대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 16 권 제 1 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 16, No. 1, 1-23. Feb 2006

중학교 기하 교재의 '원론' 교육적 고찰

우 정 호* · 권 석 일**

본 논문은 중학교 평면 논증기하를 원론 교육적 입장에서 분석 고찰한 것이다. 이를 위하여 먼저 'Euclid 원론'에 따른 고전적 원론 교육을 목적, 내용, 방법의 측면에서 분석하고 그 역사를 개관하였다. 이어 고전적 원론 교육에 대한 비판적 논의를 고찰하고 Clairaut의 '기하학 원론'과 Branford의 역사-발생적 기하 교육론을 중심으로 역사-발생적 기하 원론 교육을 목적, 내용, 방법의 측면에서 분석하였다. 그리고 이러한 분석과 근세 이후 기하교과서의 변천과정에 비추어 현재의 중학교 논증기하 교재의 기본가정을 분석하고, 그 내용 및 체제를 가설적 작도, 정리의 제시 순서, 증명진술 방법, 정의제시 방법, 연습문제로 나누어 분석하였다. 마지막으로 이러한 논의를 바탕으로, 현 중학교 기하교재의 기본적 관점을 탐색하고 두 원론의 상보적 통합 방안을 모색하였다.

Ⅰ. 서 론

《Euclid원론》은 서구의 역사를 통틀어 성경을 제외하고는 그 어떤 책도 이보다 널리 출판되고 연구된 것이 없으며 학문적 사고에 더 큰 영향을 끼친 것이 없다는 찬사를 받아왔다(Eves, 1995: 121). 여기서 학문적 사고란 공리-연역적인 사고를 일컫는 것으로, 이는 고대 그리스에 그 기원을 두고 있는 바, 고대 그리스인들은 관련된 여러 명제를 함의하고 있으면서 명제 상호간의 관련성을 보여주는 논증을 제공하는 제 1 원리가 존재한다고 보고, 이것을 일컬어 '원론'이라고 하였다(Morrow, 1970: 59). 《Euclid원론》은 이와 같은 의미에서의 기하학의 '원론'을 성공적으로 추출하고 그에 바탕을 둔 기하학 체계를 집대성하였다는 점에서 그리스 이래 오늘날까지 기하학의 《원론》을 대표하는 저술로, 나아가 수학을 탄생시킨 저술로 높이 평가받고 있다(Cajori, 1924).

《Euclid원론》은 고대 그리스의 교육에서 가설 연역적 종합법의 입문서로, 수학적 진리가 영원하며 경험과 무관함을 설명해 주는 지도서로, 수학적 진리를 통해 이상향을 이해시키는 수단으로 이용되었고(Steiner, 1988), 근대 이후 대학의 기초 교양 교육의 교재로, 18, 19세기에는 중등학교 기하교재로 사용되었다(Cajori, 1924: 275-309; Stamper, 1909: 51-103).

다른 한편, 《Euclid원론》은 다양한 교육적 비판의 대상이 되어 왔다. 그러한 비판은 비유클리드 기하학을 비롯한 여러 가지 기하학의 출현이나 Hilbert 공리계의 구성과 같은 수학 내적인 발전 과정에서 비롯되기도 하였으며, 18세기의 실학주의 교육 사조, 20세기 초의 수

* 서울대학교, wjh@plaza.snu.ac.kr
** 서울대학교 대학원, steinein@dreamwiz.com

학교육 개혁 운동, 20세기 중반의 '새 수학' 운동과 같이 교육개혁의 실제와 긴밀하게 맞물려 이루어지기도 하였다. 현재 학교수학 [8-나] 및 [9-나] 단계의 논증기하 교재를 살펴보면, 《Euclid원론》에서 비롯된 전통적인 기하교육의 모습과 그에 대한 반론에 기인한 새로운 형식을 동시에 찾아볼 수 있다. 개념을 명확히 정의하고, 가정을 명시적으로 드러내며, 결론을 연역하는 증명과정을 강조하는 모습과 2000여년 이상 기하교육의 주요 소재가 되어온 삼각형, 사각형, 원 등의 평면 도형의 성질에 관한 명제의 증명을 그 주요 내용으로 삼고 있는 것은 현재 학교수학에서 찾아볼 수 있는 전통적인 모습이다. 한편, 현 학교기하에서는 수직선을 사용하고, 선분의 길이와 도형의 넓이, 부피를 다루고 있다. 이는 산술을 기하에 결합시키는 형식으로 Euclid 당시의 방법과 다르며, 수치계산에 관심을 기울인 Archimedes의 정신이 깃든 실제수학을 받아들인 것이라고 볼 수 있다. 또한, 현재 중학교 교과서에서 '생활 속의 수학'을 통해(조태근 외 4인, 2000, 2002, 2003) 기하학과 실생활 및 타 학문과의 관련성을 드러내고자 하는 것도 《Euclid원론》에서는 찾아볼 수 없는 시도로 이 역시 학문의 응용성을 강조한 20세기 초 이래의 수학교육 개혁 운동의 정신을 받아들인 것으로 볼 수 있다. 결국 현재 평면 논증기하 교재는 《Euclid원론》에 그 내용적 근원을 두고 전통적인 기하교육의 핵심인 증명 지도를 그 기본 목표로 하고 있는 동시에(교육부, 1997: 74), 전통적인 기하교육에 대한 비판적 논의를 수용하는 절충안의 모습을 띠고 있다고 볼 수 있다.

그러나 이와 같은 현재의 기하교재 구성 방식은 여전히 개선될 여지가 있다. 여러 수학교육학자들이 수학적 사고의 발전을 안내할 수 있는 최선의 교재 양식은 인류가 사고했던 발전과정을 거슬러 올라가는 역사-발생적 양식을 따르는 것이어야 한다고 지적하고 있으나(Freudenthal, 1991; Branford, 1908; Cajori, 1917; Toeplitz, 1967; Arcavi, 1985), 오늘날의 기하교재가 발견의 원류로부터 조직되는 체계를 전통적인 체계에 유기적으로 결합시키고 있는 것으로는 보이지 않기 때문이다. 여기서 우리는 새로운 차원에서 '원론'을 재구성하여 《Euclid원론》 중심의 전통적인 기하교육의 대안을 제시하고자 하였던 Clairaut의 《기하학 원론(Elémens de Géometrie)》(1741)을 자세히 살펴볼 필요가 있음을 알 수 있다. 기하를 '정확한 측정의 기예'로 취급한 Ramus의 정신으로 대변되는 기하에 대한 새로운 견해가 18세기의 실학주의 교육 사조와 결합되어 탄생된 Clairaut의 《기하학 원론(Elémens de Géometrie)》은 기하학을 조직하는 방법에 있어 정의, 공리, 공준을 제 1원리로 삼는 《Euclid원론》과는 다른 구성원리를 지향하고 있다.

이와 같이 수학의 전형이요 수학교육의 기본 패러다임이라고 할 수 있는 '원론'에 대한 서로 다른 견해가 공존하여 오고 있다는 점과, 이러한 양자의 이념이 오늘날 기하교재에 체계적으로 통합되어 반영되어 있지는 못하다는 점에 비추어 볼 때, 고전적 원론과 역사-발생적 원론 양자에 대한 체계적인 분석과 그에 바탕을 둔 두 원론의 유기적이고 상보적인 통합 방안에 대한 연구가 필요함을 알 수 있다. 이에 본 연구에서는 고전적 원론 교육과 역사-발생적 원론 교육이 주장하는 바를 목적, 내용, 방법 면에서 세밀하게 고찰하고, 현 기하교재를 원론 교육의 관점에서 분석하고, 이러한 분석과 고찰을 종합하여 종합적 연역적 접근과 역사-발생적 접근의 상보적인 통합 방안을 모색하고자 한다.

II. 고전적 원론 교육

고대 그리스에서는 '원론'을 '이하의 정리들의 출발점의 위치를 점하고 있으며, 모든 것이 그 안에 함의되어 있고, 여러 성질들의 수많은 관련성을 보여주는 논증을 제공하는, 제일 원리'(Morrow, 1970: 59)로 보았다. 《원론》에 대하여 이러한 관점을 견지하고 있던 고대 그리스 문명에서는, 알렉산더가 세계적인 제국을 구축한 후, 과거 수백 년 간의 모든 학문적 탐구 결과를 단일한 학문 체계로 집대성하고자 하는 요구가 점차 커졌고, 알렉산드리아에 오늘날의 대학교육에 거의 상응하는 교육체계를 발달시키기에 이르렀다(Klein, 1939: 188-190).

그리스 교육에서 《Euclid원론》은 가설 연역적 종합법의 입문서로, 수학적 진리가 영원하며 경험과 무관함을 설명해 주는 지도서로, 수학적 진리를 통해 이상향을 이해시키는 수단으로 이용되었다(Steiner, 1998).

《Euclid 원론》의 전체적인 체제는 다음 <표 II-1>[1]과 같다.

《Euclid 원론》은 정의, 공준, 공리, 명제만으로 구성되어 있다. 이는 Aristoteles가 《분석론 후서, Analytica Posteriota》에서 논한 바 있는 수학적 방법론, 곧 가설-연역적인 방법을 따른 것으로 알려져 있다(Eves, 1995: 91).

고전적 원론 교육을 목적, 내용, 방법의 측면으로 나누어 정리하여 보면 다음과 같다. 먼저 고전적 원론 교육의 목적을 다음 세 가지로 구분할 수 있다. 첫째 목적은 감각 경험을 초월하는 심성 함양을 위한 교육이다. 이는 수학을 배움으로써 '실재의 세계'를 '마음의 눈으로 볼 수 있는' 단서를 얻고, 이를 통해 '실재의 세계'를 추구하는 마음의 눈을 여는 준비가 되며, 실재를 추구할 수 있는 방법을 배우게 된다는 Plato 철학에 기반한 것으로 고대 그리스 수학 교육의 주요 목적이라고 할 수 있다. 두 번째 목적은 《Euclid 원론》의 체계와 불가분의 관

<표 II-1> 《Euclid원론》의 체제

	제1권	제2권	제3권	제4권	제5권	제6권	제7권	제8권	제9권	제10권	제11권	제12권	제13권
정의	23개	2	11	7	18	4	22	0	0	16	28	0	0
공준	5개	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
공리	5개	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
명제	48개	14	37	16	25	33	39	27	36	115	39	18	18
내용	평면도형	평면도형 (기하학적 대수)	평면도형 (원)	평면도형 (내접외접다각형)	비례 이론	비례이론의 도형에의응용	수론 / 무기호(無記號) 정수론	수론 / 무기호(無記號) 정수론	수론 / 무기호(無記號) 정수론	무리량론	입체도형	구적론 (소진법)	정다면체

1) 이 표는 池田美惠 외 3인(1973)의 연구를 참조하여 그 틀을 만들고, Heath(1956)판의 Euclid 원론에 맞추어 그 내용을 정리한 것이다.

계에 있는 가설-연역적 사고 방법의 교육이다. Proclus는 교재로서의 원론의 목적을 학술 서적으로서의 원론의 목적[2]과 구분하면서, 기본적인 개요와 기하 전체를 완전하게 이해할 수 있는 방법을 제시하는 것이 원론의 목적이라고 말하고 있다(Morrow, 1970: 58). 이는 가설-연역적 방법이라는 《Euclid 원론》의 구성 방법을 이해하여, 기하학 전체를 하나의 체계로 이해하게 하는 것이 원론 교육의 주요한 목적이라는 것을 말해 준다.

이천 여년의 기간 동안 고전적 원론 교육은 거의 대부분 《Euclid 원론》을 그대로 따르는 교육이었으며, 교육 내용은 기본적으로 《Euclid 원론》에 제시된 기하학적인 것이었다. 고전적 원론 교육의 내용은 《Euclid원론》의 내용 및 체제와 밀접한 관련을 맺고 있는 바, 그 공리, 공준, 정의, 명제가 모두 교육 내용이라고 할 수 있다. 이를 기하에 초점을 맞추어 재진술하면, 기하의 기본 공리 및 정의와 삼각형, 평행선, 평행사변형, 내접·외접 다각형, 원, 도형의 비례, 입체도형, 정다면체, 작도를 그 대상으로 하는 여러 관련 명제가 모두 원론 교육에서 다루는 내용이라고 할 수 있다.

《Euclid 원론》은 그 구성에 있어, 가설-연역적 사고 방법의 구사, 경험적 접근의 배제, 정형화된 증명 형식의 사용이라는 방법적 특성을 지니고 있다. 《Euclid 원론》은 가설-연역적 사고 방법 자체를 교재 구성의 가장 중요한 형식으로 취하고 있다. 교재 전체가 정의, 공준, 공리, 명제로 구성되어 있고, 공준, 공리는 제 1권의 서두에, 정의는 각 권의 서두에 제시되어 있다. 또한 모든 명제는 앞에 제시한 공리, 공준으로부터 연역되며, 원칙적으로 어떠한 추가적인 가설도 허용되지 않는다. 해설, 주석, 연습문제 등 학습자를 위한 별도의 조치도 없다. 또한 《Euclid 원론》은 경험적 접근을 배제하는 방식으로 구성되어 있다. 일체의 응용이 배제되어 있으며, 기구를 사용하는 접근도 시도되지 않았다. 선분을 긋고 연장하며 원을 그릴 수 있다는 공준이 제시되고 있지만 실제로 자와 컴퍼스에 대한 언급은 없다. 생활과 연결되거나 익숙한 상황이 도입되는 경우도 없다. 또한, 《Euclid 원론》은 정형화된 증명 형식을 따른다는 특징이 있다. 이러한 《Euclid 원론》의 구성 형식은 원론의 교육 방식에 직접적인 영향을 미쳤다.

III. 역사-발생적 기하 원론 교육

Clairaut는 수학사에서 첫 발견이 이루어진 당시에 발견자들은 바로 초보자이었으며, 토지 측량의 필요에 의해 도형에 대한 연구를 시작하였고 이후 정확성을 추구하는 인간의 자연스러운 성향에 의하여 기하학이 발전하게 되었다고 보고 있다(Clairaut, 2005: xi-xii). 이러한 관점에서 그는 먼저 쉽게 납득할 수 있는 실제적인 측정 상황에 필요한 자연스러운 수단으로서 기본적인 기하학적 내용을 도입한다. 그러나 Clairaut가 모든 내용을 토지 측량을 통하여 전개한 것은 아니다. 토지 측량은 초보자가 흥미를 갖고 자연스럽게 기하의 주요한 기본적인 원리를 발견하도록 하기 위해 사용한 것이며, 거기서 출발하여 호기심을 유지하면서, 자연스럽게 정확성을 추구하게 되는 인간의 성향에 기대어 그 이상의 것을 논리적으로 탐구하도록 교재를 전개하고 있다.

한편 그의 원론은 내용에 있어서도 《Euclid

2) Proclus가 말하는 학술 서적으로서의 《원론》의 목적은 '정다면체의 작도'인데, Heath(1956)는 이러한 Proclus의 견해에 반대하고 있다.

원론》으로부터 벗어나고자 하였다. 스스로 밝히고 있듯이 유용성도 없으며 이해를 용이하게 하지 못하는 내용을 과감하게 생략하였다 (Cairaut, 2005: xiv). 생략된 내용 중 대표적인 것은 엄밀한 비례론(《Euclid 원론》의 제 V권), 무리량론(《Euclid 원론》의 제 X권), 수론(《Euclid 원론》의 제 VII, VIII, IX권)이며 이외에도 상당히 많은 내용이 과감하게 생략되었다. 두 번째로 생각할 수 있는 내용상의 특징은 대수적인 언어를 사용하는 내용이 포함되어 있다는 것이다. 이는 순수하게 기하적인 언어를 통하여 전개된 《Euclid 원론》과 대비되는 주요한 특징이다.

역사-발생적 기하교육론의 또 하나의 사상적 원류를 우리는 Branford를 통하여 찾을 수 있다. Branford는 교육적인 목적을 위하여 기하학의 제재와 정신을 학생들에게 가장 효과적으로 제시하려면 대체적으로 기하학의 역사적 발전 순서를 따르게 된다는 것을 보이고자 하였다. 한편, Branford(1908: 233-234)는 증명을 일반성이 확보된 명제가 상호 연결되는 체계화를 의미하는 것으로 보고 있다. 학교수학에서 체계화라는 것은 공리적 체계화보다 초보적인 수준에서 직관적인 준거에 의하여 수용된 기본 명제와 이미 일반성이 확보된 명제 사이의 국소적 조직화를 의미하는 것으로 해석할 수 있다.

Branford(1908)는 역사적으로 기하학은 바빌로니아와 이집트의 경험적 기하가 그리스 시대로 이어지면서 직관적인 기하 단계를 거쳐 과학적인 기하학으로 발전되어 왔으며, 그러한 기하학의 역사적 발생과정과 맥을 같이 하여 증명 또한 실험적 증명, 직관적 증명, 과학적 증명의 세 단계를 거쳐 발전되었다고 보고 있다. 그런데, 직관적 증명에 대한 Branford의 설명은 그것이 감각적 경험에 의존하면서도 일반성을 확보할 수 있게 해준다는 점과 개념적 통찰에 의존한다는 점을 지적하는데 그치고 있어서, 교사나 학습자가 그러한 직관적인 증명을 실제로 구성하기 위해서 필요한 요소를 이해하거나 그것이 그러한 증명의 수단을 선택하는 구체적인 지침으로 기능하기 위해서는 보다 진전된 개념화를 필요로 한다. Wittmann(1988; Blum & Kirsch, 1991: 184에서 재인용)은 Branford가 제시하는 증명의 세 수준을 설명하면서, '증명이 아닌 것'과 '증명'의 구획은 직관적 증명과 수학적 증명의 사이가 아니라 실험적 증명과 직관적 증명의 사이에서 이루어져야 한다고 하였다[3]. Wittmann은 '직관적 증명'이라는 용어 대신, '내용적으로 직관적인 증명(Inhaltlich-anschaulich proof)'이라는 용어를 사용하고 있는데, 이것이 함의하는 바는 그러한 증명이 증명의 '실체적인 내용이나 맥락을 보여주고 분명하게 한다'는 것이다. 즉, 직관적 증명은 실제적 소재를 통하기 때문에 완전히 형식화된 대상을 다루는 수학적 증명과는 구별되지만, 그 내용의 일반적인 본질을 지적하고 있다는 점에서 실험적 증명과 구별되며 그것 때문에 '증명'이라고 불릴 수 있는 자격을 갖게 된다는 것이다.

역사-발생적 기하 원론 교육을 목적, 내용, 방법의 측면으로 나누어 정리하여 보면 다음과 같다.

역사-발생적 기하 원론 교육의 첫 번째 목적은 기성지식의 전달로서의 형식적인 기하학적 지식의 전달이 아니라 기하학적 사고의 핵심적인 관점을 탐구하고 발견하는 수학적 사고 교육에 있다고 할 수 있다. 또한 발생적 문제 상

3) 다시 말하면, '증명이 아닌 것'과 '증명'을 구별하는 일차적인 기준은, 그것이 형식적이고 연역적인 체계를 갖추고 있는가 하는 점보다 그것이 '일반적이고 보편적인' 정당화에 도달하고 있는가 하는 점이 우선되어야 한다는 것이다.

황으로부터 출발하기 때문에 역사-발생적 기하 원론 교육에서는 고전적 원론 교육과 달리 실제적인 응용의 측면을 중시하게 된다.

역사-발생적 기하 원론 교육의 두 번째 목적은 공리-연역적으로 전개된 '이론수학적인' 사고 양식에서 벗어난 기하학적 사고 양식 곧, 측정 활동을 기본으로 하는 실제수학, 수치적 접근, 구체적 활동, '운동'과 불변성의 아이디어, '극한'과 무한소 아이디어 등 실제적이고 현대적인 수학적 사고 양식의 교육을 추구하고 있다고 볼 수 있다. 이는 《Euclid 원론》에서 철저히 배제된, 그러나 근대과학의 발전을 가능하게 한 Archimedes적인 수학정신의 교육을 시도한 것으로 볼 수 있다. Euclid의 체계화 정신과 대비되는 수학으로 과학하는 Archimedes 정신은 Klein에 의해서도 강조된 바 있다. Klein(1939: 190-191)은 Euclid와 달리 Archimedes가 측정에 의한 수학을 시도하였으며 수치 계산에 주목하였음을 지적하고 그러한 사고 양식의 중요성을 역설하였다. 측정의 수학은 실재의 세계를 마음의 눈으로 보는 것과 반대로 경험의 세계를 직관과 활동을 통하여 다루는 것을 의미한다. 이러한 관점의 변화에 따라 기하학 중심의 교육을 지향했던 고전적 원론 교육과 달리, 산술 계산, 운동과 불변성, 무한소 접근법 등 유용성을 갖춘 다양한 수학적 사고 방법의 교육을 동시에 추구하게 되었다.

다음으로 역사-발생적 기하 원론 교육의 내용을 살펴보자. Clairaut의 《기하학 원론》은 《Eulcid원론》에서 다루고 있는 465개의 명제 가운데 많은 내용을 과감하게 삭제하고 무엇보다도 중요하다고 판단된 기하학적 사고의 핵심을 드러내는 222개의 명제만을 선택하여 기본 도형, Pythagoras의 정리, 원형 도형, 입체도형으로 나누어 다루고 있다. 역사-발생적 기하 원론이 가져온 내용상의 큰 변화는 토지측량, 측정 기구를 사용하는 활동, 산술 계산과 공식, 무한소와 극한의 아이디어 등이 추가되었다는 것이다. 엄밀한 기하학적 추론과 공리적 전개, 증명 중심의 학습 내용은 효율적인 대수적 접근, 실제적인 문제 상황과 접목된 측정 활동, 이동과 불변성의 탐구활동으로 대체됨으로써 응용성을 갖춘 실제수학적인 내용으로 바뀌었다.

이러한 목적과 내용의 변화는 교재 구성 형식에 변화를 야기하였다. 역사-발생적 기하 원론 교육에 따른 교재 구성의 가장 큰 특징은 발생적 문제 상황으로부터 출발한다는 점이다. 공준과 공리, 정의를 출발점으로 하는 것이 아니라, 탐구와 발견의 필요성이 내재되어 있는 문제 상황에서 출발한다. 수학자의 발견 과정을 감추고 그 결과만 제시하는 것이 아니라, 오히려 초보자가 겪은 발견의 초기 상황을 경험하도록 한다는 점에서 역사-발생적 기하 원론의 교재 구성 형식은 고전적 원론 교육에 따른 교재 구성 형식과는 매우 다르다. 역사-발생적 기하 원론 교육에 따른 교재 구성 형식의 두 번째 특징은 그러면서도 역사-발생 과정에서 초보자가 경험했을 법한 자연스러운 논리적 전개를 통해 통찰이 가능하도록 전개된, 역사-발생적 소재를 과감히 이용하여 간접적인 역사-발생적 전개를 시도하고 있다는 점이다. 세 번째 특징은 경험적 접근을 허용한다는 점이다. 실제 측정 활동이나 직관적인 접근을 허용하거나 권장함으로써, 학습자의 경험이 수학 학습에 중요한 토대가 될 수 있도록 한다. 역사-발생적 기하 원론 교육에 따른 교재 구성 형식의 네 번째 특징은 발견술적 전략을 사용한다는 점이다. 특수로부터의 일반화, 유추적 사고 등 다양한 사고 전략이 사용되고 있다. 곧 분석으로 거쳐 구성되었음에도 불구하고 종합에 의해서만 내용을 전개하였던 고전적 원론 교육과는

달리 발견의 맥락이 강조되는 방식으로 교재가 구성되었다.

이러한 역사-발생적 기하 원론 교육은 흔히 《Euclid원론》을 근간으로 하는 고전적인 원론 교육의 반대편에 서 있는 것으로 평가된다. 그러나 기하학의 역사에 비추어 개인 학습자에 있어서의 기하 교육은 실험적인 수준에서 학문적인 수준으로 점진적으로 추구되어야 한다는 Branford의 견해를 받아들인다면, 역사-발생적 기하 원론 교육을 고전적 원론 교육을 상보적으로 보완할 수 있는 성격의 것으로 재평가되어야 할 것이다. 역사-발생적 기하 원론 교육이 고전적 원론에 대한 교육적 보완이 될 수 있는 또 하나의 이유는 그 저변에 'Archimedes의 정신'으로 요약할 수 있는 수학 이념이 녹아 있기 때문이다. Archimedes의 정신은 직관적, 계량적, 응용의 강조, 탐구와 발견의 정신의 추구, 운동 개념, 극한과 무한소 방법의 사용 등으로 특징지을 수 있다. 이러한 정신은 형식적, 비계량적, 순수의 지향, 실재의 추구 및 운동의 배제를 지향하는 고전적인 《원론》에서 찾아보기 힘든 것이다. 이러한 Archemedes의 정신은 근대적인 의미에서의 학문의 원형을 이루고 있다(Laird, 1991: 628). Galilei는 수학적 방법을 역학, 유체정역학과 같은 물리학에 사용함에 있어서 Archemedes의 천재성과 수학적 논증의 우아함과 엄밀성에 대해서 경외감을 표시했으며(Laird, 1991: 628), Klein 역시 이러한 정신을 높이 평가하면서 이러한 정신을 Newton의 정신에 비교한 바 있다(Klein, 1939: 190-191). 이러한 점을 종합하여 볼 때 역사-발생적 기하 원론 교육은 고전적 원론 교육의 문제점을 상보적으로 보완할 수 있는 방안이 되어야 할 것이다.

IV. 원론 교육적 관점에서의 중학교 기하교재 분석

본 장에서는 원론 교육의 관점에서 우리나라 중학교 수학의 논증기하 영역의 내용과 체제를 분석한다. 먼저 현 중학교 논증기하에 암묵적으로 가정되어 있는 공리에 해당하는 기본 가정은 어떤 것이며 그들이 역사적으로 어떠한 과정을 거쳐서 학교수학에 도입되었는지 분석한다. 그리고 중학교 논증기하 영역의 내용과 체제를 가설적 작도의 도입, 정리의 제시 순서의 변화, 증명 진술 방법의 변화, 정의 제시 방법의 변화, 연습문제 등으로 나누어 분석한다. 이러한 분석의 틀은 Human & Nel(1987)의 연구를 참고로 하였다.

1. 중학교 논증기하의 기본 가정 분석

중학교 교과서 기하 영역의 내용적 근간이 되는 Euclid기하의 공리체계는 범주성(categoricalness)[4]을 지니고 있다(Greenberg, 1990: 37). 그러므로 Euclid기하에 대한 공리체계로 Euclid

4) 현대적인 의미에서의 공리체계는 형식주의적인 특징을 가지고 있기 때문에 무정의 용어에 어떠한 의미를 주느냐에 따라 그 공리체계를 만족하는 '모델'이 여러 가지 존재할 수 있다. 실제로 '군'의 공리체계와 같은 비범주적 체계(non-categorical system)에 대해서는 서로 동형이 아닌 많은 '모델'이 존재한다. 그러나 Hilbert의 공리체계와 같은 Euclid기하의 공리체계는 그 공리체계에 의미를 부여하여 만들어낸 모든 '모델'이 서로 동형이 되어 범주성을 가지게 되는 데, 범주적 공리들의 이점은 모형의 모든 성질들을 완전히 묘사해 준다는 것이다(Greenberg, 1990: .37). 즉 Euclid기하에 대하여 어떠한 공리체계를 선택하여도 현 학교 기하에서 다루는 모든 성질을 이끌어낼 수 있다는 것이다. 그러한 의미에서 '공리'라는 표현을 피하여 '기본 가정'이라는 용어를 사용하였다. 그러나 이하에서는 큰 오해를 불러오지 않는 한 공리라는 용어를 기본 가정과 혼용한다.

의 공리체계를 택하든 Hilbert의 공리체계를 택하든 Legendre의 공리체계를 택하든 Birkhoff의 공리체계를 택하든 다른 제3의 타당한 공리체계를 택하든 관계없이, 현 중학교 교과서의 Euclid기하 관련 내용의 바탕을 설명할 수 있다.

그러나 이러한 난점에도 불구하고, 《Eulcid원론》에서 시작하여 그 동안 개발된 여러 기하 교재에 제시된 공리, 공준을 분석하고, 현재 학교기하에서 공리, 공준과 같은 기본 가정의 역할을 수행하고 있는 명제를 추출하여,[5] 이를 비교하여 봄으로써 학교기하에서 공리, 공준에 해당하는 명제들이 어디에서 유래한 것인지 그 기원을 확인하는 것은 가능하다. 이에 본고에서는 먼저 공리, 공준과 같은 기본 가정이 역사적으로 기하교재 속에서 어떻게 변화되어 왔는지 살펴보고, 중학교 교과서의 기하 영역에서 일종의 공리, 공준의 역할을 수행하고 있는 기본 명제를 추출하고, 이 둘을 관련지어 분석하고자 한다.

가. 기하 교재에서의 공리, 공준의 역사적 변천

《Eulcid원론》은 다섯 개의 공준과 다섯 개의 공리를 가정하고 있으나, Legendre는 이것을 변화시켰다. Legendre(1866)의 기하 교재에서는 Euclid의 공리 4를 제외하고는 나머지 9개의 공리, 공준을 모두 찾아 볼 수 있으며[6], 추가로 공리 4, 공리 5, 공리 6, 공리 7, 공리 9, 공리 12, 공준 3, 공준 4, 공준 5, 공준 6, 공준 7, 공준 8이 가정되어 있다(<표 IV-1> 참조).

Legendre에 의해 추가된 공리 및 공준은 성격상 크게 두 가지로 나누어진다. 첫째로, '직선은 이등분 될 수 있다', '각은 이등분될 수 있다'와 같이 소위 가설적 작도를 보장하여 주는 것이다. 가설적 작도는 증명의 대상이 되는 도형을 작도할 수 있다고 가정하고 정리의 증명을 시작하는 것인데, 이러한 입장은 오늘날 논증기하 교과서에서 취하고 있는 입장이기도 하다.

둘째로, '다른 것에 같은 것을 더하면, 그 합은 다르다', '같은 것에 같은 것을 곱하면, 그 곱은 같다'와 같은 공리도 추가되었다. 이러한 공리가 추가된 것은 Legendre가 산술적인 내용을 기하에 적용시키려는 입장에 서 있었기 때문이다. 이러한 관점 역시 오늘날 중등학교 수학 교과서에 이어져 내려오고 있다.

기본 가정의 목록을 늘리는 과정에서 가장 많은 논의의 대상이 된 것은 '합동조건'이다. 합동조건은 제일 먼저 SAS조건을 공리화하는 단계를 거쳐서 ASA, SSS의 순서로 공리화되어 오늘날과 같이 소위 '삼각형의 합동조건'으로 정립되었다. 이 공준은 학습의 초기에 다루기에는 증명이 너무 복잡하다는 점과 증명에 '중첩의 원리'를 사용한다는 점에서 오랜 기간동안 논란이 되었다(Shibli, 1932: 103-105).

이러한 문제를 인식한 Hilbert는 SAS 합동을 공준화하여 중첩의 문제를 피하였다(Greenberg, 1990: 62-63). 그러나 다른 합동조건을 논증하는 방법 역시 기하 학습 초기에 많은 어려움을 불러일으킨다는 논란이 계속되었고, 이에 따라 차례로 나머지 합동조건 역시 기본 가정의 범위에 들어가게 되었다.

---

5) 현재 우리나라 중학교 기하 교재에서는 공리 또는 공준이라는 표현을 명시적으로 사용하지 않으나, 논증기하의 특성상 공리나 공준과 같은 기본 명제의 역할을 하는 내용을 구분할 수 있다.

6) Legendre의 경우 산술을 기하에 도입하려고 하였기 때문에 공리 1의 경우 Euclid가 합하여진 전체(wholes)라는 용어를 사용한 대신 합(sum)이라는 용어를 사용하는 등 그 진술에 다소 차이가 있다. 또한, Legendre와 Euclid 모두 '직선'과 '선분'을 명확하게 구분하여 사용하고 있지 않다. 그러나 Euclid와 Legendre의 공리와 공준 중 서로 대응되는 것을 찾는 데에는 이러한 것이 영향을 미치지 않는다.

<표 IV-1> Euclid와 Legendre의 공리, 공준

	Euclid	Legendre
공리	1. 같은 것과 같은 것은 서로 같다. 2. 같은 것에 같은 것을 더하면, 그 합하여진 전체도 같다. 3. 같은 것에서 같은 것을 빼면, 그 나머지도 같다. *4. 서로 일치하는 것은 같다(Legendre에서는 찾아볼 수 없다).* 5. 전체는 부분보다 크다.	1. 같은 것과 같은 것은 서로 같다(Euclid 공리 1). 2. 같은 것에 같은 것을 더하면, 그 합도 같다(Euclid 공리 2). 3. 같은 것에서 같은 것을 빼면, 그 차도 같다(Euclid 공리 3). *4. 다른 것에 같은 것을 더하면, 그 합은 다르다.* *5. 다른 것에서 같은 것을 빼면, 그 차는 다르다.* *6. 같은 것에 같은 것을 곱하면, 그 곱은 같다.* *7. 같은 것을 같은 것으로 나누면, 그 몫은 같다.* 8. 전체는 어떤 부분보다 크다(Euclid 공리 5). *9. 전체는 부분 모두의 합과 같다.* 10. 모든 직각은 같다. (Euclid 공준4) 11. 두 점을 지나는 직선은 오직 하나 그릴 수 있다. (Euclid 공준 1) *12. 임의의 두 점 사이의 최단거리는 그 두 점을 연결하는 직선 위에서 측정된다.* 13. 같은 점에서는 주어진 선에 평행한 선을 오직 하나만 그릴 수 있다. (Euclid의 제 5공준과 동치)
공준	1. 임의의 점으로부터 임의의 점으로 직선을 그을 수 있다.[7] 2. 유한한 직선(선분)을 얼마든지 길게 늘일 수 있다. 3. 임의의 점과 임의의 거리로(임의의 길이를 반지름으로 하여) 원을 그릴 수 있다. 4. 모든 직각은 서로 같다. 5. 두 직선이 있고 다른 한 직선이 이 두 직선과 만날 때, 어느 한 쪽에 있는 내각(의 크기의 합)이 두 개의 직각(2직각)보다 작게 된다고 하자. 이 경우 두 직선은, 무한히 늘린다면 내각(의 크기의 합)이 두 개의 직각(2직각)보다 작은 쪽에서 만난다.	1. 임의의 두 점을 지나는 직선을 그릴 수 있다(Euclid 공준 1). 2. 직선은 어느 길이로든 연장할 수 있다(Euclid 공준 2). *3. 두 선(의 길이)이 같지 않다면, 작은 쪽의 길이를 큰 쪽에 표할 수 있다.* *4. 선은 이등분될 수 있다. 즉 두 개의 같은 부분으로 나눌 수 있다.* *5. 각은 이등분될 수 있다.* *6. 주어진 선에 대하여, 그 선 위의 점에서든 밖의 점에서든 수선을 그릴 수 있다.* *7. 주어진 선에 대하여, 주어진 각과 같은 각을 이루는 선을 그릴 수 있다.* *8. 주어진 점을 지나면서 주어진 선에 평행한 선을 그을 수 있다*[8]. 9. 원은 중심이 되는 임의의 점과, 임의의 반지름으로부터 그려질 수 있다(Euclid 공준 3). *10. 평면 위의 임의의 점에서도, 평면 밖의 임의의 점에서도 평면에 수직인 직선을 그릴 수 있다.*

7) Euclid가 공준에 앞서 명시하고 있는 직선의 정의와 이 공준을 종합하여 볼 때 이 공준에 두 점을 연결하는 직선의 유일성이 가정되어 있다고 보는 것이 타당하다(Heath, 1956: 195)

8) 이는 평행선의 작도 가능성을 보장해주는 것으로 평행선 공준과 다르다.

이상과 같은 고찰을 통해 알 수 있는 바와 같이, 역사적으로 기하 교재에서 기본 가정의 목록은 점차 확대되는 방향으로 변화되어 왔다. 이와 같은 방향으로의 변화는 기하 교재에서 공리, 공준을 필요성에 의하여 적절히 조절될 수 있는 대상으로 보게 되었다는 것, 그리고 다른 공리로부터 연역될 수 있더라도 교육적으로 필요한 경우 특수한 명제를 기본 가정처럼 제시할 수 있다는 것과 같은 관점의 변화가 일어났음을 시사하고 있다.

나. 우리나라 중학교 기하의 기본 가정

현 중학교 기하 교재[9]에는 Euclid에게서 그 기원을 찾을 수 있는 것, Legendre에게서 그 기원을 찾을 수 있는 것, Birkhoff에게서 그 기원을 찾을 수 있는 것, 그 기원을 분명하게 밝힐 수는 없으나 기본적인 명제들이 기본 가정으로서의 역할을 수행하고 있다.

우선 《Eulcid원론》의 공리 5개 중에서 오늘날 학교기하에서 가정되어 있는 것은, 무한집합에 대한 현대적 정의로 인하여 공리로 받아들일 수 없게 된 5번째의 공리 '전체는 부분보다 크다'를 제외한 처음 네 가지이다. 다음으로 Euclid의 다섯 개의 공준 중 처음 네 가지는 거의 그 형태를 바꾸지 않은 채로 학교 기하에 가정되어 있으며, 다섯 번째 공준은 그와 논리적으로 동치인 명제[10]가 가정되어 있다.

Euclid의 공리, 공준에 산술적 관계를 적용하고 가설적 작도를 허용하는 내용이 추가된 Legendre의 공리, 공준(<표 IV-1> 참조)의 상당수도 현재 중학교 평면기하의 밑바탕을 이루는 기본가정으로 채택되어 있다. 예컨대, '임의의 두 점 사이의 최단거리는 그 둘을 연결하는 직선에 의하여 재어진다'는 '두 점 A, B를 양 끝점으로 하는 선은 무수히 많다. 그러나 그 중에서 길이가 가장 짧은 것은 선분 AB이다'(조태근 외 4인, 2001: 40)와 같은 기술에서 알 수 있듯이 오늘날 중학교 기하 교재에는 Legendre의 공리 중 일부가 가정되어 있다.

Legendre의 공준 중 Euclid에서 추가된 공준이라고 할 수 있는 공준 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10에 대하여 검토하여 보면, '두 직선이 같지 않다면, 작은 쪽의 길이만큼 큰 쪽에서 잘라낼 수 있다'는 공준 3은 학교기하 교재에 가정되어 있다는 구체적 증거를 찾기는 어려우나 '컴퍼스는 원을 그리거나 주어진 선분을 다른 직선 위로 옮기는 데 사용한다'(조태근 외 4인, 2001: 65)는 언급과 모든 선분에 대하여 '선분의 길이'가 있는 것으로 보는 현 중학교 기하 교재의 입장을 종합하여 볼 때 가정되어 있는 것으로 판단할 수 있다. 그러나 공준 4와 공준 5, 공준 7은 '선분의 수직이등분선', '크기가 같은 각', '각의 이등분선'을 작도하는 방법을 상세히 다루고 있는 현 중학교 기하 교재의 구성을 고려할 때(조태근 외, 2001: 65-68), 중학교 교과서에서 공준과 같이 취급되고 있다고 보기 어렵다(교육인적자원부 2001: 47-48; 조태근 외 4인, 2001: 67). 공준 10은 평면 논증기하를 그 주요 대상으로 하는 본고의 논의의 맥락에서

9) 본 고에서는 조태근 외 4인(2001, 2002, 2003)를 중심으로 교과서 분석을 실시하였다.

10) 보통 'Euclid의 제 5공준'이라고 불리는 다섯 번째의 공준은 그 형태 그대로 수용되고 있다고 보기는 어려우나, 그와 논리적으로 동치인 명제가 전제되어 있음은 분명하다. 평행공리를 가정하지 않은 중립기하에서 이 다섯 번째의 공준과 '두 직선이 평행하면 횡단선에 의해서 잘린 두 직선이 합동인 엇각의 쌍을 가진다'라는 명제가 논리적 동치임이 알려져 있고(Greenberg, 1990: 98), 이 명제의 초보적인 형태라고 할 수 있는 '두 직선이 평행하면 엇각이 같다'가 현 학교기하에서 평행선의 기본적인 성질로 수용되고 있기 때문이다(조태근 외 4인, 2001: 48).

벗어나므로 제외하기로 한다.[11] 이상을 종합하면, Legendre의 공리, 공준 중 기하학적 양에 대하여 산술적 조작을 가능하게 하는 공리(공리 4, 공리 5, 공리 6, 공리 7, 공리 9)와 최단거리에 대한 공리(공리 12)가 오늘날의 중학교 기하 교재에서 기본가정으로 취급되고 있는 것으로 보인다.

현재 중학교 기하가 Euclid와 Legendre의 공리, 공준만을 받아들이고 있는 것은 아니다. 학교기하에는 위에서 기술한 기본가정들과 더불어 '실수'를 자유롭게 쓸 수 있도록 보장하여 주는 Birkhoff(1959)의 공리를 받아들이고 있다. Birkhoff의 공리 중 '실수'와 기하학적 양을 연결하여 주는 공리를 추출하면 다음과 같다. '직선 측도(Line Measure); 직선 위의 점에 대하여 그 점에 부여된 수의 차가 두 점 사이의 거리를 나타내도록 수를 대응시킬 수 있다', '각 측도(Angle Measure); 시작점이 동일한 모든 반직선들에 대하여 대응되는 수의 차가 각을 나타내도록 수를 부여할 수 있다', '모든 평각은 같은 측도를 갖는다(180°).', '넓이 가정(Area Assumption) 1; 모든 다각형은 넓이라고 불리는, 다음의 성질을 가지는 수를 가진다. (a) 합동인 다각형은 같은 넓이를 가진다. (b) 다각형의 넓이는 그 구성 다각형의 넓이의 합과 같다', '넓이 가정(Area Assumption) 2; 직사각형의 넓이는 그 나비와 높이의 곱과 같다. 즉, $A=bh$ 이다.'

이러한 Birkhoff의 공리는 학교수학의 곳곳에서 사용되고 있다. '수직선', '선분의 길이', '각의 크기', '다각형의 넓이'라는 말은 모두 이러한 공리를 가정하지 않고서는 논의하기 어려운 것이며, 실제로 이러한 공리는 초등학교 수학에서 비형식적으로 가정되어 있다. '선분'을 정의하고 '선분의 길이'를 단위 길이로 설명하는 것은 [2-가] 단계 교과서에서 찾아볼 수 있다. 먼저 선분을 '두 점을 곧게 이은 선'으로 정의하고(교육인적자원부 2000: 33), 길이의 측정을 다루면서 단위 길이의 개념을 '뼘의 길이와 같이 어떤 길이를 재는 데 기준이 되는 길이'로 도입한다(교육인적자원부 2000: 71). 이후 단위 길이를 통일할 필요성에 대하여 논의하면서 1cm를 표준 단위 길이로 도입하여 선분의 길이와 수를 대응시키고 있다.

이와 같이 유리수 나아가 실수의 구조를 기하의 양에 곧바로 대응시켜 사용할 수 있게 되었으므로, 산술에서 사용되는 모든 기본 연산 규칙 및 다항식의 전개 공식 등이 학교기하의 일종의 공리처럼 사용된다고 볼 수 있다. 현 중학교 기하 교과서는 기하 영역뿐 아니라 대수를 비롯한 수학의 여러 영역의 내용을 한 권에 서술하고 있으며, 이러한 전체적인 교재 구성 양식으로 인해 기하 영역의 내용을 다른 영역의 내용과 관련지어 전개할 수 있다. 예를 들어, Pythagoras정리의 증명을 대수적인 내용인 다항식의 전개 공식을 사용하여 전개하고 있다(조태근 외 4인, 2002: 28).

현 중학교 기하 교재에서는 이상과 같은 Euclid, Legendre, Birkhoff의 공리, 공준 이외에도 몇 가지 명제를 추가적으로 기본 가정으로 삼고 있을 가능성이 있다. 그러한 명제의 존재 여부를 확인하기 위하여 중학교 기하 교재에서 '명제', '가정', '결론', '증명', '정리'에 대한 논의가 이루어진 후의 명제에 대하여, 교재에 제시된 명제의 증명을 기초로 그 연역 과정을 분석하여 도해를 시도하고 그 각각의 도해에서 기본 가정을 추출하여 이를 다시 세밀하게 분석하였다(부록 1 참조). 그 결과 '평행선의 성

11) 공준 10은 고등학교 수학 II에서 '삼수선의 정리'로 논증된다(박두일 외 8인, 2003: 254-255).

질', '삼각형의 합동(결정)조건', '닮은 도형의 성질', '삼각형의 닮음조건'이 기본 가정으로 사용되고 있음을 알 수 있었다.

이상의 논의를 요약하여 보면, 평면 기하를 중심으로 하여 살펴볼 때, 현 중학교 기하 교재에는 Euclid의 공리 1-4, 공준 1-4 및 공준 5와 논리적으로 동치인 '두 직선이 평행하면 엇각의 크기가 같다'가 가정되어 있으며, Legendre의 공리, 공준의 경우에서는 기하학적 양에 대하여 산술적 조작을 가능하게 하는 공리와 두 점 사이의 최단거리에 대한 공리가 가정되어 있다. 또한 실수의 구조를 기하의 양에 곧바로 대응시켜 사용할 수 있게 하여 주는 Birkhoff의 공리가 가정되어 있으며, '평행선의 성질', '삼각형의 합동(결정)조건', '닮은 도형의 성질', '삼각형의 닮음조건'이 기본 가정으로서 취급되고 있음을 알 수 있다.

2. 중학교 논증기하 교재의 구성 형식 분석

현재 학교수학은 도형의 '존재성에 대한 엄밀한 접근'이라는 《Eulcid원론》의 방식을 수정하고 Legendre의 아이디어를 수용하여, 가설적 작도를 허용하는 구성 형식을 취하고 있다. 예를 들어 '사다리꼴'의 경우 '한 쌍의 대변이 평행한 사각형'으로 정의한 후, 곧바로 '$\overline{AD} // \overline{BC}$인 사다리꼴 $ABCD$에서 $\angle B = \angle C$이면 $\overline{AB} = \overline{DC}$임을 증명하는 문제를 다룬다(조태근 외 4인, 2002: 65).

Euclid는 기하학의 '제일 원리'라고 할 수 있는 정의, 공리, 공준을 추출하고 이로부터 모든 명제가 엄밀하게 논증되어가는 순서를 따르도록 하였다. Euclid의 원론의 제 I권의 경우 삼각형에 대한 명제 사이에 '각의 이등분(명제 9)', '맞꼭지각의 성질(명제 15)' 등이 들어가 있으며, 그러한 명제의 논증이 다시 삼각형에 대한 명제의 논증으로 연결된다는 점에서 오늘날의 교재에서의 정리 제시 방식과 차이를 보이고 있다.

이와 같은 《Eulcid원론》의 명제 배열의 원칙은 오늘날의 학교 기하가 취하고 있는 정리 제시 방식과 다르다. 현 학교 기하 교재(조태근 외 4인, 2001, 2002, 2003)는 '기본도형', '위치관계', '작도와 합동', '평면도형의 성질', '입체도형의 성질', '평면도형의 측정', '입체도형의 겉넓이와 부피', '삼각형의 성질', '사각형의 성질', '도형의 닮음', '닮음의 응용', '닮음의 활용', '피타고라스의 정리', '피타고라스의 정리의 활용', '원과 직선', '원주각', '원과 비례'와 같은 단원으로 이루어져 있다. 이와 같이 학교 기하 교재는 주제별 정렬의 원칙에 따라 구성되어 있다.

《Eulcid원론》은 논술형의 증명 진술 방법을 사용하고 있다. 논술형 증명이란 도형에 문자를 부여하는 것을 제외하고는 별도의 기호나 기법을 사용하지 않고 증명을 논술하여 나가는 형태를 일컫는다. 이러한 형태는 Legendre의 교과서에서도 그대로 이어진다. Legendre의 교과서 역시 정리를 증명함에 있어 특별히 굵은 글씨체를 사용하거나 별도의 기호를 사용하거나 특정한 부분을 강조하지 않고 모든 증명의 과정을 진술하는 방법을 사용하고 있다.

이러한 전통은 20세기에 들어서면서 학생들이 증명의 각 부분의 의미를 좀 더 명확하게 이해하는데 도움을 주고자 가정을 "주어진 것"으로 결론을 "증명할 것"으로 구분하여 기술하면서 흔들리게 된다. 당시 많은 교재에서 '주어진 것', '증명할 것', '증명'이라는 단어가 굵은 글씨체로 강조되어 인쇄되었다(Shibli, 1932: 142).

증명 진술 방식에 있어서 또 하나의 변화는

20세기 초 미국 교과서에서 소위 이단 증명 형식(two-column proof format)을 택한 것이다. Schultze(1912)는 지면의 왼쪽 절반을 차지하는 단에 증명을 단계별로 진술하고, 지면의 오른쪽에 각 진술에 대응하는 이유를 배치하는 이단 정렬 방식을 사용하였다. 이단 정렬 방식은 각각의 진술의 이유를 제시할 필요성을 좀 더 강하게 드러내고 교사가 학생의 과제를 검사하고 수정해 주는데 들어가는 시간을 절약할 목적으로 만들어졌다. 이러한 방식은 오늘날 우리나라 교과서에 그대로 반영되어 있지는 않으나, 논증 단계의 이유를 각 단계에서 별도로 표시하는 방식으로 변형되어 부분적으로 수용되고 있다.

요약하면 논술형 증명에서 증명의 이유를 분리하여 배치하는 방식으로, 도형을 나타내는 문자 이외에는 어떠한 기호도 사용하지 않던 것에서 여러 가지 기호를 사용하는 방식으로, 가정과 결론을 별도로 강조하지 않던 방식에서 '가정'과 '결론'을 별도로 강조하는 방식으로, 특별한 장식이 없이 정리를 배치하던 방식에서 미적 감각을 살린 교재 편집 방식을 보이는 방식으로 변화해 왔다고 할 수 있다.

한편 정의 제시 방법에 있어서도 《Euclid 원론》과 현 중학교 기하 교재는 차이를 보인다. 가장 큰 차이점은 원론에서는 '정의'에 해당하는 부분이 별도로 설정되어 있는데 비하여, 학교수학에서는 필요할 때마다 정의가 제시된다는 것이다. 이는 앞에서 논의한 주제별 정렬, 가정 목록의 확대와 같이, 논리적인 완결성보다는 학생들의 이해를 돕기 위한 교육적 배려가 강조되는 현대 학교 기하 교재구성의 기본 입장이 반영된 것으로 볼 수 있다.

《Eulcid원론》과 현대적 기하 교재의 커다란 차이점은 연습문제의 존재를 통해서도 드러난다. 《Eulcid원론》에서도 '문제'와 '정리'는 구분되어 있었으나, 이때의 '문제'는 그 모든 해법이 완벽한 형태로 서술되어 있는 명제로, 현대 기하 교과서에 수록되어 있는 학생들의 학습을 위한 '연습문제'와는 전혀 다른 성격의 것이다. Shibli(1932: 156)에 의하면, 연습문제가 중등학교 교재에 들어오게 된 것은 기하교육 전체 역사에 비추어 볼 때 상당히 최근의 일이다.

연습문제가 본격적으로 다루어지기 시작했던 초창기로 생각되는 1875년에 Todhunter(1875)가 편집한 《Eulcid원론》을 보면 부록으로 62개의 추가 명제가 제시되어 있고, 이어서 625개의 연습문제가 책의 말미에 붙어 있다(Todhunter, 1875). 그런데 이러한 배치 방식은 오늘날의 연습문제 배치 방식과는 다르다. 또 연습문제의 구체적인 내용도 오늘날과 달리 철저하게 기하적인 성격의 것에 국한되어 있었다.

20세기 초에 들어와 응용을 강조하는 방향으로 연습문제가 변화하게 된다. 이러한 변화의 배경에는 학교에서 학습한 것을 개인의 일상생활에서 기능하도록 하자는 20세기 초의 교육학의 영향이 있었던 것으로 보인다. 이러한 경향에 따르면, 기하를 인간 활동에 관계되지 않은 순수하게 추상적인 학문으로 가르쳐서는 안 되며, 실세계에서 실제적인 용도와 관련지어 가르침으로써 생명을 불어넣어야 한다. 기하에 생명을 불어넣는 한 가지 방법은 인간 활동의 다양한 실제 영역에서 만나는 응용문제를 도입하는 것이다(Shibli, 1932: 158-159).

산술과 결합된 새로운 유형의 연습문제도 등장하였다. Schultze(1928: 77-82)는 각의 개념과 그 관련 용어를 학생들에게 익숙하게 만드는 방법의 일환으로 수치 계산 연습문제를 사용할 것을 제안하였다. Schultze(1928: 99)는 연습문제를 푸는 것은 초심자에게는 적절하지 않으며 충분한 수의 형식적 명제를 숙달한 후에야 스

스로 문제를 풀 수 있다고 생각하여 연습문제를 교재의 후반부에 도입하거나 전체를 공부한 후에 연습문제를 다루던 그 당시의 교육을 비판하면서, 연습문제가 기하 학습에 필수불가결한 요소라고 주장하였다.

이러한 주장은 기하 자체에 대한 원론적 이해보다는 연습문제의 해결을 통한 창의적 사고의 개발이 기하교육에서 더 중요하다는 생각을 담고 있으며, 이것은 기하교육을 바라보는 관점에 있어 큰 변화가 일어났음을 시사한다. 당시에는 연습문제를 '창작(Originals)'이라고 표현하였는데, 이는 당시 연습문제를 푸는 행위가 '독창적인 것'을 추구하는 행위라는 의식이 있었음을 말해준다. The National Committee on Mathematical Requirements의 1923년도 보고서(MAA, 1923: 35)나 Smith의 Essentials of Plane Geometry(1923: 93)에도 '창작'이라는 용어가 사용되는 것으로 보아, 이후에도 상당한 기간 동안 '창작'이 연습문제와 동의어로 사용되고 있음을 알 수 있다. 이는 가장 기본적인 것(제일원리)를 굳건히 함으로써 그 이후 학습의 기초를 확고하게 하는 것이 중요하다는 것으로부터, 주어진 것을 받아들인 후 그것을 가지고 무엇을 할 수 있는가가 중요하다는 것으로 관점이 이동하였다는 것을 말해준다.

현 중학교 기하 교재에서도 연습문제는 중요한 위치를 차지하고 있다. 각 소단원이 끝나면 연습문제가 뒤따르며, 중단원, 대단원의 말미에 다시 단원을 정리하는 연습문제가 제시된다(조태근 외 4인, 2001, 2002, 2003). 현 중학교 기하 교재에는 "$\triangle ABC$가 이등변삼각형이면 $\triangle ABC$는 정삼각형이다'의 역을 말하고 그것의 참과 거짓을 알아보는 문제'(조태근 외 4인, 2002: 52)와 같은 참 거짓 판별형, '점 G는 $\triangle ABC$의 무게중심이고 $\overline{DE} // \overline{BC}$일 때, (1) $\overline{BF}=4$ cm, $\overline{GF}=3$ cm일 때, $\overline{AG}$, $\overline{\geq}$ 의 길이 구하기'(조태근 외 4인, 2002: 104)와 같은 수치 계산형, '강 건너에 있는 나무의 높이를 알기 위하여 측량한 결과가 주어졌을 때, 알맞은 축적으로 줄인 그림을 그려 나무의 실제 높이를 구하는 문제'(조태근 외 4인, 2002: 112)와 같은 실생활 응용문제, 오랜 전통을 가진 '주어진 명제 증명하기', '주어진 명제가 성립하는 이유 설명하기' 등 다양한 유형의 연습문제가 제시되어 있다.

V. 중학교 기하교재의 원론 교육적 재음미

1. 현 중학교 기하교재의 기본 관점 탐색

현 기하교재에 내포된 기본적인 입장의 하나는 《Euclid 원론》의 바탕을 이루는 제 1원리로서의 공리 공준에 대한 관점과 구분되는 기본 가정에 대한 입장이다. 기본 가정 선택에 관한 현 학교기하의 입장은 제 1원리로서의 공리의 기본적 특성과 엄밀한 논리적 전개, 그리고 '경제성'을 희생하더라도 교육적으로 건전한 출발점을 찾는 데 초점이 맞추어져 있다고 볼 수 있다.

공리의 개념을 완화시켜 교육적으로 건전한 출발점을 찾고, 가설적 작도를 추구하며, 필요할 때마다 정의를 제시하는 현 중학교 교재의 구성 형식은 역사-발생적 기하 원론에서도 찾아볼 수 있다. 제 III장에서 살펴본 바와 같이 역사-발생적 기하 원론 교육은 《Eulcid원론》의 공리적 전개를 거부하고 측정의 필요성을 기본으로 하는 발생적 문제 상황에서 출발하는 형식을 취하고 있다. 또 정오각형의 작도를 뒤로 미루면서(Clairaut, 2005: 21) 정다각형의 넓이에 대하여 논하는 것에서 가설적 작도를

허용한다는 것을 알 수 있다.[12] 그리고 Clairaut(2005: xi)가 그의 《기하학 원론》의 서문에서 정의, 공리, 공준 등으로 시작하는 고전적 원론을 비판하고 있는 점에서 알 수 있듯이, 역사-발생적 원론 교육은 정의 제시 방법에 있어서도 《Eulcid원론》의 체제에서 벗어나려고 하였다.

현 기하교재는 탐구 활동을 도입하고 있다는 점에서도 역사-발생적 원론과 그 형식적 특성을 공유한다고 볼 수 있다. 현 중학교 기하 교재에는 '탐구 활동'이 각 단원의 도입부에 제시되어 있다. [8-나 단계]의 경우에는 '삼각형의 성질', '사각형의 성질', '도형의 닮음', '닮음의 응용', '닮음의 활용' 단원 앞에 각각 하나씩 탐구 활동이 제시되어 있다(조태근 외 4인, 2002: 32, 53, 76, 87, 105).

역사-발생적 기하 원론 교육은 이러한 구성 형식뿐 아니라 내용적으로 추구하는 기하학적 사고 교육이란 면에 있어서도 현 중학교 기하 교재에 기본적인 영향을 미친 것으로 보인다. 제 III장에서 논의한 바와 같이, 역사-발생적 기하 원론 교육의 이면에는 직관적이고, 계량적이며, 응용을 강조하고, 탐구와 발견을 추구하며, 운동 개념을 기하에 도입하고, 극한과 무한소 방법을 논증 과정에 사용하는 Archimedes적인 정신이 들어 있다. 이러한 정신은 현 중학교 기하 교재에서도 일부 찾아볼 수 있다. 현 중학교 기하 교재에서는 실수를 기하학적 양에 대응시키는 계량적 성격의 공리를 암묵적으로 사용하고, 도형의 성질에 대한 수치 계산의 연습문제를 다루며, 원기둥을 그에 내접하는 각기둥의 극한으로 보아 그 부피 구하는 공식을 도입하고[13], 구를 회전체로 정의[14]하며 도형의 확대 축소[15]를 다루고, 직관적으로 극한 방법을 사용하며, 응용을 중요하게 취급한다. 또한 연습문제와 탐구활동을 제시하여 탐구하고 발견하는 정신을 추구하고 있다.

한편 제 7차 수학 교육과정에 제시된 교수학습 방법 (3)항의 "문제해결은 전 영역에서 정형문제 및 비정형 문제를 통하여 지속적으로 지도되어야 하며, 여기서 습득된 문제해결 전략이 실생활의 문제해결에 활용될 수 있도록 한다"는 기본입장은 탐구와 발견의 정신을 추구한다는 입장과 다를 바 없다.

이로부터 현 중학교 기하교재가 그 내용적 근원을 고전적 원론에 두고 있는 동시에, 다양한 측면에서 역사-발생적 원론의 특성을 수용하고 있다고 볼 수 있을 것이다. 곧, 현재의 중학교 기하교재는 나름대로 고전적 원론과 역사-발생적 원론의 이념을 수용하고 이를 통합하려는 역사적 발전의 산물로 나타난 것으로 볼 수 있다.

그러나 고전적 원론과 역사-발생적 원론의 이념이 현 기하교육을 통하여 충분히 유기적인 하나의 전체로 통합되어 추구되고 있다고 보기는 어렵다. 논증기하가 중학교 수학의 중심적인 내용이 된 이래, 특히 증명 지도의 맥락에서 여러 가지 학습-지도상의 어려움과 문제점이 지적되고 있는 한편(우정호, 1994: 14; 서동엽, 1999: 2), 기하의 핵심적인 사고 양식을 탐

---

12) Clairaut는 기하학의 자연스러운 발생적 전개를 시도하고 기하의 근원을 측정 활동으로 보고 있기 때문에, 도형의 존재성을 실제적인 예- 강뚝, 땅, 건축용 석재 등의 모양으로부터 보장받고 있으므로, 그에게 가설적 작도와 같은 문제는 발생하지 않을 것으로 보인다.

13) 각기둥을 이용하여 원기둥의 부피를 구하는 방법을 알아본다(조태근 외 4인, 2001: 126).

14) 구를 반원을 직선을 회전축으로 하여 1회전한 회전체로 정의한다(조태근 외 4인, 2001: 96).

15) 두 도형에서 한 쪽이 다른 쪽을 일정한 비율로 확대 또는 축소한 것과 합동일 때.. (하략) (조태근 외 4인, 2002: 77)

구하고 발견하고 응용하는 실제 수학적인 사고 교육을 목적으로 하는 역사-발생적 기하 원론 교육의 목적을 적절히 구현하고 있다고 보기 어렵기 때문이다.

고전적 원론 교육과 역사-발생적 원론 교육이 하나의 유기적인 전체로 상보적으로 통합되려면, 공리 선택, 정리 배열 방식이나 증명 기술 방식, 연습문제의 제시 여부와 같은 일반적인 교재 구성 형식면에서의 통합으로는 부족하며, 삼각형의 내각의 합이나 Pythagoras의 정리와 같은 구체적인 수학적인 내용을 전개하는 일련의 과정 속에서 두 원론의 장점이 유기적으로 드러나고 연결될 수 있어야 한다. 이를 위해서는 두 가지 원론 교육의 상보적 통합 방안 모색을 위한 좀 더 체계적이고 근본적인 논의가 필요하다.

인간 활동으로서의 수학, 안내된 재발명을 통한 수학적 사고교육을 근본이념으로 삼고 있는 Freudenthal의 수학화 교육이론과 그 방법론적 기초를 제공한 van Hieles의 기하 학습 수준 이론은, 발견과 발생적 맥락을 강조하는 역사-발생적 기하 원론 교육으로부터 형식적 수학을 추구함으로써 실재에 접근하고자 하는 고전적 원론 교육으로 나아가는 일련의 계열을 구성하는데 시사하는 바가 있다. 또한 기하학의 역사에 비추어 개인 학습자에 있어서의 기하 교육은 실험적인 수준에서 직관적인 수준을 거쳐 학문적인 수준으로 점진적으로 추구되어야 한다는 Branford의 견해는 역사-발생적 기하 원론 교육과 고전적 원론 교육을 상보적으로 보완할 수 있는 구체적인 방안을 시사하는 것으로 해석될 수 있다. 이에 다음 절에서는 Freudenthal의 수학화 교육론과 van Hieles의 기하 학습수준 이론, Branford의 역사-발생적 기하교육론을 두 원론의 상보적 통합 방안을 모색하는데 주안점을 두어 재음미하고자 한다.

2. 국소적 조직화를 통한 두 원론의 상보적 통합

Freudenthal(1991: 5-10)은 수학이 상식에서 출발하여 점진적으로 체계화, 조직화되어 간다고 보고, 이 과정을 현상과 본질의 교대 작용인 수학화로 설명한다. 수학화 과정은 한 수준에서의 정리 수단인 본질이 그 다음 수준에서 현상, 곧 연구의 대상이 되는 과정을 통해서 수준의 상승이 일어나는 불연속적 과정이다. 수학화는 현실 내의 풍부한 문맥 내에서 이상화와 단순화 과정을 통해서 비본질적인 것을 제거하고 그 문맥 내의 본질을 이해하고 그 정리 수단인 본질을 찾고 조직해 나아가는 과정이다. 즉, 여러 가지 상황, 문제, 절차, 도식, 법칙, 알고리즘, 구조, 공식, 기호 체계, 공리체계 등과 같은 현실 또는 수학적 상황 속에서 본질을 파악해 나가는 과정이며, 공리화는 수학화 활동 과정의 마지막에 일어나는 과정이다. 현실 상황에서 드러나는 수학적인 요소들을 찾아내어 세련시켜가며 조직하는 과정은 한 영역에 대한 국소적인 조직화일 수도 있고, 전반적인 조직화일 수도 있다(정영옥, 1997: 23-25).

수학화 과정을 강조하는 이러한 Freudenthal의 관점에서 보면 수학자들의 연구 결과인 '기성수학'을 초등화한 것을 수학교육을 위한 출발점으로 받아들여 교육하는 것은 앞과 뒤가 바뀐 것이다. 그는 이러한 사태를 '반교수학적 전도'(1983: v)라고 부르며 비판하였다.

Freudenthal이 주장하는 수학화 학습의 방법적 기초이론으로 제시된 것이 van Hieles의 기하 학습수준 이론이다. van Hiele(1986)의 학습수준 이론에 의하면, 학생들은 $n-1$수준을 통과하지 않고 n 수준에 도달할 수 없으며, 서로 다른 수준에서 추리하는 사람은 서로를 이해할 수 없다. 이것이 교사와 학생 사이에 자주 발생

하여 학습-지도를 어렵게 만드는 요인이 되고 있다. 모든 학생들이 같은 속도로 각 수준을 통과하지 않으며, 수준의 이행은 적절한 지도에 의해 촉진될 수도 있고 부적절한 지도 때문에 지연될 수도 있다. 또한 앞의 수준의 사고에서 내재적이었던 것이 그 다음 수준에서 의식화되어 명확히 인식되게 되며, 각 수준의 사고는 고유한 기호와 그를 연결하는 관계망을 가지고 있다. Van Hieles의 통찰에 의하면, 수학적 사고 활동은 경험의 세계를 단계적으로 추상화하여 조직화하는 활동이며, 한 수준에서 경험을 정리하는 수단이 새롭게 경험의 대상으로 의식화되어 그것을 조직화하는 활동이 이루어지게 되면서 그 다음 수준으로의 사고의 비약을 하게 된다. 그러나 여기서 수학적 사고가 계층을 이룬다고 하더라도 분명히 전순서는 아니며 부분순서일 것이라는 점, 따라서 수학적 사고교육은 Freudenthal이 주장하는 국소적 조직화의 형태가 되어야 할 것이라는 점에 유의할 필요가 있다.

현실 세계에서 출발하여 점진적인 수학화 과정을 거쳐 국소적 조직화, 나아가 전체적 조직화인 공리화에 이르는 Freudenthal의 수학화 학습이론과 van Hieles의 기하 학습수준 이론은 고전적 원론 교육의 이념과 역사-발생적 기하 원론 교육의 이념을 교육의 시간 계열 속에서 상보적으로 통합하는 방안을 모색하는데 중요한 배경 이론이 될 수 있다. 수학이 상식에서 출발하여 점진적으로 체계화, 조직화되어 간다고 보고 기성의 논리체계로서 기하를 학생들에게 부과할 것이 아니라 국소적으로 조직화하는 활동을 통하여 최종적으로 논리체계로서의 기하에 도달할 수 있도록 지도할 것을 요구한 Freudenthal의 입장은 기성지식의 전달로서의 형식적인 기하학적 지식의 전달을 지양하고 기하학적 사고의 핵심적인 관점을 탐구하고 발견하는 수학적 사고 교육을 목적으로 하는 역사-발생적 기하 원론 교육의 이념을 포괄하는 것으로 보인다. 동시에 궁극적으로 전체적인 조직화라고 할 수 있는 공리화에 이르도록 요구한다는 점에서, Freudenthal의 수학화 학습론은 고전적 원론 교육의 이념 또한 추구하고 있다고 말할 수 있다.

Freudenthal의 수학화 이론의 방법적 기초 이론이라고 할 수 있는 van Hieles의 기하 학습수준 이론 역시 두 가지 원론 교육의 이념을 동시에 추구하는 방편을 마련하는데 유익한 시사를 제공할 가능성이 있다. 중학교 논증기하를 학습하는 단계는 van Hieles의 수준 이론에 비추어 볼 때, 명제를 논리로 조직하는 제 3수준에 해당한다. 수학화를 수학적 활동의 본질로 보는 Freudenthal의 이론과 이러한 van Hieles의 기하 학습수준 이론은 명제를 논리로 조직하는 활동 속에서 두 원론 교육의 이념이 상보적으로 추구될 수 있음을 시사한다. 그러나 van Hieles의 제 3수준에서 두 원론 교육의 이념을 구현하는 구체적인 교육적 방안을 모색하기 위해서는 van Hieles의 광역적인 수준 구분보다 더 세밀한 수준에 관한 논의가 필요하다. 실제로 학습수준에 관한 Freudenthal의 견해는 van Hieles가 제시한 수준과는 다소 차이가 있다. Freudenthal에게 수준은 절대적이라기보다는 상대적이고, 거시적이라기보다는 미시적인 것이다. 그는 개별적인 학습 과정에서 드러나는 불연속성을 3-4개의 수준에 따라 구분함으로써 설명할 수는 없으며, van Hieles의 수준은 뚜렷하기는 하지만 너무 광범위한 기하학적 사고를 포괄한다고 본다(Freudenthal, 1973).

제 III장에서 살펴본 바와 같이, Branford는 증명을 실험적 증명, 직관적 증명, 학문적(수학적) 증명의 세 가지 종류로 구분하고, 수학의 역사적 발전 과정에 비추어 볼 때 증명 학습도 이러한 과정을 거치는 것이 자연스럽다고 주장

하였다. 명제를 논리로 조직하는 제 3수준의 수학화 과정에서는 논증 활동이 주된 역할을 한다. 따라서 증명의 개념을 직관적 증명과 형식적 증명으로 세분하는 것은 제 3수준에서 이루어지는 논증 활동을 세분하여 조직하는데 도움이 될 수 있다. Branford가 제시한 직관적 수준에서 학문적 수준으로 나아가는 과정은 van Hieles의 제 3수준인 명제를 논리로 조직하는 단계에서 역사-발생적 원론과 고전적 원론을 상보적으로 통합하는 방안이 될 수 있다. 처음부터 형식적 논증을 가르치지 않고 직관적 증명을 거쳐 점진적으로 형식적 증명으로 나아가는 것은, 논증의 형식성으로 구분되는 역사-발생적 기하 원론 교육과 고전적 원론 교육 사이의 간극을 메워 주는 아이디어가 될 수 있기 때문이다.

한편 이상의 방안이 진정한 의미에서의 두 원론의 유기적 통합이 되기 위해서는 직관적 증명에서 형식적 증명으로의 수준 상승의 과정에서, 직관적인 방법을 사용하고, 수학의 계량적 측면을 비계량적 순수 기하와 결합시키고, 수학의 응용적 측면을 소재로 사용하며, 발생적 상황으로부터 출발함으로써 탐구와 발견의 정신을 추구하고, 명제의 증명에 극한과 무한소 방법을 도입하여 연속수학의 정신을 추구할 필요가 있다. 이는 한 마디로 말하면 'Euclid의 정신'을 'Archimedes의 정신'으로 보완하는 것이며, 그 각각의 정신이 두 원론의 내적인 이념으로 작용하고 있다는 것에 주목하여 볼 때 진정한 의미에서의 통합을 위하여 필연적으로 요구된다고 하겠다.

VI. 결론 및 제언

본 연구는 수학의 모태이자 전형으로, 기원적 3세기 경에 집필된 이후 19세기 말까지 2000여 년 동안 수학교육의 내용과 방법을 지배해 왔으며 오늘날까지 학교기하의 바탕이 되고 있는 《Euclid원론》과 18세기 중반에 발견과 개발 정신으로 집필된 Clairaut의 역사-발생적《기하학 원론》을 기하교육의 기본 패러다임으로 보고, 《원론》교육론의 이론적 체계화를 시도한 것이다.

현 중학교 기하교재는 그 내용적 근원을 고전적 원론에 두고 있는 동시에, 다양한 측면에서 역사-발생적 원론의 특성을 수용하고 있다고 볼 수 있다. 곧, 현재의 중학교 기하교재는 나름대로 고전적 원론과 역사-발생적 원론의 이념을 수용하고 이를 통합하려는 역사적 발전의 산물로 나타난 것으로 볼 수 있다.

그러나 고전적 원론과 역사-발생적 원론의 이념이 현 기하교육을 통하여 충분히 유기적인 하나의 전체로 통합되어 추구되고 있다고 보기는 어렵다. 논증기하가 중학교 수학의 중심적인 내용이 된 이래, 특히 증명 지도의 맥락에서 여러 가지 학습-지도상의 어려움과 문제점이 지적되고 있는 한편, 기하의 핵심적인 사고 양식을 탐구하고 발견하고 응용하는 실제 수학적인 사고 교육을 목적으로 하는 역사-발생적 기하 원론 교육의 목적을 적절히 구현하고 있다고도 보기 어렵기 때문이다. 고전적 원론 교육과 역사-발생적 원론 교육이 하나의 유기적인 전체로 상보적으로 통합되려면, 공리 선택, 정리 배열 방식이나 증명 기술 방식, 연습문제의 제시 여부와 같은 일반적인 고전적인 원론 교육을 위한 교재 구성 형식면에서의 재구성만으로는 부족하며, 구체적인 수학적인 내용을 전개하는 일련의 과정 속에서 두 원론의 장점이 유기적으로 드러나고 연결될 수 있어야 한다.

원론 교육의 관점에서 볼 때, 고전적인 원론과 역사-발생적인 원론 속에 살아 숨쉬는 '연

역적 체계화'의 정신과 '논증'의 정신, 그리고 기하를 '탐구'하고 '발견'하는 정신의 교육이 매우 중요하다. 이러한 정신을 교육하기 위해서는 무엇보다도 평면 논증기하의 기본적인 내용을 역사-발생적으로 도입하고 이후 점진적으로 연역적 형식을 가르치는 가운데 'Euclid의 정신'과 'Archimedes의 정신' 양자를 유기적으로 통합한 기하교재가 절실히 요구된다. 본고에서 제시된 관점과 결과를 발전시켜 중학교 기하 전반에 걸쳐 두 원론의 정신을 유기적으로 통합한 교재 개발과 수업 연구가 후속 연구로 이루어지기를 기대한다.

참고문헌

교육부(1997). **제 7차 교육과정**. 교육부 고시 제 1997-15호 [별책 8].

교육인적자원부(2000). **수학 2-가**. (주)대한교과서.

교육인적자원부(2001). **수학 4-나**. (주)대한교과서.

박두일 외 8인(2003). **고등학교 수학 II**. (주)교학사.

서동엽(1999). **증명의 구성 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색**. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

우정호(1985). 조작적 수학교육 프로그램. **서울대학교 사범대학 사대논총, 31**, 161-181.

_____(1986). van Hiele의 수학 학습수준 이론에 대한 소고. **서울대학교 사범대학 사대논총, 33**, 85-103.

_____(1994). 증명지도의 재음미. **대한수학교육학회 논문집, 4**(1), 3-24.

임재훈(1998). **플라톤의 수학교육 철학 연구**. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

조태근 외 4인(2001). **중학교 수학 7-나**. (주)금성출판사.

_____(2002). **중학교 수학 8-나**. (주)금성출판사.

_____(2003). **중학교 수학 9-나**. (주)금성출판사.

한대희(2000). **인간교육으로서의 수학교육**. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

池田美惠 외 3인(1973). *ユークリッド 原論*. 公立出判株式會社.

Allman, G. J. (1889). *Greek geometry from Thales to Euclid*. Dublin, London, Hodges, Figgis; Longmans, Green, & co.

Arcavi, A. (1985). *History of mathematics as a component of mathematics teachers background*. Unpublished doctoral dissertation, Weizmann institute of science, Rehovot.

Birkhoff, G. D. (1932). A set of postulates for plane geometry(based on scale and protractor). *Annals of Mathematics, 33*, 329-345.

Birkhoff, G. D., & Beatley, R. (1959). Basic geometry. New York: Chelsea Publishing Company.

Blum, W., & Kirsch, A. (1991). Preformal proving: examples and reflections. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 183-203.

Branford, B. (1908). *A study of mathematical education*. Oxford: Clarendon Press.

Cajori, F. (1910). Attempts made during the eighteenth and nineteenth centuries to reform the teaching of geometry. *The American Mathematical Monthly, 17*(10), 181-201.

_____.(1924). *A history of elementary mathematics with hints on methods of teaching*. London: Macmillan.

Clairaut, A. C. (2005). **기하학 원론**. (장혜원, 역). 서울: 경문사. (불어 원작은 1761년 출판).

Eves, H. (1995). 수학사. (이우영 · 신항균, 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1953년 출판).

Freudenthal, H. (1991), *Revisting mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Greenberg, M. J. (1990). **Euclid 기하학과 비 Euclid 기하학**. (이우영, 역). 서울 : 경문사. (영어 원작은 1974년 출판).

Heath, T. L. (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements with introduction and commentary*. New York: New Dover Publications.

Human, P. J., & Nel, J. H. (1987). *Alternative instructional strategies for geometry education: a theoretical and empirical study*. Final report of the university of Stellenbosch Experiment in Mathematics Education(USEME)-project: 1977-78.

Klein, F. (1939). *Elementary mathematics from an advanced standpoint*. New York: Dover Publications.

Laird, W. R. (1991). Archimedes among the Humanists, *Isis, 82*(4), 628-638

Lakatos, I. (1991). **수학적 발견의 논리**. (우정호, 역). 서울 : 민음사. (영어 원작은 1976년 출판).

Legendre, A. M. (1866). *Elements of geometry and trigonometry*, adapted by Davies, C.. New York: A. S. Brandes & CO.

Morrow, G. R. (1970). Proclus: A commentary on the first book of Euclid's Elements. Princeton University Press.

Perry, J. (1902). The teaching of mathematic. *Discussion on the teaching of mathematics* held at the British Association Meeting, Glasgow (pp. 221-245). London: Macmillan.

Schultze, A. (1912). *The teaching of mathematics in secondary schools*. New York: The Macmillan Company.

Shibli, J. (1932). *Recent development in the teaching of geometry*. The Maple Press Company.

Stamper, A. W. (1909). *A history of the teaching of elementary geometry*. New York: AMS press.

Steiner, H. G. (1988). Two kinds of "Elements" and the dialectic between synthetic-deductive and analytic-genetic approaches in mathematics. *For the Learning of Mathematics, 8*(3), 7-15.

Todhunter, I. (1875). *The Elements of Euclid for the use of schools and colleges with notes, an appendix, and exercises*. London: Macmillan and co.

Toeplitz, O. (1967). *The calculus - a genetic approach*. Chicago: The University of Chicago Press. (독어 원작은 1949년 출판).

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight*. Orlando, FL: Academic Press, Inc.

A Study on Teaching of the Elements of Geometry in Secondary School

Woo, Jeong Ho (Seoul National University)
Kwon, Seok Il (Graduate School of Seoul National University)

It is regarded as critical to analyse and re-appreciate Euclidean geometry for the sake of improving school geometry. This study, a critical analysis of demonstrative plane geometry in current secondary school mathematics with an eye to the viewpoints of 'Elements of Geometry' , is conducted with this purpose in mind.

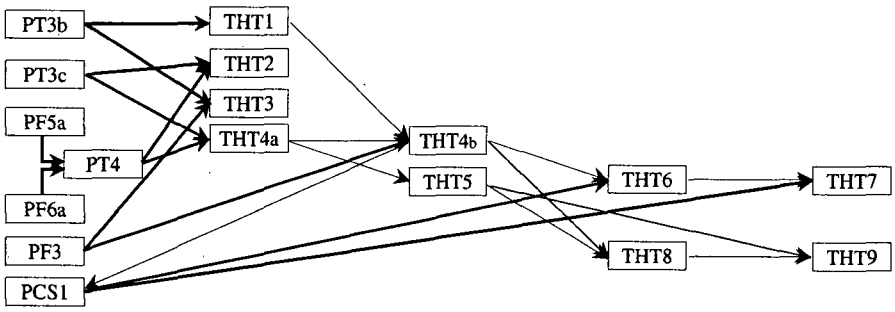
Firstly, the 'Elements' is analysed in terms of its educational purpose, concrete contents and approaching method, with a review of the history of its teaching. Secondly, the 'Elémens de Géometrie' by Clairaut and the 'histo-genetic approach' in teaching geometry, mainly the one proposed by Branford, are analysed. Thirdly, the basic assumption, contents and structure of the current textbooks taught in secondary schools are analysed according to the hypothetical construction, ordering and grouping of theorems, presentations of proofs, statements of definitions and exercises. The change of the development of contents over time is also reviewed, with a focus on the proportional relations of geometric figures. Lastly, the complementary way of integrating the two 'Elements' is explored.

* **Key words** : the Elements of geometry(원론), teaching of the Elements of geometry(원론 교육), geometry education(기하 교육), demonstrative geometry(논증 기하), complementary integration(상보적 통합)

논문접수 : 2006. 1. 7
심사완료 : 2006. 2. 6

부록 1

아래 도해에서 P로 시작하는 명제는 '가정', '결론', '증명', '정리'에 대한 논의가 이루어지기 전부터 다루어지는 명제와 그 이후에 나온 명제 중에서 '증명'을 하지 않고 사용되는 명제를 의미한다. T로 시작하는 명제는 '증명'에 대한 논의 이후에 나오는 명제 중에서 증명된 명제를 의미한다. 굵은 선은 증명 과정을 거치지 않은 명제로부터 연역되는 과정을 의미한다. 얇은 선은 단원 안에서 증명된 명제로부터의 연역 과정을 의미하며, 점선은 그 단원이 아닌 부분에서 논증이 이루어진 명제로부터의 연역 과정을 의미한다. 본 연구에서는 중학교 논증 기하의 모든 단원에 대하여 이러한 분석을 실시하였으나 여기서는 '삼각형'에 대한 명제들만 예시하기로 한다.



현 학교기하의 연역 구조 분석 - 삼각형

이러한 분석을 통하여, 중학교 기하 교재에서 기본 가정으로 취급되고 있는 명제들을 다음과 같이 추출하고, 이 중에서 Legendre의 공리에 해당되는 것, Birkhoff의 공리에 제시되거나 그로부터 연역된 것으로 볼 수 있는 것, 마지막으로 입체기하에 대한 것을 제외하면 다음과 같은 명제가 남게 된다.

◎ 두 직선이 한 직선과 만날 때,
1 두 직선이 평행하면 동위각의 크기는 같다.
2 동위각의 크기가 같으면 두 직선은 평행하다.

◎ 두 직선이 한 직선과 만날 때,
1 두 직선이 평행하면 엇각의 크기는 같다.
2 엇각의 크기가 같으면 두 직선은 평행하다.

◎ 삼각형의 합동조건
두 삼각형은 다음의 각 경우에 서로 합동이다.
1 세 변의 길이가 각각 같을 때(SSS)
2 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 각각 같을 때(SAS)

3 한 변의 길이와 그 양 끝 각의 크기가 각각 같을 때(ASA)

◎ 닮은 두 평면도형에서

1 대응하는 선분의 길이의 비는 일정하다.

2. 대응하는 각의 크기는 각각 같다

◎ 두 삼각형은 다음 각 경우에 닮은꼴이다.

1. 세 쌍의 대응하는 변의 길이의 비가 같을 때

2 두 쌍의 대응하는 변의 길이의 비가 같고, 그 끼인각의 크기가 같을 때

3 두 쌍의 대응하는 각의 크기가 각각 같을 때

이와 같은 명제는 각각 '평행선의 성질', '삼각형의 합동조건', '닮은 도형의 성질', '삼각형의 닮음조건' 등으로 이름을 붙여 사용되기도 한다. '평행선의 성질'은 논리적인 정당화 과정 없이 각각 그림을 통하여 직관적으로 정당화하면서 제시되고 있으므로(조태근 외 4인, 2001: 47-48), 현 중학교 기하 교재에서 기본 가정의 범주에 넣을 수 있다. '두 직선이 평행하면 엇각(동위각)의 크기가 같다'는 명제는 평행선 공리와 논리적으로 동치이고(Greenberg, 1990: 98), '엇각(동위각)의 크기가 같으면 두 직선은 평행하다'는 명제는 평행선 공리를 가정하지 않는 중립기하학의 명제이지만(Greenberg, 1990: 87), 이러한 사실에 대한 논리적인 정당화 과정은 물론 중학교 기하 교재에서 찾아보기 어려우므로, 이 두 명제는 기본 가정의 범주에 넣을 수 있다.

한편, '삼각형의 합동조건'은 작도를 통하여 정당화되는 '삼각형의 결정조건'으로부터 나오는 것이라는 점을 고려하면,[16] 삼각형의 합동조건보다 결정조건을 기본가정으로 보는 것이 타당하다. 다른 한편, 앞에서 진술한 바와 같이, 역사적으로 오랜 기간 논란을 거치면서 하나씩 학교 기하에 기본 가정으로 포함된 것은 삼각형의 합동조건이었으며, 실제로 중학교 기하 교재에서 이후 내용의 전개 과정에서 계속적으로 기본가정처럼 자주 사용되는 것은 삼각형의 합동조건이다. 이 점을 고려하면 삼각형의 합동조건이 중학교 기하 교재에서 기본가정처럼 사용되고 있다고 보는 것도 타당하다. 이러한 두 측면을 종합적으로 고려할 때, '삼각형의 합동(결정)조건'이 중학교 기하 교재에서 기본가정으로 사용되고 있다고 할 수 있을 것이다. '닮은 도형의 성질'과 '삼각형의 닮음조건' 역시 명확한 논리적인 정당화 과정의 제시 없이 두 배 확대한 그림과 같은 특수한 경우에 대해 살펴보고 있으므로(조태근 외 4인, 2002: 78-82), 학교수학에서 기본 가정으로 취급되고 있는 것으로 보는 것이 타당하다.

---

16) 삼각형의 결정조건은 현 중학교 기하 교재에서 삼각형의 '모양과 크기'를 유일하게 결정하기 위한 조건을 작도 활동을 통하여 찾아보는 방법을 통하여 지도되고 있다(조태근 외 4인, 2001). 현 기하 교재에서는 '모양이나 크기를 바꾸지 않고 다른 도형에 완전히 포갤 수 있을 때, 이 두 도형을 합동'으로 보고 있기 때문에 이러한 삼각형의 결정조건으로부터 삼각형의 합동조건이 따라 나오게 된다. 동일한 결정조건을 만족하는 두 개의 삼각형이 있다면 두 삼각형의 모양과 크기가 같을 수밖에 없기 때문이다.