방법으로 질적 사례연구를 하고 수집한 자료를 분석한다. 본 사례연구에서 학생들이 순간속도가 시간과 이동거리의 이차함수 그래프 위의 한 점에서 접선의 기울기를 의미한다는 점과 시간과 속도의 관계그래프 아래의 넓이의 변화가 이동거리의 변화를 의미한다는 점을 학습하는 과정을 분석하고자 한다. 이러한 학습과정은 미적분의 기본적인 개념을 배우는데 토대가 된다. 따라서 두 명의 중학교 3학년 학생들이 등가속도 운동 상황을 탐구하는 단일 사례에서 학생들의 활동을 심도 있게 관찰하여 연구목적에 부합되는 자료를 수집하고, 이 자료를 근거로 하여 연구문제를 분석하고 기술하고자 한다.

사례연구는 맥락 속에서 풍부한 여러 가지 정보원들을 포함하는 하나의 '경계 지어진 체계(bounded system)'나 하나의 사례, 또는 여러 사례들을 심층적으로 분석하는 것이다. 면접, 문서기록, 관찰, 물리적 인공물, 문서 등 자료 수집원이 다양하고, 사례들과 맥락에 대한 기술을 하면서 이슈를 개발하고, 개발한 이슈를 상세하게 기술하게 된다(Creswell, 1998). 특히, 결과보다는 모델이 개발되는 과정에 관심을 두고, 사례 자체를 충실하게 이해하기 위하여 심층적 서술(thick description)을 하였다.[1] 사례 안에서 표본을 선택하는 방법으로는 연구자가 발견과 이해와 통찰을 얻기 원한다는 가정을 기초로 하여 표집하는 의도적 표집(purposeful sampling) 방법을 사용하였다.

2. 연구대상 및 연구절차

연구 대상은 서울시 소재의 한 중학교 3학년 남학생 두 명으로서 성적은 상위권에 속하고 과학반에서 활동을 하고 있는 학생들이다. 연구를 시작하기 전에 연구 참여에 대한 동의를 구두로 받았으며 모두 적극적으로 참여하였다. 이 학생들은 과학 시간에 등속도 운동을 학습한 상태이고 등가속도 운동은 아직 배우지 않았으며 수학 시간에 일차함수와 이차함수를 학습한 상태이다. 학생 갑과 을 모두 자신의 생각을 주저 없이 표현하고 대화에 적극적으로

1) 연구되는 사례에서 특정한 행동 양식이 어떤 의미를 가지는지에 대하여 아주 상세하게 서술하는데 Greetz 는 이를 심층적 서술이라고 정의한다. 행동과 사건 사이의 연결성을 확인하여 사례의 의미와 맥락을 상세하게 서술함으로써 의미가 풍부하고 맥락에 민감한 모델을 얻을 수 있다(Geertz, pp. 24-28).

참여하였다. 본 사례연구는 2005년 10월 말 1 차시에 걸쳐서 행해졌으며 2-3 시간 정도가 소요되었다. 연구자는 참여관찰을 하면서 중재자, 안내자, 조언자 역할을 하였고 연구자의 편협한 관점이나 감정을 자제하고 객관성과 중립성을 유지하려고 노력하였다. 상황에 따라서는 학생들의 설명이나 비형식적인 개념이 형식적인 개념으로 발달할 수 있도록 보다 능동적으로 활동에 개입하여 학생들을 안내하였다. S대학교 교육대학원 수학교육과 석사과정에 있는 두 명의 학생이 연구조교로서 본 연구자의 연구를 도왔다.

3. 자료수집 및 분석

사례에 대한 철저한 묘사를 시도하기 위하여 광범위한 자료 수집 방법을 사용하였다. 자료수집은 관찰, 과제에 기반을 둔 반 구조화된 심층면담, 학생들의 노트를 이용하였다. 주의를 흐트러트리지 않는 조용한 장소를 면접 장소로 정하고 나서 연구에 활용할 실험도구, 정보의 정확한 기록을 위해 필수적인 녹음기를 설치하였다. 참여관찰과 과제에 기반을 둔 반 구조화된 심층면담에서 얻어지는 데이터를 수집하기 위하여 현장 노트와 녹음기를 적절하게 사용하였다. 현장 노트에는 연구대상의 비언어적 의사소통이나 행동과 연구자의 경험과 느낌을 반영하는 기록을 포함시켰다. 관찰과 면담 결과에서 얻은 자료를 분석하는 방법으로는 먼저, 연구자가 기록한 대로 사례에 대한 사실들을 진술하는 내러티브 기술(narrative description)을 사용한 후, 단일 사례 내에서 주제를 확인하는 사례 내 분석을 하였다(Creswell, 1998). 이 두 가지 방법을 적용하여 다음과 같이 자료를 분석하였다. 먼저, 사례 별로 오디오 녹취물 자체를 순서와 내용에 집중하여 기술한 파일을 만든 후에 현장 노트와 오디오 녹취물에서 얻은 데이터, 학생들의 노트를 함께 비교하면서 파일을 재조직하였다. 다음에는, 전체 텍스트를 읽으면서 연구문제를 분석하였다.

Ⅳ. 사례연구 분석 및 논의

본 장에서는 사례연구에서 수집한 자료에 기반을 두고 연구문제를 분석한다. 연구대상 학생들이 시간과 이동거리의 이차함수 그래프 위의 한 점에서 접선의 기울기를 의미한다는 점과 시간과 속도의 관계그래프 아래의 넓이 변화율이 이동거리의 변화율을 의미한다는 점을 학습하는 과정을 분석하고자 한다. 학생들의 활동을 다음과 같은 순서로 구분하여 분석하였다.

1. 사례연구 분석

가. 시간과 속도의 관계그래프 그리기

다음은 빗면에서 미끄러지는 수레의 운동을 타점기록계로 기록하였을 때 타점 간격이 등속운동에서의 타점 간격과 어떤 차이가 있는지를 논의하는 과정에서 나눈 대화이다.

연구자: 수레의 타점이 등속운동과 어떤 차이가 있을까?
학생 갑: 등속운동에서는 일정하고
연구자: 여기서는 요?
학생 갑: 점점 늘어나지 않나?
학생 을: 멀어지게, 간격이요.

이 대화는 학생들이 수레가 빗면에서 미끄러지는 상황에서 찍혀지는 타점의 간격을 등속운동에서 타점 간격과 비교할 수 있음을 보여주고 있다. 학생들은 수레가 점점 빨리 미끄러지

므로 타점 간격이 멀어진다고 설명하고 있다. 타점 사이의 간격과 수레의 속력을 연결하여 사고한 것이다. 이제 학생들은 물리적인 실험을 하고 등가속도 운동을 그래프로 모델화하게 된다. 다음은 타점이 찍힌 종이테이프를 모눈종이에 붙이고 축을 설정하는 과정에서 나눈 대화의 일부분이다.

(빗면에서 수레가 미끄러지는 실험을 한 후에 학생 갑이 타점이 찍힌 종이를 6개 타점씩 자르고 갑과 을이 모눈종이에 붙인다)
연구자: 이렇게 보면?(종이테이프를 세로로 붙인 경우를 가리키며)
학생 갑: 가로가 시간이고 학생 을: 세로는 속도
학생 갑: 속도?
연구자: 그럼 속도 말고 다른 말로하면?
학생 을: 거리
연구자: 어떤 거리? 임의의 거리는 아니죠?
학생 을: 이동거리 학생 갑: 단위 시간 당 이동거리요.
연구자: 그렇지요. 그럼 여기서는 그 단위시간이 뭐예요?
학생들: 0.1초요.
연구자: 그럼 0.1초당 이동거리죠. 다른 말로 표현하면?
학생 을: 속도요.

학생들은 종이테이프의 길이를 가로로 붙이려고 하다가 다시 상의하여 세로로 붙이고 나서 축을 설정한다. 연구자가 만일 종이테이프의 길이를 가로로 붙이면 축이 어떻게 되냐고 묻자 학생 갑은 가로축을 거리로, 세로축을 속도로 답하고 학생 을은 세로를 시간으로 해야 한다고 답한다. 아직은 종이테이프의 가로와 세로의 길이를 잘 파악하지 못하고 있는 상태이다. 연구자가 종이테이프의 길이를 세로로 붙이면 어떻게 되냐고 묻자 학생 갑은 가로가 시간이고, 학생 을은 세로는 속도라고 답한다. 학생 갑이 세로가 속도인 것을 이해 못하여 속도를 다르게 표현해보라고 하자 학생 을이 거리라고 하여 연구자가 어떤 거리냐고 물었다. 학생 을은 이동거리라고 답하고 이제 학생 갑은 상황을 이해하여 단위 시간 당 이동거리라고 답하였다. 연구자가 단위시간의 의미를 묻자 학생들은 0.1초라고 답하고 0.1초당 이동거리를 속도로 이해하였다. 이 학생들은 단위 시간인 0.1초당 이동거리를 속도로 이해하게 된 것이고 종이테이프를 붙인 그래프와 수레의 운동 상황을 연결하여 축을 설정할 수 있게 된 것이다.

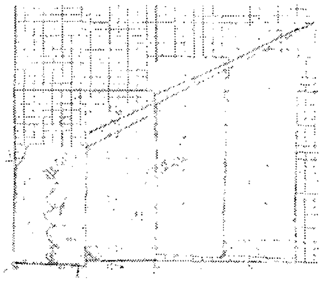
나. 시간과 속도의 관계그래프에서 변화를 해석하기

다음은 시간과 속도의 관계그래프에서 단위 시간 당 이동거리인 속도가 어떻게 증가하는지를 해석하는 과정에서 이루어진 대화이다.

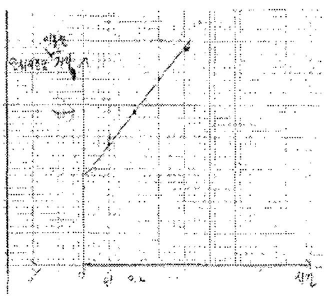
학생 갑, 을: (모눈종이에다 매 0.1 초마다 거리의 눈금을 임의로 지정하여 쓴다) 4, 5, 6, 7
학생 갑: 여기 속도는 4칸하고 0.1초면 40요.
연구자: 그럼 그래프로 표현하면 어떻게 될까요?
학생 을: 점점 증가해요.
연구자: 이 모눈종이 상에서 먼저 그려보면 어떻게 하면 될까요?
학생 갑: 점들을 이어요.
연구자: 어느 점들을 이을까?(학생 갑이 모눈종이 위에 붙인 종이테이프위에 찍혀진 타점을 연결한다. [그림 Ⅳ-1]의 그래프가 그려진다.)
연구자: 이걸 그래프로 만들면?(학생 갑과 을이 [그림 Ⅳ-2]의 그래프를 그린다. 원점은 연결하지 않고 0.1초부터 그린다)

학생들은 모눈종이의 세로 눈금의 단위를 임의로 정한 후에 이 눈금을 읽으면서 0.1초 때 속도를 구하였다. 그리고 종이테이프의 길이의

변화를 보면서 속도가 일정하게 증가할 것이라고 답하였다. 이 학생들은 종이테이프의 길이 변화를 속도의 변화와 연결하여 사고한 것이며 시간과 속도의 관계그래프에서 변화를 해석하는 능력을 함양하게 된 것이라고 할 수 있다. 시간과 속도의 그래프를 그리라는 질문에 대해 학생 갑이 모눈종이 위에 붙인 종이테이프 위의 특정한 점들을 연결하여 [그림 Ⅳ-1]와 [그림 Ⅳ-2]와 같은 그래프를 그리게 되었다.



[그림 Ⅳ-1] 등가속도 운동을 모델화한 그림



[그림 Ⅳ-2] 등가속도 운동에서 시간과 속도의 관계그래프

연구자: 이게 어떤 운동이에요?
학생 을: 등가속요.
연구자: 그럼 가로축이? 학생 갑: 시간요.
연구자: 세로축이?
학생 갑: 거리요. 학생 을: 속도요.
학생 갑: 속도가 되나? 거리? 속도?
연구자: 아까 0.1초당 이동한 거리라고 했죠?
학생 갑: 속도요.
연구자: 그럼 이 점의 의미는? 0.1초 때, 0.2초 때, 0.3초 때, 0.4초 때 속도를 연결했죠? 그럼 0초 때를 생각하면? 0초 때 속도가 없어요?
학생 을: 정지해 있어요.
연구자: 그럼 계속 정지해 있어요? 움직이죠? 그럼 한 순간에 어떤 초기 속도가?
학생 갑: 확 그냥 주어져요.
학생 을: 아 예
연구자: 그럼 여기를 어떻게 연결해요.
학생 을: 여기가 (직선을 유지한다는 의미를 표현함) 일정하게 연결해요.
학생 갑: (직선을 만들면서 0초일 때 임의의 속도를 정하여 해당하는 점을 연결한다.)

이 대화에서 알 수 있듯이 학생들은 수레의 운동을 모델화한 종이테이프 그래프에서 특정한 점들을 기준으로 하여 등가속도 운동에서 시간과 속도의 일반화된 그래프를 개발하게 되었다. 학생 갑이 종이테이프 위의 점들 연결한 방법을 잘 설명하였다. 학생 갑은 0.1초, 0.2초, 0.3초, 0.4초 일 때 속도에 해당하는 점들을 연결한 것이라고 설명하였다. 그러나 0초 일 때를 연결하지 않아서 수레의 운동 상황과 연결하여 그래프에서 0초 일 때 세로축의 의미를 다시 한 번 고려하게 질문하였다. 학생들은 잠시 혼동이 있어서 세로축이 0초 때 거리라고 했다가 다시 0.1초 당 이동거리인 속도라고 답하였다. 그래프에서 0초 일 때 점을 찍는 과정에서 물리적인 상황을 고려하는 과정이 필요하였다. 이 때 그래프 위의 점들은 실세계 현상을 표현하는 구체적인 대상이 되는 것이다. 학생들은 수레가 미끄러지려면 0초 일 때 초기속도가 있어야 하므로 임의의 속도가 있어야 하고 그래프는 직선으로 그려져야 한다는 점을 고려하여 0초 일 때 속도를 정하여 그래프를 그리게 되었다. 학생들에게 그래프는 탈맥락화된 추상적 기호가 아니라 계속 수레의 운동 상황을 반영하고 있는 실제적인 대상으로서 기능을 하였다. 이제 이 그래프에서 기울기의 실제적인 의미를 이해하는 활동을 하게 된다.

연구자: 기울기의 의미가 뭐예요? 이 그래프에서
학생 갑: 속도.
학생 을: 가속도요.
연구자: 그럼 수레가 빗면을 내려오는 운동이 어떤 운동이에요?
학생 을: 등가속도 운동이요.
연구자: 등가속도 운동이 어떤 운동이에요?
학생 갑: 점점 일정하게 올라가는 운동이요?
연구자: 뭐가 올라가요?
학생 을: 속도요.
연구자: 그럼 물리적으로는 속도가 일정하게 증가하는 운동이죠? 그래서 등가속도 운동이에요. 그럼 수학적으로는 요. 내가 아까 기울기의 의미를 물어보았죠? 기울기가 뭐라고 배웠어요?
학생 갑: x 축의 증가량 분에 y축의 증가량 요.
학생 을: 네
연구자: 그럼 여기서는 기울기가?
학생 갑: 그니까 시간 분에 속도요.
연구자: 그렇죠. 시간의 증가량분에 속도의 증가량 요. 그럼 기울기가 어때요?
학생 을: 기울기가 일정해요.

학생들은 시간과 속도의 관계그래프에서 기울기가 점점 일정하게 올라간다고 설명하였다. 그리고 기울기의 의미를 속도나 가속도로 대답을 하였으므로 가로축과 세로축의 의미를 다시 한 번 상기시키자 학생 갑은 기울기가 가속도가 된다는 점을 이해하게 되었다. 그리고 수레가 빗면을 내려오는 운동이 등가속도 운동이므로 속도가 점점 일정하게 올라가는 운동이라고 답을 함으로써 그래프에서 기울기의 변화와 물리적인 운동 상황에서 속도의 변화, 가속도의 일정성을 연결하여 이해하게 되었음을 알 수 있다. 그 후 기울기의 수학적 의미를 묻자 학생 갑이 x축의 증가량 분에 y축의 증가량이라고 답하고 이 그래프에서 기울기는 시간 분에 속도라고 설명하였다. 학교에서 학습한 기울기의 수학적 의미를 시간과 속도의 관계그래프에서 기울기의 실제적인 의미와 연결하게 된 것이다.

다. 평균속도와 순간속도 이해하기

다음은 시간과 속도의 관계그래프에서 평균속도와 순간속도의 차이를 이해하는 과정에서 이루어진 대화이다.

연구자: 그럼 0에서 0.2초 동안 이동한 동안의 속도와 0.2초 때 속도의 차이가 뭘까?
학생 을: 동안에는 평균이고
학생 갑: 이거는 그냥 이 때의 속도
연구자: 이거는 0.2초가 딱 된 순간의 속도죠?
학생 갑, 을: 네.
학생 을: 네 그냥 이 때의 속도요.
연구자: 네 그래서 여러분이 그냥 이 눈금의 y 좌표를 읽었죠? 그럼 0에서 0.2초 동안 이동한 동안의 속도를 구하라하면?
학생 을: 중간지점을 구해요.
연구자: 어떤 식으로?
학생 을: 여기요(0.1초 일 때를 가리킨다)
학생 갑: 40 요.
연구자: 그럼 평균속도와 순간속도가 이해되나요? 0에서 0.2초 동안 평균속도를 기울기로 이해하면? 기울기가 뭐라고 했지?
학생 을: x축이 0.2 증가하고 y축이 2증가하고?
학생 갑: 0.2분에 2요.

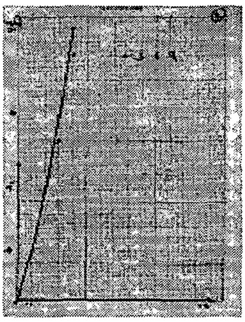
평균속도와 순간속도의 차이를 이해하도록 돕기 위해 연구자가 0에서 0.2초 동안 이동한 동안의 속도와 0.2초 때 속도의 차이를 물었다. 학생 을이 동안에는 평균이고, 학생 갑이 0.2초 때는 그냥 이 때의 속도라고 표현한 점으로 미루어볼 때 순간속도의 의미를 이해한 것이라고 할 수 있다. 연구자가 0에서 0.2초 동안 이동한 동안의 속도를 구하라고 하자 학생 을은 중간지점을 구한다고 설명함으로써 평균속도를 이해하고 있음을 보여주었다. 학생 을이 그래프의 중간지점을 손으로 지적하였고 학생 갑이 눈금을 읽어서 평균속도가 40이라고 답하였다. 연구자가 0에서 0.2초 동안 평균가속도를 기울기로 이해하도록 유도하기 위해 질문을 하자

학생 을이 "x축이 0.2 증가하고 y축이 2증가하고" 라고 답하고 학생 갑이 "0.2분에 2" 이라고 답을 함으로써 기울기와 평균가속도를 연결하여 이해하고 있음을 보여주고 있다.

라. 시간과 이동거리의 관계그래프 그리기

다음은 종이테이프를 다른 방법으로 붙이게 하여 시간과 이동거리의 관계그래프를 모델화하도록 유도하는 과정에서 이루어진 대화이다.

학생 갑: 이렇게 자르고 또 자르고 또 자르고 (종이테이프를 자르는 상황을 설명한다. 자르는 상황을 이해한 후에 모눈종이에 눈금을 설정한다)
연구자: 그렇죠. 세로축의 의미가 뭘까? 이 점의 의미가 뭘까?
학생 갑: 0.1초 동안 이동한 거리요.
연구자: 그럼 세로축이?
학생 갑: 가속도? 이동한 거리요.
연구자: 거리는 거리인데 아까하고 상황이 어떻게 틀려요?
학생 을: 아까는 단위 시간당 거리요.
연구자: 그렇죠. 그래서 단위 시간당 이동한 거리가 속도가 된 거죠? 지금은?
학생 갑: 그냥 이동한 거리



[그림 Ⅳ-3] 등가속도 운동에서 시간과 이동거리의 관계그래프

이 상황은 시간과 총 이동거리의 관계그래프를 유도하기 위하여 종이테이프를 자르는 방식을 변화시킨 것이다. 0에서 0.1초, 0.1초에서 0.2초, 0.2에서 0.3초, 0.3초에서 0.4초 이동한 종이테이프를 자른 후에 이를 모눈종이에 붙이는 상황을 상상하면서 시간과 이동거리의 그래프를 그리게 하였다. 이 경우 실제로 종이테이프를 모눈종이에 붙이는 활동은 하지 않았다. 학생들은 매 0.1초마다 이동한 거리를 고려한 후에 누적거리를 계산하여 그래프위에 점으로 표시하고 선분으로 연결하여 [그림 Ⅳ-3]과 같은 그래프를 그렸다. 그 후에 연구자는 가로축과 세로축이 의미하는 양을 질문하였다. 학생들은 이동한 거리라고 답함으로서 시간과 속도의 관계그래프에서 세로축에 해당하는 0.1초당 이동한 거리와 이 이동거리와의 차이를 이해하였다. 수레가 이동하는 상황을 묘사한 종이테이프라는 실제적인 관찰의 대상이 있었고 이를 잘라서 모눈종이 위에 붙여보는 이전 활동이 내면화되어 실제적인 활동을 하지 않고서도 누적거리를 고려하여 시간과 이동거리의 관계그래프를 그리게 된 것이다. 그러나 학생들은 점들을 선분으로 연결하였으므로 다음 대화에서 연구자와의 대화를 통하여 그래프를 수정하는 활동을 하게 된다.

마. 시간과 이동거리의 관계그래프에서 변화를 해석하기

다음은 시간과 이동거리의 관계그래프에서 거리의 변화와 속도의 변화를 해석하는 과정에서 이루어진 대화이다.

연구자: 어떤 식으로 변해요? 처음 0.1초 동안에는, 다음 0.1초 동안에는 어떻게 변해요?
학생 갑: 4칸, 5칸, 6칸, 7칸
학생 을: 점점 더 증가해요
학생 갑: 증가되는 양이 증가되면서 증가 되요.
연구자: 그렇죠? 아까는 증가양이 같았죠? 이거는
학생 갑: 칸의 증가양이 점점 늘어나요
연구자: 그럼 아까는 증가양이 같으니까 직선이

되었죠? 이거는?

학생 갑: 기울기가 더 클 거 같은데 (점 사이를 선분으로 연결)

학생 을: 직선이 안 되고 곡선이 되요(다시 곡선으로 그리되 원점을 연결 안 함)

연구자: 그럼 원점은?

학생 갑: 0초 때 거리니까 거리가 없어요.

연구자: 만약 01.초 간격으로 자르지 않고 더 작은 간격 0.05초, 0.001초 간격으로 자르면 그래프에 어떤 변화가 있을까요?

학생 갑: 곡선이 되서 점점 올라가요.

연구자는 학생들이 시간과 총 이동거리의 관계그래프에서 변화를 해석하게 유도하였다. 학생들은 총 이동거리에 해당하는 눈금을 4, 9, 15, 22로 읽고, 매 0.1초 마다 눈금의 변화를 4, 5, 6, 7로 읽었다. 학생 갑이 이동거리의 눈금을 보면서 "증가양이 증가되면서 증가된다."고 답하였다. 그리고 갑이 이 점들을 선분으로 연결하자 을이 곡선이 되어야 한다고 답을 하였다. 을은 증가양이 일정하지 않고 점점 늘어나므로 직선이 되지 않고 곡선이 되어야 한다는 점을 이해한 것으로 볼 수 있다. 학생들이 0초 일 때를 연결하지 않아서 의미를 묻자 0초 때 거리가 없으므로 원점이 연결되어야 한다고 답하였다. 선분으로 연결한 그래프가 곡선이 되는 과정에 대한 이해를 돕기 위해 연구자가 만약 01.초 간격으로 자르지 않고 더 작은 간격 0.05초, 0.001초 간격으로 자르면 그래프에 어떤 변화가 있을까를 묻자 학생 갑은 곡선이 되서 점점 올라간다고 답을 하였다. 이제 학생들은 시간과 이동거리의 관계그래프에서 거리의 변화를 해석할 수 있게 된 것이다. 또한 그래프가 곡선이 되는 이유를 이해한 것이라고 할 수 있다.

바. 시간과 속도의 관계그래프 아래의 넓이 변화와 이동거리 변화를 연결하여 사고하기

다음은 시간과 속도의 관계그래프 아래의 넓이의 변화와 이동거리의 변화를 연결하여 사고하도록 유도하는 과정에서 이루어진 대화이다.

연구자: 그렇죠? 그럼 이 시간과 속도의 그래프에서 이 직선 아래의 넓이가 무엇을 의미할까요?

학생들: 답이 없다

연구자: 그럼 이 모눈종이를 붙인데서 생각해 봐요

학생 갑: 아 총 이동거리요.

연구자: 그렇죠. 종이테이프를 잘라서 붙인 거니까요. 그럼 이 그래프에서 0에서 0.1초까지의 넓이, 0.1초에서 0.2초까지의 넓이, 0.2초에서 0.3초까지의 넓이, 0.3초에서 0.4초까지의 넓이를 생각해 봐요. 어떻게 변해요?

학생 갑: 점점 늘어나면서 늘어나요.

연구자: 그렇죠? 이 넓이가 총 이동거리니까, 아까 시간하고 이동거리의 그래프에서 어떻게 거리가 변한다고 했죠?

학생 을: 증가량이 늘어나면서 늘어나요.

연구자: 그럼 여기서하고 연결이 되죠. 이거는 넓이로 해석한 거죠? 그럼 등속도 운동에서는 시간하고 속도가 어떻게 그려져요?(상수함수를 그린다) 그럼 여기서는 넓이가 어떻게 변해요.

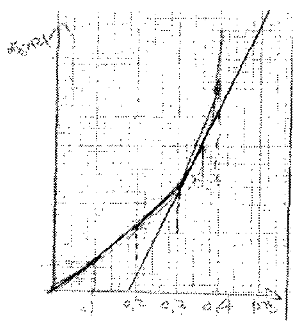
학생 을: 똑같이 증가해요.

이제 연구자는 시간과 속도의 관계그래프 아래 넓이의 의미를 이해하게 유도질문을 하였다. 학생들이 어려워하였으므로 연구자가 수레의 운동에서 종이테이프를 붙인 상황을 연결하여 사고하게 하자 학생 갑이 시간과 속도의 관계그래프 아래 넓이가 총 이동거리가 된다고 답을 하였다. 시간과 속도의 그래프 아래 넓이는 거리라는 점을 공식으로 외우는 형식적인 수업 방법에서 학생들이 실제적인 의미를 이해하지 못하는 문제점이 발생되는 점을 감안한다면 이 연구에서와 같은 교수-학습 방법은 교육

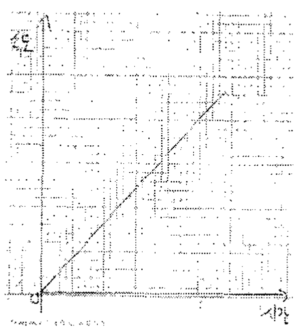
적 의의를 가지는 것이다. 그 후 이 넓이의 변화를 묻자 학생 갑이 증가량이 늘어나면서 늘어난다고 잘 대답하였고, 연구자가 이를 시간과 이동거리의 관계그래프에서 이동거리의 변화와 연결하게 유도하자 학생 을은 이동거리의 증가량이 늘어나면서 늘어난다고 잘 대답하였다. 이제 학생들은 시간과 속도의 관계그래프 아래 넓이의 변화율과 시간과 이동거리의 관계그래프에서 이동거리의 변화율을 연결하여 이해하게 된 것이다.

사. 시간과 이동거리의 관계그래프에서 평균속도 이해하기

다음은 시간과 이동거리의 관계그래프에서 평균속도를 이해하도록 유도하는 과정에서 이루어진 대화이다.



[그림 Ⅳ-4] 등가속도 운동에서 시간과 이동거리의 관계그래프



[그림 Ⅳ-5] 등가속도 운동에서 시간과 이동거리의 관계그래프

연구자: 점선의 길이가 어떻게 변해요?
학생 갑: 점점 늘어나요.
학생 을: 일정한 간격으로 늘어나요.
연구자: 이 그래프(시간과 이동거리의 관계그래프)에서 시간과 속도의 관계그래프를 어떻게 그리면될까요?
학생 갑: 증가하는데
연구자: 시간과 이동거리의 그래프가 시간과 속도의 그래프와 어떻게 연결될까? 이 그래프에서 0에서 0.1초 동안 이동한 거리가 뭐예요?
학생 갑: 여기서 여기요(모눈종이 위의 눈금을 지적한다.)
연구자: 평균속도가 뭐지?
학생 을: 시간의 변화분에 거리의 변화요.
연구자: 그럼 여기서는 시간의 변화가
학생 갑: 시간 변화는 같고 거리 변화는 이 길이요(모눈종이 위에서 길이를 가리킨다)
연구자: 그럼 평균속도는?
학생 갑: 조금 씩 늘어나요.
학생 을: 분모는 같고 분자가 늘어나요.

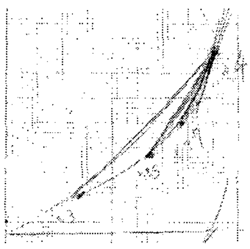
연구자는 시간과 이동거리의 관계그래프를 그리게 한 후에 이 그래프에서 평균속도를 이해하도록 유도하였다. 따라서 먼저, 이 그래프에서 매 시간 0.1초 간격마다 이동한 거리를 점선으로 표시하게 하였다. 그리고 점선의 길이의 변화를 살펴보게 하였다. 학생들은 그래프에서 매 0.1초 마다 이동한 거리를 점선으로 표시한 후에 점선이 일정한 간격으로 늘어난다고 답을 하였다. 0에서 0.1초에서 평균속도를 묻자 거리 1칸을 시간 0.1초로 나누어 10이라고 대답하였고 다음 0.1초에서 0.2초에서 평균속도는 시간 변화는 0.1초로 같고 거리가 변한다고 답을 하면서 모눈종이에서 거리의 변화에 해당하는 점선의 길이를 손으로 가리켰다. 또한 점선의 길이가 늘어나므로 평균속도가 늘어난다고 답을 하였다. 이제 학생들은 평균속도의 변화를 그래프에서 점선의 길이 변화와 연결하여 사고하게 된 것이다. 이러한 활동으로 학생들은 차후에

임의로 그려진 시간과 이동거리의 관계그래프에서 단위 시간당 거리의 변화를 고려한 후에 이를 속도와 연결하여 시간과 속도의 관계그래프를 그릴 수 있게 된다고 볼 수 있다. 이러한 능력은 미분의 기본이 되는 원시함수의 그래프에서 변화율을 해석하여 미분함수의 그래프를 그리는 능력이라고 할 수 있다.

아. 시간과 이동거리의 관계그래프에서 순간속도 이해하기

다음의 대화는 시간과 이동거리의 관계그래프에서 순간속도를 이해하도록 유도하는 과정에서 이루어진 대화이다.

연구자: 그럼 우리가 순간속도로 그렸어요? 평균속도로 그렸어요?
학생 갑: 평균속도요.
연구자: 그럼 이 그래프에서 평균속도는? 수학에서 어떻게 되요?
학생 갑: 이 길이 분에 이 길이요(시간의 변화와 거리의 변화를 손으로 표시한다)
학생 을: 삼각형 요.
연구자: 그렇지. 삼각형에서
학생 갑: 삼각형의 빗변의 길이요.
연구자: 길이?
학생 갑: 삼각형의 빗변의 기울기
연구자: 그렇지. 그럼 0에서 01.초, 01.초에서 0.2초, 0.2에서 0.3초, 0.3초에서 0.4초를 연결하여 기울기를 살펴보면?(학생들은 시간과 이동거리의 그래프에서 두 점을 연결하여 경사도의 변화를 본다)
학생 갑: 점점 커져요. 일정하게



[그림 Ⅳ-6] 시간과 이동거리의 관계그래프에서 평균속도를 두 점의 직선의 기울기로 표현하기

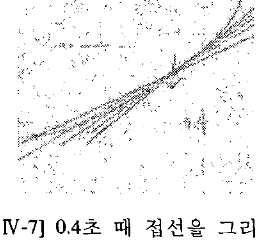
연구자는 학생들이 시간과 이동거리의 관계그래프에서 점선의 길이의 변화를 보면서 시간과 속도의 관계그래프를 그리게 하였다. 그 후에 그래프에서 평균속도의 의미를 묻자 학생들은 시간의 변화와 속도의 변화를 손으로 가리키면서 삼각형을 그렸다. 기울기의 의미를 묻자 처음 갑은 빗변의 길이라고 답하였으나 다시 빗변의 기울기라고 수정하여 대답하였다. 그래프에서 빗변의 기울기와 평균속도의 변화를 연결하도록 유도하기 위해 0에서 0.초, 01.초에서 0.2초, 0.2에서 0.3초, 0.3초에서 0.4초를 연결하여 기울기를 살펴보게 하였다. 학생들은 시간과 이동거리의 그래프에서 두 점을 연결하면서 경사도의 변화를 보았다. 학생 갑이 “점점 커져요 일정하게” 라고 답을 한 것으로 미루어 볼 때 이 그래프에서 평균속도의 변화를 기울기의 변화와 연결하여 이해하게 된 것임을 알 수 있다. 다음은 순간속도를 이해하도록 유도하는 과정에서 이루어진 대화이다.

연구자: 그렇지. 나는 0.35초가 된 순간에 속도를 구하고 싶어. 그래프에서 생각해봐요. 아까 0.3초에서 0.4초 동안의 평균속도가 이 그래프에서 이 직선의?
학생 갑: 이 기울기요.
연구자: 그럼 0.35초는?
학생 을: 0.3부터 0.35까지요.
학생 갑: 0.3부터 0.35까지 직선을 그려서
연구자: 0.3부터 0.35까지 직선의 기울기는?
학생 을: 0.3부터 0.35까지 평균속도요
연구자: 0.3부터 0.35까지의 평균속도를 구해야 하니까. 0.3부터 0.35까지 직선을 그려서 평균속도를 한 번 표시해보자(학생들은 0.3부터 0.35까지 직선을 그리고 기울기를 구한다) 0.33초에서 0.35초까지의 평균속도가 어떻게 될 것 같니? 시간 간격이 어떻게 되어 가고 있니?
학생 을: 줄어들고 있어요.
학생 갑: 줄어들어요.
연구자: 그래프에서 변화가 어때요?

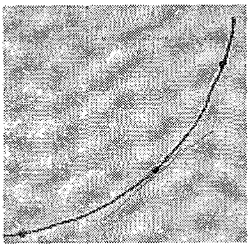
학생 갑: 여기 시간(0.35)은 일정한데 여기가(변화하는 시간) 줄어요.
학생 을: 시간간격이 줄어요.
연구자: 그럼 이렇게 계속 나가면 우리는 무엇을 구해요?
학생들: 0.35 때 순간속도요.

연구자는 학생들이 시간과 속도의 관계그래프에서 순간속도와 평균속도의 차이를 발견하게 유도하였다. 0.35초 때 순간속도를 구하라고 하자 학생 갑은 0.35분에 이 그래프에서 0.35 때 거리라고 답을 하였다. 이 학생은 평균속도로 순간속도를 이해한 것이다. 연구자가 0.3초에서 0.4초 동안의 평균속도가 이 그래프에서 무엇을 의미하냐고 하자 학생 갑이 기울기라고 답하였다. 학생 을은 0.3부터 0.35까지라고 답을 하였으므로 연구자가 0.3부터 0.35까지 직선의 기울기를 묻자 학생 을은 0.3부터 0.35까지 평균속도라고 답을 하여 순간속도와 평균속도가 차이가 있음을 발견하게 되었다. 연구자가 0.3부터 0.35까지의 평균속도를 구하기 위해서 0.3부터 0.35까지 직선을 그려서 평균속도를 표시해보게 하자 학생들은 0.3부터 0.35까지 직선을 그리고 기울기를 구하였다. 그 후에 0.33초에서 0.35초까지의 평균속도를 추론하게 하자 학생 을은 시간 간격이 준다고 답하고 학생 갑은 두 점 사이의 빗변의 길이가 줄어든다고 답하였다. 평균속도에서 순간속도를 유도하기 위해 연구자는 0.35초를 고정시키고 시간 간격을 점차 줄일 때 기울기 변화와 그래프에서 변화현상을 살펴보게 한 것이다. 연구자가 0.349부터 0.35까지의 평균속도를 구하고 이런 방식으로 계속 시간 간격을 좁힐 때 무엇을 구할 수 있냐고 묻자 학생들은 0.35 초 일 때 순간속도를 구한다고 잘 대답하였다. 다음은 0.34초 때 순간속도를 그래프 위의 한 점의 기울기와 연결하도록 유도하는 과정이다.

연구자: 그럼 다시 크게 0.3부터 0.4 사이의 평균속도를 그리고, 0.35, 0.36, 0.37부터 0.4 사이의 평균속도를 표시하면(학생들 그래프에서 좌표를 크게 잡고 다시 표현해본다). 직선이 어떻게 변화하면서 만들어지니?
학생 갑: 직선의 기울기가 커지면서.
학생 을: 이 길이는(두 점 사이의 빗변의 길이) 짧아져요
연구자: 그렇지. 그럼 0.4 일 때 순간속도를 구하려면? 시간을 정말 작은 간격으로 한다면? 간격을 좁혀서 0.4 근처에서 직선의 모양을 보면? 직선과 곡선이 어떤 관계에 있게 되니?
학생 을: 만나요.
연구자: 그럼 교점이 몇 개에서 만나요?
학생 갑: 두 개요.
연구자: 그럼 일치한다는 거는 곡선과 직선이?
학생 갑: 하나로 만나요
연구자: 그럼 그 상태를 그려보면? 앞에서는 계속 두 개씩 만났으니까 여기서는
학생들(같이 상의하면서 접선을 그린다)
연구자: 그럼 내가 0.4 일 때 순간속도를 구하라고 하면?
학생 을: 이 기울기요(접선을 가리킨다)
연구자: 그렇지 직선의 기울기가 순간속도가 되지? 이런 직선을 뭐라고 하니? 수학 시간에 배웠니?
학생 을: 접선이요.
연구자: 그럼 순간속도를 구하라고 하면 앞으로 어떻게 하면 되?
학생 갑: 접선을 그려서
학생 을: 기울기를 구해요.(학생들 접선의 기울기를 구하려고 눈금을 읽는다)



[그림 Ⅳ-7] 0.4초 때 접선을 그리는 과정



[그림 Ⅳ-8] 0.4초 일 때 접선

연구자는 0.35 때 기울기, 즉 0.35때 순간속도를 그래프로 표현하는 방법을 이해하도록 유도하였다. 즉, 0.35초 일 때 순간속도가 그 점에서 곡선의 접선이 된다는 점을 이해하도록 유도한 것이다. 학생들이 이 과정을 가장 어려워하였으므로 연구자는 두 점을 연결해서 기울기를 살펴본 상황을 생각하면서 0.34999때부터 0.35때 두 점을 연결하면 직선이 어떤 모양이 될 거 같은지를 묻자 학생 을이 점이 된다고 답을 하였다. 두 점이 아주 가까이 있으므로 선분이 만들어지지 않고 점이 만들어진다고 생각한 것이다. 두 점을 연결한 직선을 고려하면서 두 점이 아주 가까이 있으면 한 점에서 직선이 만들어진다는 생각을 하지 못한 것이다. 연구자가 두 점이 아무리 가까워도 두 점이 있는 것이므로 연결하면 직선이 나오게 된다는 상황을 설명하자 학생들은 이를 이해하였다. 따라서 연구자가 이 직선을 그려보게 하였다. 학생들이 계속 망설이고 있어서 다시 연구자가 눈금 간격을 크게 하여 0.3부터 0.4 사이의 평균속도를 그리고, 0.35, 0.36, 0.37부터 0.4 사이의 평균속도를 표시하게 하자 학생들은 그래프에서 좌표를 크게 잡고 다시 표현해보았다. 연구자가 직선이 어떻게 변화하면서 만들어지는지를 묻자 학생 갑이 직선의 기울기가 커진다고 하고, 학생 을은 두 점 사이의 빗변의 길이가 짧아진다고 답하였다. 학생들은 평균속도의 변화와 그래프의 기울기의 변화를 연결한 것이다. 연구자가 0.4 일 때 순간속도를 구하기 위해 시간 간격을 아주 좁혀서 0.4 근처에서 직선의 모양을 보게 하자 학생 을이 직선과 곡선이 만난다고 답하였다. 이제 순간속도와 접선의 기울기 개념이 연결된 것이다. 연구자가 다른 직선과 비교하여 이 직선과 곡선의 만남의 의미를 묻자 학생 을이 직선과 곡선이 일치하고 있다고 답하였다. 교점이 몇 개에서 만나는지에 대해 학생 갑이 하나로 만난다고 답을 함으로써 접선을 이해함을 보여주었다. 학생들은 같이 상의하면서 그래프에서 0.4초 일 때 접선을 그렸다.

연구자: 그럼 내가 0.4 일 때 순간속도를 구하라고 하면?
학생 을: 이 기울기요(접선을 가리킨다)
연구자: 그렇지 직선의 기울기가 순간속도가 되지? 이런 직선을 뭐라고 하니? 수학 시간에 배웠니?
학생 을: 접선이요.
연구자: 그럼 순간속도를 구하라고 하면 앞으로 어떻게 하면 되?
학생 갑: 접선을 그려서
학생 을: 기울기를 구해요.(학생들 접선의 기울기를 구하려고 눈금을 읽는다)

연구자는 학생들이 그린 접선을 보면서 0.4 일 때 순간속도를 구하라고 하자 학생 을이 이 기울기를 구하면 된다고 답을 하면서 접선을 가리켰다. 이제 순간속도가 시간과 이동거리의 관계그래프 위의 일정 시각에서 곡선에 그은 접선의 기울기가 된다는 점을 이해하게 된 것이다.

2. 연구결과 논의

학생들은 수레는 등가속도로 운동하므로 6타점 사이의 거리는 일정하게 변하고 평균속도는 6타점 사이의 거리에서 시간 0.1초를 나눈 값이므로 6타점씩 자른 종이테이프의 길이에 비

례한다는 점을 이해할 수 있었다. 그 후에 타점이 찍힌 종이테이프를 잘라서 모눈종이에 붙였을 때 자른 종이테이프의 길이가 일정하게 증가한다는 점을 확인할 수 있었다. 종이테이프를 붙인 그림에서 축의 의미를 운동 상황과 연결하여 가로축은 시간이고 세로축은 단위시간 당 이동거리인 속도라고 잘 이해할 수 있었다. 따라서 종이테이프의 높이의 변화가 일정하게 증가하는 것은 곧 속도가 일정하게 증가하는 것이라는 점과 연결하여 사고하게 되었다. 이 그림으로부터 등가속도 운동에서 시간과 속도의 관계그래프를 개발하고, 이 그래프에서 속도는 일정하게 증가하고, 그래프의 기울기는 시간에 대한 속도의 변화이므로 가속도가 되고, 가속도가 일정하므로 등가속도 운동이 된다는 점을 이해할 수 있었다.

그 후, 연구자는 시간과 속도의 관계그래프 아래 넓이의 의미를 이해하도록 유도질문을 하였다. 연구자가 수레의 운동에서 종이테이프를 붙인 상황을 연결하여 사고하게 하자 학생 갑이 시간과 속도의 관계그래프 아래 넓이가 총 이동거리가 된다고 답을 하였다. 그 후 이 넓이의 변화를 묻자 학생 갑이 증가량이 늘어나면서 늘어난다고 잘 대답하였고, 연구자가 이를 시간과 이동거리의 관계그래프에서 이동거리의 변화율과 연결하도록 유도하자 학생 갑은 이동거리의 증가량이 늘어나면서 늘어난다고 잘 대답하였다. 이제 학생들은 시간과 속도의 관계그래프 아래 넓이의 변화율과 시간과 이동거리의 관계그래프에서 이동거리의 변화율을 연결하여 이해하게 된 것이다. 이러한 학습 과정은 차후에 미적분의 기본정리를 이해하는데 기반이 될 것으로 파악된다.

다음에는 종이테이프를 자르는 방식을 다르게 하였을 때 단위 시간 당 거리가 누적됨으로써 그래프는 시간과 이동거리의 관계그래프가 되고 이 그래프가 이차함수 그래프가 된다는 점을 학습할 수 있었다. 그 후에 이 그래프에서 매 0.1초당 변화한 길이를 점선으로 표시하게 하였다. 이 점선의 길이의 변화를 인식함으로써 이를 속도의 변화와 연결하도록 유도하려는 의도에서이다. 점선의 길이에서 시간 0.1을 나누면 각 구간에서 평균속도가 구해지고, 속도는 점선으로 표시된 부분의 길이에 비례하게 된다. 학생들은 이 길이가 일정하게 증가하므로 속도가 일정하게 증가한다는 것을 이해하고 점선의 길이의 변화를 보면서 시간과 속도의 그래프를 그릴 수 있었다. 또한 학생들은 단위시간 당 이동거리를 누적시키면서 점선으로 표시된 부분의 길이를 모두 더하면 0.4초 동안 이동한 총 이동거리가 된다는 점을 이해할 수 있었다.

다음에는 종이테이프를 더 작은 타점 간격 잘라서 위와 같은 실험을 할 때 각 경우에 그래프에서 나타나는 변화를 이해하도록 유도하였다. 학생들은 시간 간격을 더 작게 하여 실험을 하였을 때 종이테이프를 붙인 그래프가 시간과 이동거리의 이차곡선이 되고, 평균속도는 일정한 순간의 속도인 순간속도에 가까워진다는 점을 학습할 수 있게 된다고 파악했기 때문이다. 학생들이 평균속도와 순간속도의 차이를 이해하는데서 어려움이 있었다. 연구자가 0.35초 때 순간속도를 구하라고 하자 학생 갑은 0.35분에 이 그래프에서 0.35초 때 거리라고 답을 하였다. 이 학생은 평균속도로 순간속도를 이해한 것이다. 연구자가 0.3초부터 0.35초까지 직선을 그려서 평균속도를 표시해보게 하자 학생들은 0.3초부터 0.35초까지 직선을 그리고 기울기를 구하였다. 그 후에 0.33초에서 0.35초까지의 평균속도를 추론하게 하자 학생 을은 시간 간격이 준다고 답하고 학생 갑은 두 점 사이의 빗변의 길이가 줄어든다고 답하였

다. 평균속도에서 순간속도를 유도하기 위해 연구자는 0.35초를 고정시키고 시간 간격을 점차 줄일 때 기울기 변화와 그래프에서 변화현상을 살펴보게 한 것이다. 연구자가 0.349초부터 0.35초까지의 평균속도를 구하고 이런 방식으로 계속 시간 간격을 좁힐 때 무엇을 구할 수 있냐고 묻자 학생들은 0.35초 일 때 순간속도를 구한다고 잘 대답하였다.

그 후에 연구자는 0.35초 때 기울기, 즉 0.35초 때 순간속도를 그래프로 표현하는 방법을 이해하도록 유도하였다. 즉, 0.35초 일 때 순간속도가 그 점에서 곡선의 접선의 기울기가 된다는 점을 이해하도록 유도한 것이다. 연구자가 직선이 어떻게 변화하면서 만들어지는지를 묻자 학생 갑이 직선의 기울기가 커진다고 하고, 학생 을은 두 점 사이의 빗변의 길이가 짧아진다고 답하였다. 학생들은 평균속도의 변화와 그래프의 기울기의 변화를 연결한 것이다. 연구자가 0.4초일 때 순간속도를 구하기 위해 시간 간격을 아주 좁혀서 0.4초 근처에서 직선의 모양을 보게 하자 학생 을이 직선과 곡선이 만난다고 답하였다. 이제 순간속도와 접선의 기울기가 연결되어 이해된 것이다. 교점이 몇 개에서 만나는지에 대해 학생 갑이 하나로 만난다고 답을 함으로써 접선을 이해함을 보여주었다. 학생들은 같이 상의하면서 그래프에서 0.4초 일 때 접선을 그렸다.

이상의 과정을 통하여 학생들은 등가속도 운동 상황을 모델화한 시간과 이동거리, 시간과 속도의 관계그래프를 그리고, 이 그래프에서 변화를 해석하여 시간과 속도의 일차함수 그래프에서 기울기의 의미를 가속도와 연결하여 가속도의 일정성을 이해하였다. 시간과 속도의 일차함수 그래프에서 직선 아래의 넓이의 변화율과 이동거리의 변화율을 연결하여 그 변화가 점점 일정한 간격의 차이를 유지하면서 증가하고 있음을 해석할 수 있었다. 그 밖에도 시간과 이동거리의 관계그래프에서 단위시간 당 이동거리의 변화를 고려하여 시간과 속도의 관계그래프를 그릴 수 있었다. 또한 시간과 이동거리의 이차함수의 그래프에서 순간속도와 평균속도의 차이를 이해하고, 순간속도가 그 시각에서 곡선에 그린 접선의 기울기에 해당한다는 점을 이해하게 되었다. 이상의 과정에서 학생들은 미적분의 기본이 되는 핵심 아이디어를 개발하고 이를 이해할 수 있게 된 것이다. 이상의 연구결과에 근간하여 본 연구자는 물리와 수학을 연결하여 운동 상황을 탐구하면서 변화를 그래프로 모델화하고 변화를 해석하는 학습이 미적분을 학습하게 되는 단원 초기에 활동으로서 제시되어야 한다는 점을 제안한다.

V. 결 론

본 연구에서는 먼저, 미적분에서 수학과 물리의 연결성을 고려한 수학학습-지도의 필요성을 살펴보았다. 그 후, 바람직한 미적분학 지도에 대한 제안을 하고 있는 선행연구들로부터 시사점을 도출하여 미적분을 도입하는 과정에서 활용할 수 있는 수학과 물리를 연결한 학습-지도 자료를 개발하였다. 그 후에 이 교수-학습 자료를 연구도구로 활용하여 질적 사례연구를 한 후에 분석한 결과를 제시하였다.

학생들은 등가속도 운동 상황을 모델화한 시간과 이동거리, 시간과 속도의 관계그래프를 그릴 수 있고, 이 그래프에서 변화를 해석하여 시간과 속도의 일차함수 그래프에서 기울기의 의미를 가속도와 연결하여 가속도의 일정성을 이해하게 되었다. 그 후, 시간과 속도의 일차함수 그래프에서 직선 아래의 넓이의 변화율과 이동거리의 변화율을 연결하여 그 변화가 점점

일정한 간격의 차이를 유지하면서 증가하고 있음을 해석할 수 있었다. 그 밖에도 시간과 이동거리의 관계그래프에서 단위시간 당 이동거리의 변화를 고려하여 시간과 속도의 관계그래프를 그릴 수 있었다. 또한 시간과 이동거리의 이차함수의 그래프에서 순간속도와 평균속도의 차이를 이해하고, 순간속도가 그 시각에서 곡선에 그린 접선의 기울기에 해당한다는 점을 이해하게 되었다. 이러한 과정에서 학생들은 미적분의 기본이 되는 핵심 아이디어를 개발하게 된 것이다. 따라서 물리와 수학을 연결하여 운동 상황을 탐구하면서 변화를 그래프로 모델화하고 변화를 해석하는 학습이 미적분을 학습하게 되는 단원 초기에 활동으로서 제시되어야 한다고 제안한다. 본 사례연구는 한 차시의 자료를 수집하고 분석한 결과를 제시하였다는 점에서 연구의 제한점이 있다.

미적분은 대학 이공계 학생들에게 필수과목이므로 고등학교와 대학교 교육과정의 연계를 고려한다면 고등학교에서 미적분은 단순하게 공식을 암기하고 의미 없는 계산을 하는 수업이 되어서는 안 된다. 따라서 수학의 역사 발생적 원리에 입각한 미적분 지도, 등가속도 운동이나 등속도 운동 상황을 그래프로 표현하고 변화의 역동성을 해석하면서 미적분의 기본 정리를 재발명하는 미적분의 지도, 물리와의 연결을 고려하여 물리적 실험 장치를 활용하여 등속도 운동과 등가속도 운동에서 변화를 모델화하면서 양적인 해석과 함수적 해석을 하는 미적분 지도가 이루어져야 한다. 수학과 과학의 연결성을 고려한 학습-지도의 필요성이 제기되어 왔지만 아직 구체적인 방안들이 연구되지 않고 있으므로 본 연구에서 개발한 자료를 바탕으로 다양한 교수-학습 자료가 개발되고 학습-지도 방법을 강구하는 후속연구가 지속되기를 기대한다.

참고문헌

신현성(2000). **수학과 교육과정에 따른 수학교재 연구 및 지도**. 서울: 교우사.

우정호(1998). **학교수학의 교육적 기초**. 서울: 서울대학교출판부.

Callahan, J. M., & Hoffman, K. (2004). **상황 속의 미적분학**. (강현배 외 9인 공역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1995년 출판).

Creswell, J. W. (2005). **질적 연구방법론: 다섯 가지 전통**. (조흥식 외 3인 공역), 서울: 학지사. (영어 원작은 1998년 출판).

Davis, P. (2000). Calculus renewal and the world of work. In S. L. Ganter (Ed.), *Calculus renewal: issues for undergraduate mathematics education in the next decade* (pp. 41-52). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Gordon, S. P. (2000). Renewing the precursor course: New challenges, opportunities, and connections. In S. L. Ganter (Ed.), *Calculus renewal: issues for undergraduate mathematics education in the next decade* (pp. 69-90). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Geertz, C. (1983). Thick description: toward an interpretive theory of culture. In R. M. Emerson (Ed.), *Contemporary field research* (pp. 19-59). Waveland Press.

Klein, M. (2005). **수학, 문명을 지배하다**. (박영훈 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1953년 출판).

National Council of Teachers of Mathematics

(2000). *Principle and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Smith, D. A. (2000). Renewal in collegiate mathematics education: Learning from research. In S. L. Ganter (Ed.), *Calculus renewal: issues for undergraduate mathematics education in the next decade* (pp. 23-40). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Stewart, I. (1990). Change. In L. A. Steen. (Ed.), *On the shoulder of giants: new approaches to numeracy* (pp. 189-218). Washington, DC: National Academy Press.

A Case Study on Learning of Fundamental Idea of Calculus in Constant Acceleration Movement

Shin, Eun Ju (Ewha Womans University)

As a theoretical background for this research, the literatures which focus on the rationale of teaching and learning of connecting with mathematics and science in calculus were investigated. And teaching and learning material of connecting with mathematics and science in calculus was developed. And then, based on the case study using this material, the research questions were analyzed in depth. Students could understand mean-velocity, instant-velocity, and acceleration in the experimenting process of constant acceleration movement. Also Students could understand fundamental ideas that instant-velocity means slope of the tangent line at one point on the time-displacement graph and rate of distance change means rate of area change under a time-velocity graph.

* **Key words** : calculus(미적분학), constant acceleration movement(등가속도 운동), tangent line(접선), rate of change(변화율)

논문접수 : 2005. 12. 23
심사완료 : 2006. 2. 6