

論文

임계속도를 이용한 로터의 결함 위치와 크기 판별

김홍수*, 조맹효**

Detecting Location and Depth of Cracks in Rotor using Critical Speed

Heung Soo Kim* and Maenghyo Cho**

ABSTRACT

Structural health monitoring has been conducted by non-destructive evaluation method when a turbine rotor system of an aircraft engine has cracks. Local stiffness of a turbine rotor system is degraded and critical speed is changed due to the presence of cracks in rotor. Critical speed which is affected by location and depth of crack, is obtained using compliance matrix of cracked rotor. The database of the obtained critical speed is used to evaluate structural health monitoring of a rotor system of a gas turbine engine.

초 록

항공기의 가스터빈 엔진에서 축에 결함이 있을 경우에 대한 건전성 평가를 비파괴방법으로 접근했다. 로터의 축에 결함이 있을 경우에는 국지적으로 강성이 약화되어 임계속도가 달라진다. 결함이 있는 축의 순응도(compliance)행렬을 이용해서 각각의 결함의 위치와 깊이에 따른 임계속도를 구하고 이러한 결과들을 이용해 역 문제에 대한 자료를 구축함으로써 엔진 축의 건전성 평가를 수행하였다.

Key Words : Rotor(로터), Crack(결함), Critical speed(임계속도), Structural health monitoring (구조 건전성 평가), Non-destructive evaluation(비파괴 검사)

1. 서 론

운항 중인 항공기에서 엔진의 고장은 치명적이다. 따라서 항공기에서 엔진의 건전성 평가는 공학적으로 중요한 문제이다. 본 연구에서는 엔진 축에 결함(crack)이 있을 경우에 대한 건전성 평가를 진동의 특성을 이용한 비파괴방법으로 접근했다. 엔진 축에 결함이 없는 경우와 비교하면 결함이 있는 경우에는 임계속도(critical speed)가 달라진다. 결함이 있는 경우에 대한 임계속도를 미리 알 수 있다면 엔진 축에 측정 장치를 설치

하여 임계속도와 진동 모드를 조사함으로써 결함의 유무를 알 수 있게 된다.

구조물에서 횡 방향으로 결함이 있을 경우에는 국지적으로 강성이 약화된다. 보의 경우에 국지적 유연도 행렬(local flexibility matrix)의 크기는 자유도의 개수에 영향을 받는데, 최대는 6×6이다. 이러한 행렬은 Dimarogonas 와 Paipetis[1]가 비틀림을 무시하고 5개의 자유도와 횡 방향 결함을 갖는 사각 단면 보에 대해서 최초로 유도했다. 그 이후로, 여러 연구자들이 이러한 강성행렬 또는 유연도행렬에 대해 연구를 해 왔다. Okamura[2] 와 Liebowitz et al.[3]은 인장이 가해질 경우에 대한 대각행렬요소들을 계산했고, Rice 와 Levy[4]는 인장과 굽힘 하중 그리고 그 연성항에 대한 4개의 행렬항을 계산했다. Dimalogonas와 Massourous[5]는 결함 끝단에서

† 2005년 8월 25일 접수 ~ 2006년 3월 22일 심사완료

* 정회원, 인하대학교 기계공학과

** 정회원, 서울대학교 기계항공공학부
연락처, E-mail : mhcho@snu.ac.kr
서울시 관악구 신림동 산 56-1

전단력이 작용하는 경우에 대한 대각행렬을 구하였다. Papadopoulos와 Dimarogonas[6]는 횡방향 결함이 있는 축에 대한 완전한 6×6 유연도 행렬을 유도했다. 이 행렬의 요소들은 참고문헌[1]에 나와 있는 방법으로 계산했다. 이러한 해석 방법은 응력확대계수(Stress Intensity Factor)와 스트레인 에너지 밀도 함수(Strain Energy Density Function)에 기초를 두고 있다[7].

본 연구에서는 결함이 있는 축의 순응도 행렬을 이용해서 각각의 결함의 위치와 깊이에 따른 임계속도를 구한 다음, 이러한 결과들을 이용해 역 문제에 대한 자료를 구축함으로써 엔진 축의 건전성 평가를 수행하도록 하였다.

II. 본 론

2.1 결함(CRACK) 모델링

결함이 생겼을 경우에 발생하는 국부 유연도를 계산하기 위해 반지름 $R=D/2$ 이고 횡 방향으로 결함의 깊이가 α 인 강성이 주어져 있는 로터 축을 그림 1과 같이 모델링을 한다. 여기서 로터 축은 인장력 P_1 전단력 P_2, P_3 굽힘 모멘트 P_4, P_5 그리고 비틀림 모멘트 P_6 를 받게 된다. 국부유연도행렬은 자유도의 개수에 좌우되는데 여기서는 6×6이다.

본 연구에서는 Dimalogonas[1]가 제안한 국부 유연도를 이용하여 축의 결함을 모델링하였다. 결함에 의해 단위 길이 당 발생하는 국부유연도는 다음과 같이 정의된다.

$$c_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial P_j} = \frac{\partial^2}{\partial P_i \partial P_j} \left[\int_0^\alpha J(\alpha) d\alpha \right] \quad (1)$$

여기서, $J(\alpha)$ 는 스트레인 에너지 밀도 함수이고, P_j 는 j 방향으로 가해지는 하중과 모멘트이다.

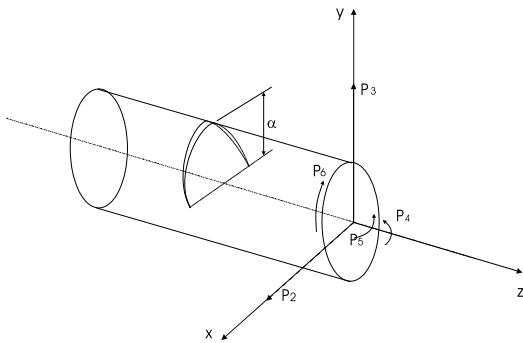


그림 1. 일반하중이 가해지는 결함(crack)이 있는 상태의 축

결함이 있는 축의 전체유연도행렬은 결함이 없는 경우의 전체 유연도에 식 (1)에서 구해진 결함 때문에 생기는 국부 유연도를 고려해야만 한다. 그리고 이 전체유연도행렬을 역변환하면 다음과 같이 전체강성행렬을 구할 수 있다.

$$K_G = [C_{tot} + C_{loc}]^{-1} \quad (2)$$

여기서 C_{tot} 은 비대각항들이 0이기 때문에 다음과 같이 정의된다.

$$C_{tot} = \text{diag} [L/AE, L/4kAG, L/4kAG, L/4EI, L/4EI, L/GI_p] \quad (3)$$

L, A 는 로터의 길이와 단면의 면적이고, E, G 는 탄성계수이며, k 는 체적탄성률, I 와 I_p 는 로터의 2차 면적모멘트와 극관성모멘트이다.

2.2 운동방정식의 유도

결함 모델링은 2.1절에서 구한 전체강성행렬로 나타낼 수 있으며, 결함의 깊이에 따른 고유진동수의 변화를 알아보기 위해 de Laval rotor를 고려하였다. 그림 2와 같이 길이는 L 이고, 반경은 R 이며, 횡 방향으로의 결함의 상대 깊이는 α/D 인 로터를 선택하였다. 그리고 디스크의 질량은 m 이고 결함이 없는 경우의 강성은 EI 이다.

로터는 일정한 각속도 ω 로 회전하고 있다. 질량은 가운데 디스크에 집중되어 있다고 본다. $\{x, y, z\}$ 좌표계는 고정좌표계이고 $\{\xi, \eta, u\}$ 는 축에 부착되어 회전하는 회전좌표계라면 질량 중심의 변위는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \\ &= (\cos\omega t \xi - \sin\omega t \eta) \vec{i} \\ &\quad + (\sin\omega t \xi + \cos\omega t \eta) \vec{j} + u \vec{k} \end{aligned} \quad (4)$$

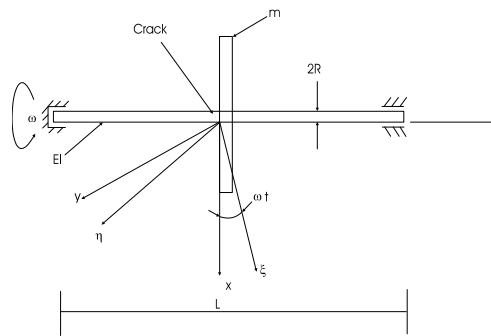


그림 2. 결함이 있는 de Laval rotor의 모델

로터의 회전에 따른 질량 중심의 속도와 운동 에너지는 다음과 같다.

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} \tag{5}$$

$$= \frac{1}{2} m (\omega^2 \xi^2 + \dot{\xi}^2 + \omega^2 \eta^2 + \dot{\eta}^2 + 2\omega \dot{\xi} \eta - 2\omega \dot{\eta} \xi + \dot{u}^2)$$

로터의 회전에 의한 포텐셜은 인장과 굽힘에 의해서만 영향을 받으므로 이에 대한 포텐셜에너지를 정리하면 다음과 같다.

$$V = \frac{1}{2} K_{11} u^2 + \frac{1}{2} K_{14} u \eta + \frac{1}{2} K_{15} u \xi \tag{6}$$

$$+ \frac{1}{2} K_{41} \eta u + \frac{1}{2} K_{44} \eta^2 + \frac{1}{2} K_{45} \eta \xi$$

$$+ \frac{1}{2} K_{51} \xi u + \frac{1}{2} K_{54} \xi \eta + \frac{1}{2} K_{55} \xi^2$$

앞에서 구한 운동에너지와 포텐셜에너지를 이용하여 Lagrange's Equation에 대입하면 식 (7)과 같은 운동방정식을 얻게 된다.

$$\ddot{\xi} - 2\omega \dot{\eta} + (\omega_{55}^2 - \omega^2) \xi + \omega_{54}^2 \eta + \omega_{51}^2 u = 0$$

$$\ddot{\eta} + 2\omega \dot{\xi} + \omega_{45}^2 \xi + (\omega_{44}^2 - \omega^2) \eta + \omega_{41}^2 u = 0 \tag{7}$$

$$\ddot{u} + \omega_{15}^2 \xi + \omega_{14}^2 \eta + \omega_{11}^2 u = 0$$

여기서, $\omega_{i,j}^2 = K_{i,j}/m$ ($i, j = 1, 4, 5$)이다.

III. 수치예

3.1 임계속도 결정 ($\alpha/D = 0.5$ 인 경우)

본 절에서는 재료가 강철(steel)이고, $R=0.01m$, $L=1m$, $E=2.1 \times 10^{11} N/m^2$ 인 로터의 임계속도를 구하였다. 결함이 없는 경우와 결함의 깊이 $\alpha/D = 0.5$ 인 경우의 축의 강성행렬을 구해보면 다음과 같다.

$$K = \begin{bmatrix} 77660 & 0 & 0 \\ 0 & 77660 & 0 \\ 0 & 0 & 6.47 \times 10^7 \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$K^C = \begin{bmatrix} 61313 & -9171 & -1.64 \times 10^5 \\ -9171 & 73408 & -38802 \\ 1.64 \times 10^5 & -38802 & 6.24 \times 10^7 \end{bmatrix} \tag{9}$$

식 (7)은 선형관계식이다. 따라서 3개의 해를 구할 수 있다. 식 (7)의 제차해는 다음과 같은 형태로 구할 수 있다.

$$\xi = \xi_0 e^{i\lambda_0 t}, \quad \eta = \eta_0 e^{i\lambda_0 t}, \quad u = u_0 e^{i\lambda_0 t} \tag{10}$$

여기서 ξ_0, η_0, u_0 는 상수이고, λ_0 는 회전좌표

계에서 자유진동을 할 때의 각속도이다. λ 를 이러한 진동에서 고정좌표계에서의 각속도라고 하면 다음과 같다.

$$\lambda = \lambda_0 + \omega \tag{11}$$

식 (11)을 식 (7)에 대입하면 다음과 같은 제차 시스템으로 바뀐다.

$$(\omega_{55}^2 - \omega^2 - \lambda_0^2) \xi_0 + (\omega_{54}^2 - 2i\omega \lambda_0) \eta_0 + (\omega_{51}^2) u_0 = 0$$

$$(\omega_{45}^2 + 2i\omega \lambda_0) \xi_0 + (\omega_{44}^2 - \omega^2 - \lambda_0^2) \eta_0 + (\omega_{41}^2) u_0 = 0$$

$$(\omega_{15}^2) \xi_0 + (\omega_{14}^2) \eta_0 + (\omega_{11}^2 - \lambda_0^2) u_0 = 0 \tag{12}$$

식 (12)에서 유효한 해가 존재하기 위해서는 계수들의 행렬식(determinant)이 0이어야 한다. 이 행렬식을 계산하면 다음의 특성방정식을 얻을 수 있다.

$$\lambda_0^6 + g_1 \lambda_0^4 + g_2 \lambda_0^2 + g_3 = 0 \tag{13}$$

여기서

$$g_1 = -(\omega_{11}^2 + \omega_{44}^2 + \omega_{55}^2 + 2\omega^2) \tag{14}$$

$$g_2 = [(\omega_{55}^2 - \omega^2)(\omega_{44}^2 - \omega^2) + (\omega_{44}^2 + \omega_{55}^2 + 2\omega^2)\omega_{11}^2 - (\omega_{15}^2 + \omega_{14}^2 + \omega_{45}^2)],$$

$$g_3 = [\omega_{15}^4 (\omega_{44}^2 - \omega^2) + \omega_{14}^4 (\omega_{55}^2 - \omega^2) + \omega_{45}^4 \omega_{11}^2 - (\omega_{55}^2 - \omega^2)(\omega_{44}^2 - \omega^2) - 2\omega_{15}^2 \omega_{14}^2 \omega_{45}^2]$$

이 방정식의 결과를 그림 3에 나타내었다. 수평축은 ω 를 그리고 수직축은 λ 를 나타낸다. 각각의 ω 에 대해 여섯 개의 λ ($\lambda = \lambda_0 + \omega$)가 존재하게 된다. λ 축과 교차하는 값들은 회전하지 않는 축의 고유 진동수를 나타낸다. $\lambda = \omega$ 선과 교차하는 값들은 전진세차(forward precession)운동에 대한 임계속도를 나타내고, $\lambda = -\omega$ 선과 교차하는 값들은 역행세차(reverse precession)운동에 대한 임계속도를 나타낸다.

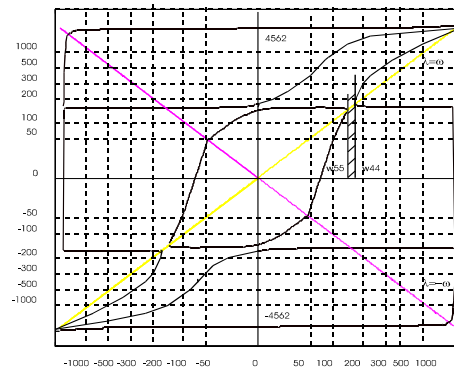


그림 3. 고유치와 회전각속도와의 관계

실제로 이러한 경우의 불안정성은 인장 모드와 굽힘 모드의 두 가지로 나타나게 되는데, Tondl[8]에 의해 인장 모드는 제일종불안정성(the instability of first kind), 그리고 굽힘모드는 제이종불안정성(the instability of second kind)으로 명명되었다. 인장모드의 불안정성은 ω_{11} 근처에서 나타나게 되고 굽힘모드의 불안정성은 $\omega_{55} < \omega < \omega_{44}$ 의 사이에서 나타나게 된다. 그림 3에서 빗금 친 부분으로 나타나는 영역이 굽힘 모드에 의한 불안정성(instability)이다. 인장모드에 의한 임계속도는 결함의 위치에 따른 민감도가 떨어진다. 따라서 굽힘 모드에 의한 임계속도를 결함의 크기와 위치에 따라 구함으로써 결함 판별의 기준으로 삼았다.

3.2 결함이 중앙에 위치할 경우

본 절에서는 결함이 중앙에 위치할 경우에 나타나는 임계속도의 변화를 관찰하였다. 결함이 중앙에 위치할 경우에는 결함의 크기에 따라 식 (2)에서 전체강성행렬을 구하고 3.1절의 방법으로 임계속도를 구하게 된다. 고차의 인장모드의 임계속도와 저차의 굽힘모드에서의 임계속도를 구할 수 있는데, 인장모드에서의 임계속도는 ω_{11} 근처에서 나타나고 불안정성의 영역은 나타나지 않는다(그림 4). 하지만 굽힘 모드에서의 임계속도는 결함의 크기가 증가함에 따라 임계 속도가 작아지면서 불안정성의 영역이 넓어짐을 알 수 있다(그림 5). 인장모드와 굽힘모드에서 공통적으로 결함의 크기가 증가함에 따라 임계속도가 줄어드는 것을 그림 4와 그림 5에서 알 수 있다. 이는 결함이 증가할수록 시스템 자체의 강성이 줄어들기 때문에 나타나는 현상으로 모델링을 하면서 예측했던 바와 일치한다.

3.3 결함이 중앙으로부터 벗어난 경우

본 절에서는 결함이 중앙으로부터 벗어난 경우에 나타나는 임계속도의 변화를 관찰하였다. 결함이 중앙에 위치할 경우에는 초기 모델링으로부터 임계속도를 구할 수 있다. 하지만 결함이 중앙으로부터 벗어나 있을 경우에는 초기 모델링으로는 결함의 영향에 의한 임계속도의 변화를 계산할 수 없다. 따라서 결함의 영향에 의한 임계속도를 구하기 위해 등가 스프링상수의 개념을 도입하였다. 임계속도에 영향을 주는 모드는 인장모드와 굽힘모드이므로 이에 대한 등가 강성도를 구했다.

3.3.1 인장모드에서의 등가강성도

결함이 중앙에서 벗어나 있을 경우 결함이 있

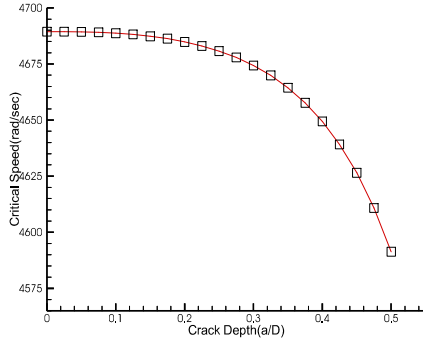


그림 4. 결함의 깊이에 따른 제일종불안정성

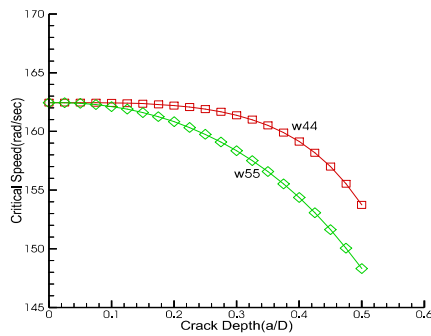


그림 5. 결함의 깊이에 따른 제이종불안정성

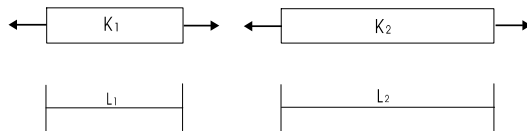


그림 6. 인장모드에서의 결함에 의한 등가 강성

는 부분과 결함이 없는 부분으로 나누어 결함이 없을 경우의 강성(K_1)과 결함에 의해 바뀐 강성(K_2)을 구해서 두 부분의 강성의 영향을 등가강성도로 바꾸었다. 실제로 로터의 강성은 축의 강성만으로 이루어지므로 그림 6과 같이 디스크를 제외하고 원통부로 생각하여 등가 강성도를 구할 수가 있다.

여기서 등가강성도는 다음과 같다.

$$K_{11eq} = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} \tag{15}$$

3.3.2 굽힘모드에서의 등가강성도

굽힘모드에서도 순수한 굽힘력만이 작용하기 때문에 인장모드에서와 마찬가지로 등가강성도를 구할 수 있다. 등가강성도는 인장모드에서와 같은 형태의 등가강성도를 얻을 수 있지

만 굽힘모드인 경우 4번모드와 5번모드가 공존하기 때문에 등가강성도는 다음과 같이 표현된다.

$$K_{44eq} = \frac{K_{44_1} K_{44_2}}{K_{44_1} + K_{44_2}} \quad (16)$$

$$K_{55eq} = \frac{K_{55_1} K_{55_2}}{K_{55_1} + K_{55_2}} \quad (17)$$

3.3.3 등가강성행렬을 이용한 임계속도의 결정

3.3.1절과 3.3.2절을 통해 결함의 위치에 따른 등가강성행렬을 구했다. 여기서 구한 등가강성행렬을 식 (12)-(14)를 이용하여 3.1절의 과정을 반복함으로써 결함의 크기에 따른 임계속도를 구할 수 있다.

그림 7에서 알 수 있듯이 인장모드에서의 임계속도는 결함의 위치와는 관계없이 결함의 크기에 의해서만 영향을 받는 것을 볼 수가 있다. 실제로 인장모드일 경우의 등가강성행렬을 구해보면 결함의 위치에는 거의 영향을 받지 않음을 볼 수가 있었다. 따라서 제일중불안전성은 본 연구에서 수행되고 있는 결함의 크기 및 위치 판별에는 크게 도움이 되지 않는다. 하지만 굽힘모드에

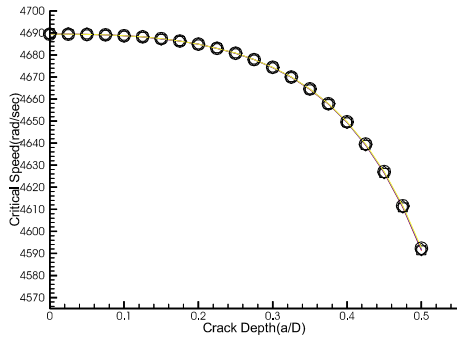


그림 7. 결함의 깊이와 위치에 따른 제일중불안정성

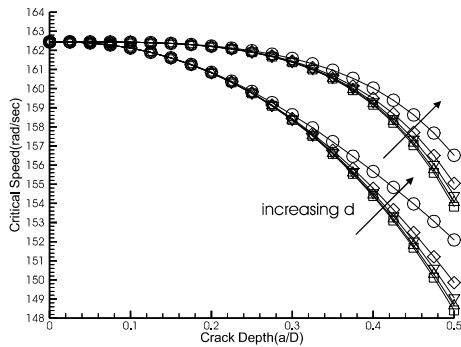


그림 8. 결함의 깊이와 위치에 따른 제일중불안정성

서의 임계속도는 결함의 크기에 따라 변할 뿐만 아니라 결함의 위치(d)에 따라서도 변화함을 그림 8에서 확인 할 수 있다. 따라서 그림 8은 결함의 크기 및 위치 판별의 자료로서 제이중불안전성을 이용할 수 있음을 보여준다.

그림 9와 그림 10은 이러한 판별 자료로써 결함의 크기와 위치에 따른 임계속도를 등고선(contour)으로 나타낸 것이다. 3.1절에서도 언급을 했지만 제이중불안전성에서의 불안전성은 굽힘모드에서의 고유치인 ω_{44} 와 ω_{55} 사이 존재한다. 즉, $\omega_{55} < \omega < \omega_{44}$ 일 때 시스템에 공진이 생긴다. 그림 9는 ω_{44} 근처에서의 임계속도를 결함의 크기와 위치에 따라 나타낸 것이고 그림 10은 ω_{55} 근처에서의 임계속도를 등고선으로 나타낸 것이다.

결함의 크기와 위치에 따라 임계속도가 구해져 있으므로 시스템의 임계속도를 정확하게 측정한다면 결함의 유무와 함께 결함의 크기 그리고 결함의 발생 위치를 그림 9, 10을 이용해서 판별해 낼 수 있다.

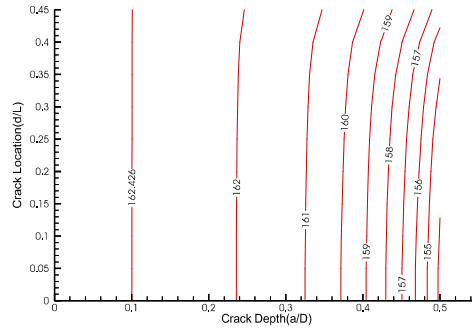


그림 9. ω_{44} 근처에서의 결함의 크기와 위치에 따른 임계속도의 분포

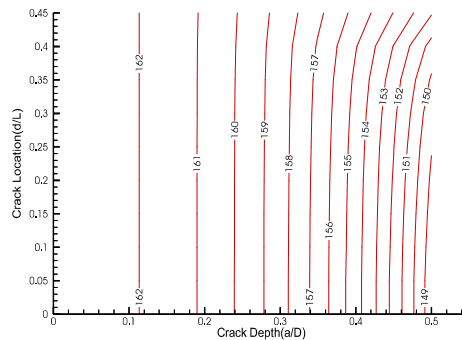


그림 10. ω_{55} 근처에서의 결함의 크기와 위치에 따른 임계속도의 분포

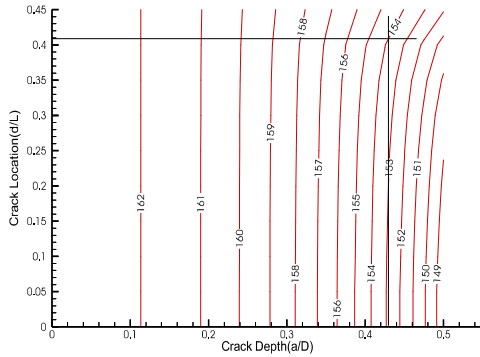


그림 11. 결함의 크기 및 임계속도에 의한 결함의 위치 결정

3.4 결함 위치와 크기 판별의 예

결함의 크기와 위치는 그림 9, 10의 등고선을 이용해서 구할 수 있다. 현재 주어진 자료로 결함의 위치와 크기를 판별하기 위해서는 두 번의 단계를 거쳐야 한다. 먼저 엔진의 건전성 평가를 위해 엔진 축에 계측기를 부착하고 임계속도를 측정한다. 만약 저차모드에서의 임계속도 및 불안정성이 $154 < \omega < 158$ 로 측정되었다고 하자. 그러면 먼저 그림 9에서 임계속도가 158(rad/sec)인 결함의 크기 값을 찾는다. 그림 9에서 ω_{44} 근처에서 임계속도가 158일 경우의 결함의 크기는 0.43임을 알 수 있다.

첫 번째 과정을 통해서 결함의 크기가 결정이 되면 그림 10에서 결함의 크기를 고정시키고 계측값과 일치하는 임계속도를 찾는다. 여기에서 임계속도가 결정되면 결함의 위치를 알 수가 있게 된다.

그림 9에서 구한 결함의 크기가 0.43이므로 그림 10에서 0.43의 값에서 수직으로 직선을 긋고 154의 값과 일치하는 곳을 찾는다. 다시 일치하는 점에서 수평으로 선을 그으면 그림 11과 같이 결함의 위치를 알 수 있게 된다. 그림 11에서 결함의 위치는 0.41이 된다. 즉, 중앙으로부터 $0.41 \times L$ 만큼의 위치에 $0.43 \times D$ 의 크기를 갖는 결함이 존재함을 알 수 있다.

이상의 두 단계를 거치면서 엔진축의 임계속도를 측정함으로써 결함의 유무를 판단할 수 있고, 결함이 발생했을 경우에는 결함의 크기와 위치를 판별할 수 있게 된다.

IV. 결 론

본 연구에서는 엔진 축에 대한 건전성 평가를

위한 새로운 진단법을 제안했다. 제안된 방법은 로터의 임계속도를 측정하여 본 연구에서 제공된 결함의 위치와 크기에 따른 임계속도의 데이터를 비교함으로써 로터에서 발생할 수 있는 결함을 발견하는 것이다. 임계속도의 측정만으로 로터의 결함 유무와 결함이 생겼을 경우에는 결함의 위치와 크기를 판별해 낼 수 있다.

본 연구는 로터의 진동 해석 시에 자주 사용되는 de Laval rotor를 기본 모델로 삼았으며, 운동방정식을 유도하는 과정에서 시스템을 이산화하였다. 이에 따른 영향으로 인장모드와 굽힘모드로 대표되는 고유치만 구할 수 있었다. 그 결과로 그림 9, 10에서 보듯이 결함의 크기가 작을 경우에는 결함이 없는 경우와 비교하여 응답특성에 큰 차이가 나지 않음을 알 수 있다. 또한 결함의 위치에 따른 영향도 중앙에서 가까운 쪽에서는 두드러진 차이가 없었다. 이러한 문제점의 해결은 고차의 굽힘모드 해석을 통해서만 가능하다. 이러한 고차모드를 해석하기 위해서는 본 연구에서와 같은 간단한 이산화 모델로는 불가능하다. 하지만 연속체 모델링에서는 가능하리라고 판단된다. 앞으로의 연구에서 연속체 모델링으로 연구를 수행해 나간다면 결함이 작을 경우와 결함이 중앙 근처에 위치하더라도 정확한 판별이 가능하리라고 생각된다. 또한, 제안된 방법의 실용화를 위해서는 실험을 통한 비교 검증이 필요하며 앞으로 이에 대한 연구를 진행할 예정이다.

참고문헌

- 1) Dimarogonas, A. D. and Paipetis, S. A., "Analytical Methods in Rotor Dynamics", Applied Science Publisher, 1983.
- 2) Okamura, H., Liu, H. W. and Chuh, C. "A cracked column under compression", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 1, 1969, pp. 547-564.
- 3) Liebowitz, H., Vanderveldt, H. and Harris, D. W., "Carrying capacity of notched columns", *International Journal of Solid Mechanics and Structures*, Vol. 3, 1967, pp. 489-500.
- 4) Rice, J. R. and Levy, N., "The part-through surface crack in elastic plate", *Journal of applied Mechanics*, Vol. 3, 1972, p.185.
- 5) Dimarogonas, A. D. and Massouros, G., "Torsional vibration of a shaft with a circumferential crack", *Engineering Fracture Mechanics*, 15, 1980,, pp. 439-444.

- 6) Papadopoulos, C. A. and Dimarogonas, A. D., "Coupling of bending and torsional vibration of a cracked Timoshenko shaft", *Ingenieur Archive*, Vol. 57, 1987, pp. 495-505.
- 7) Tada, H., Paris, P. C. and Irwin, G. R., "The Stress Analysis of Cracks Handbooks", Hellertown, Pennsylvania : Del Research Corp., 1973.
- 8) Tondl, A., "Some Problems of Rotor Dynamics", Prauge, Publishing House of the Crechoslovak Academy of Sciences, 1965.