

Bouc-Wen 모델을 이용한 차량동역학 해석용 1축 부싱모델의 개발

옥진규¹⁾ · 유완석²⁾ · 손정현³⁾

부산대학교 기계공학부 대학원¹⁾ · 부산대학교 기계공학부²⁾ · 부경대학교 기계공학부³⁾

Development of Uni-Axial Bushing Model for the Vehicle Dynamic Analysis Using the Bouc-Wen Hysteretic Model

Jinkyu Ok¹⁾ · Wansuk Yoo²⁾ · Jeonghyun Sohn³⁾

¹⁾Graduate of School Mechanical Engineering, Pusan National University, Busan 609-735, Korea

²⁾Department of Mechanical Engineering, Pusan National University, Busan 609-735, Korea

³⁾Department of Mechanical Engineering, Pukyong National University, Busan 608-739, Korea

(Received 13 September 2005 / Accepted 17 October 2005)

Abstract : In this paper, a new uni-axial bushing model for vehicle dynamics analysis is proposed. Bushing components of a vehicle suspension system are tested to capture the nonlinear and hysteric behavior of the typical rubber bushing elements using the MTS machine. The results of the tests are used to develop the Bouc-Wen bushing model. The Bouc-Wen model is employed to represent the hysteretic characteristics of the bushing. ADAMS program is used for the identification process and VisualDOC program is also used to find the optimal coefficients of the model. Genetic algorithm is employed to carry out the optimal design. A numerical example is suggested to verify the performance of the proposed model.

Key words : Bouc-Wen model(부싱-웬 모델), Bushing(부싱), Hysteresis response(히스테리시스 응답), Parameter identification(파라미터 규명), Vehicle dynamics analysis(차량 동역학 해석)

1. 서론

대부분의 차량 현가장치에서 승차감과 조종성을 향상시키기 위해서 부싱을 사용한다. 고무부싱은 감쇠 효과와 제조상의 오차를 보정하기 위해 차량 현가장치에 적용된다. 그리하여 부싱요소의 정규화와 설계기준이 차량 현가장치의 성능 특성의 관점에서 고려되어야 한다. Blundell¹⁾은 현가장치에서 고무부싱의 컴플라이언스(compliance)를 구현하기 위해 몇 가지의 부싱 모델을 사용하였다. 예를 들면, 기구학적 조인트 모델, 선형 부싱 모델, 비선형 부싱 모델이 있다. 여기에서 그는 현가장치 모델링의 정

확도를 위해서 정확한 부싱 요소가 모델에 포함되어야 함을 보였다.

차량 동역학 해석에 많이 사용되는 다물체 동역학 해석 프로그램인 DADS²⁾와 ADAMS³⁾에서는 부싱을 Kelvin-Voight 모델을 이용하여 힘 요소로 모델링한다. Kelvin-Voight 부싱 모델은 세 방향의 병진 스프링-댐퍼와 세 방향의 회전 스프링-댐퍼의 선형 조합으로 부싱력을 표현하고 있다. 그러나 이러한 부싱요소로는 부싱의 히스테리시스 특성을 제대로 표현할 수 없다. 따라서, 새로운 부싱모델이 요구된다.

Bouc-Wen 모델은 시스템의 비선형적인 히스테리시스 특성을 모델링하는데 널리 사용되고 있으

*Corresponding author. E-mail: jhsohn@pknu.ac.kr

며, 특히 토목공학에서 많이 이용되어왔다. 이 모델은 미분방정식 형태로 표현되며 Bouc⁴⁾가 제안하였고, Wen과 여러 학자들에 의해서 보완되었으며, Bouc-Wen 모델은 경험적인 법칙이나 추가적인 조건 없이 변위와 힘의 이력 특성을 잘 표현하는데 가상변위를 나타내는 상태변수를 도입하여 국부 이력 특성을 표현한다. 또한, 파라미터의 적절한 선택으로 다양한 히스테리시스를 표현할 수 있다.

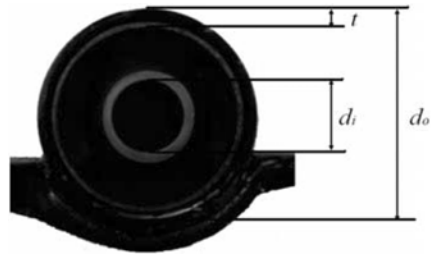
Sain⁵⁾은 Bouc-Wen 모델의 정성적인 특성에 대한 초기 연구를 하였고, Ni⁶⁾는 주기적인 진동 실험으로부터 비선형 히스테리시스 절연기의 파라미터 규명에 대한 연구를 하였다. Spencer⁷⁾와 Lee⁸⁾는 Bouc-Wen을 이용하여 MR 댐퍼의 현상학적인 모델링을 하였다.

본 논문에서는 부싱의 비선형성과 히스테리시스 특성을 반영하기 위해 Bouc-Wen 모델을 이용하여 1축 부싱모델을 개발하였다. 기존의 Bouc-Wen 모델을 부싱의 특성에 적합하도록 변형시켜서 부싱 모델을 제안하였다. 모델링 및 동역학 해석을 위해 ADAMS를 이용하였고, 파라미터 규명은 ADAMS와 VisualDOC⁹⁾를 연계하여 적합한 파라미터를 찾도록 구성하였다. 2장에 부싱의 특성시험 장치 및 시험 결과를 나타내었고, 3장에 새로운 부싱 모델이 제안되었으며, 4장에 수치 예제를 보였고, 결론을 5장에 나타내었다.

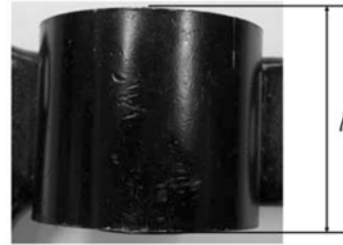
2. 부싱 특성 실험

본 연구에서는 부싱의 변위 및 주파수에 대한 특성을 시험하기 위해 MTS 1축 시험기를 이용하여 시험하였다. MTS 1축 시험기의 제원은 Table 1에 나타내었고, 실험방법은 Kuo¹⁰⁾의 논문을 참고하였다.

본 논문에서 사용한 부싱은 X/MBR 타입으로 이러한 부싱은 현가장치를 차체에 고정할 때 사용한다. Fig. 1에 X/MBR 부싱을 나타내었고, Fig. 2에 부싱의 반경방향 특성을 시험하기 위해 제작한 지그를 나타내었다. Table 2에는 실험에 사용된 부싱의 제원을 표기하였다.



(a) Front view



(b) Upper view

Fig. 1 Bushing configuration



Fig. 2 Jig to test a bush

Table 1 Specifications of one axis durability tester

Model name	MTS244.12
Max. dynamic force	25[kN]
Max. static force	37.5[kN]
Max. length	250[mm]
Frequency	0-50[Hz]

Table 2 Specifications of test bushing (Unit : mm)

Outer steel diameter (d_o)	57
Inner steel diameter (d_i)	24
Length (l)	50
Outer steel thickness (t)	5

부싱의 강성과 댐핑 값을 결정하고 히스테리시스 특성을 관찰하기 위하여 조화가진 시험을 시행하였으며, 이때 입력 가진은 식 (1)과 같은 함수를 사용하였다.

$$\delta(t) = \delta_0 \sin 2\pi ft \quad (1)$$

여기서 $f = 1, 5, 10, 15, 20 \text{ Hz}$

$\delta_0 = 0.5, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0 \text{ mm}$

식 (1)에서 주파수 f 를 1, 5, 10, 15, 20 Hz의 5종류, 반경 방향 가진 진폭을 각각 0.5, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0 mm의 5종류로 바꾸면서 실험하였다. 진폭과 주파수 변화에 따른 부싱력은 10초간 측정하였다. 가진 진폭과 주파수에 따른 반경 방향 힘을 Fig. 3과 Fig. 4에 각각 도시하였다. Fig. 3과 Fig. 4에서 진폭과 주파수가 증가할수록 부싱력의 비선형성이 증가하는 것을 볼 수 있다.

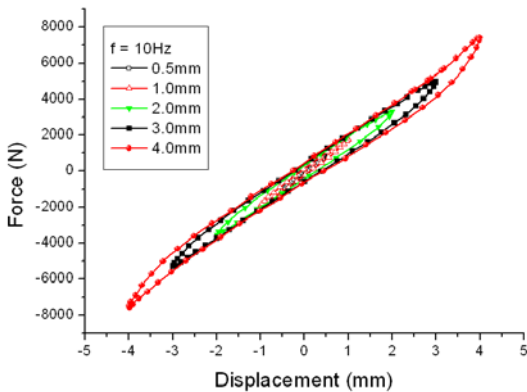


Fig. 3 Radial bushing force (10Hz sine wave)

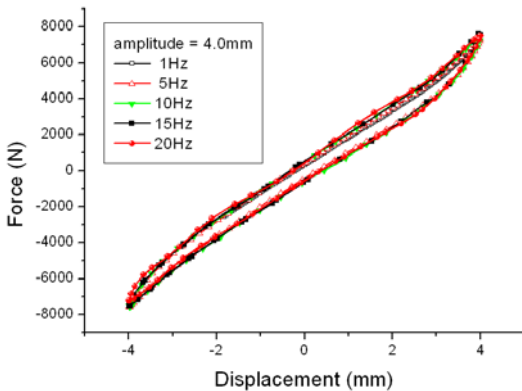


Fig. 4 Radial bushing force (4mm amplitude sine wave)

3. 부상 모델

3.1 Bouc-Wen 모델

파라미터 규명은 시스템의 관측된 데이터를 이용하여 동적 모델의 수학적 모델을 찾는 방법을 다룬다. 이러한 방법은 비물리적 계수(nonparametric)와 물리적 계수(parameteric) 모델로 구분될 수 있다. 비물리적 계수 모형은 계수 추정은 비교적 쉽지만 모델의 신뢰성이나 적용성을 완전히 보장할 수 없는 단점이 있다. 물리적인 계수 추정 방법으로 Bilinear, Trilinear, Bouc-Wen 모델 등이 있는데,¹¹⁾ 이 중에서 가장 많이 사용되는 것이 Bouc-Wen 모델이다. 시스템의 비선형적인 동적 거동을 표현하기 위한 방법으로 구조 동역학에서는 일찍이 콘크리트나 철 구조물의 히스테리시스를 모델링하는 방법으로 Bouc-Wen 모델을 사용하여 왔다.

Bouc-Wen 모델에서는 파라미터의 적절한 선택으로 다양한 시스템의 응답을 나타낼 수 있다. Bouc-Wen 모델을 이용한 1자유도 진동시스템을 Fig. 5에 나타내었고, 운동방정식은 식 (2)와 같다.

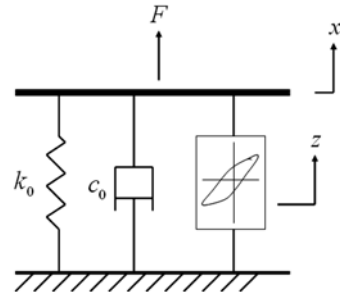


Fig. 5 Bouc-Wen hysteretic model

$$F(t) = c_0 \dot{x} + \alpha k_0 x + (1 - \alpha) k_0 z \quad (2)$$

여기서 x 는 변위, \dot{x} 는 속도, z 는 가상 히스테리시스 변위, k_0 는 스프링 상수, c_0 는 댐핑 계수, $F(t)$ 는 가진력을 의미한다. α 의 범위는 $0 \leq \alpha \leq 1$ 이며, 비선형 성분에 대한 선형 성분의 비(ratio)를 의미한다.

가상 히스테리시스 변위 z 는 식 (3)과 같이 비선형 미분방정식의 적분값으로 표현된다.

$$\dot{z} = \dot{x} - \beta |\dot{x}| |z|^{n-1} - \gamma \dot{x} |z|^n \quad (3)$$

여기서 \dot{z} 는 상태변수 z 의 시간에 대한 미분 값이다. A, β, γ 는 히스테리시스 곡선의 형상에 영향을 미치는 파라미터이다.

Wong¹²⁾은 수치적인 에러 감소, 빠른 계산시간의 확보를 위해서 식 (3)의 형태를 식 (4)와 같이 변형하여 사용하였다.

$$\dot{z} = \dot{x}[A - \{\gamma + \beta sgn(\dot{x})sgn(z)\} |z|^n] \quad (4)$$

여기서 $sgn(\cdot)$ 는 signum 함수를 의미하며, $sgn(\dot{x})$ 는 \dot{x} 가 음수, 영, 양수일 때 -1, 0, 1의 값을 가진다.

3.2 Spencer's MR 댐퍼 모델

Spencer⁶⁾은 MR 댐퍼의 이력현상을 보다 정확하게 표현하기 위해 Bouc-Wen 모델을 수정한 모델을 제시하였다. 스프링(k_0)과 댐퍼(c_0)로 구성된 시스템에서 댐퍼의 비선형성을 나타내기 위해 c_0 에 Bouc-Wen 모델을 삽입하였다. 이 모델은 Bouc-Wen 모델이 가속도와 속도가 서로 다른 부호인 경우 또는 속도가 아주 작을 경우에 MR 댐퍼의 히스테리시스를 너무 크게 표현하는 문제점을 수정한 모델이다. Spencer가 제시한 모델을 Fig. 6에 도시하였다. Fig. 6의 운동방정식은 다음과 같이 구성 된다.

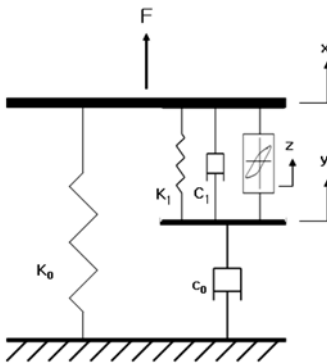


Fig. 6 Spencer model of the MR damper

$$\dot{z} = (\dot{x} - \dot{y})[A - \{\gamma + \beta sgn(\dot{x})sgn(z)\} |z|^n] \quad (5)$$

$$\dot{y} = \frac{1}{(c_0 + c_1)} \{c_0 \dot{x} + k_0(x - y) + \alpha z\} \quad (6)$$

$$F = c_0(\dot{x} - \dot{y}) + k_0(x - y) + k_1(x - x_0) + \alpha z \quad (7)$$

식 (7)은 식 (6)을 이용하여 다음 식과 같이 간략하게 표현할 수 있다.

$$F = c_0 \dot{y} + k_0 x \quad (8)$$

3.3 제안된 부싱 모델

본 논문에서는 Spencer가 제시한 MR 댐퍼의 모델에서 부싱의 강성과 강성에 따른 비선형성을 부가하여 차량 현가장치에 사용되는 부싱에 적합하도록 모델을 구성하였다. 이 모델의 특징은 설계 파라미터의 영역을 설정함에 따라 강성 영역의 크기와 비선형성을 부가할 수 있고, 감쇠 요소의 특징을 크게 나타나게 할 수 있다. 본 연구에서는 k_0, k_1, c_1 의 값들은 민감도 해석결과를 통해 부싱의 강성 값에 유사하게 설정을 하였고, c_0, k_2, c_2 는 부싱의 감쇠 요소에 해당하는 값을 갖도록 설계변수 영역을 설정하였다. Fig. 7에 본 연구에서 제안한 Bouc-Wen 모델을 도시하였다.

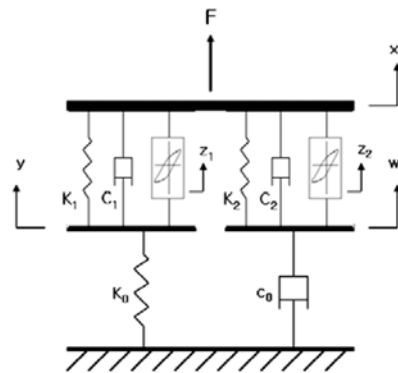


Fig. 7 Proposed model for bushing modeling

Fig. 7의 운동방정식은 다음 식과 같이 쓸 수 있다.

$$\dot{z}_1 = (\dot{x} - \dot{y})[A_1 - \{\gamma_1 + \beta_1 sgn(\dot{x} - \dot{y})sgn(z_1)\} |z_1|^{n_1}] \quad (9)$$

$$\dot{z}_2 = (\dot{x} - \dot{w})[A_2 - \{\gamma_2 + \beta_2 sgn(\dot{x} - \dot{w})sgn(z_2)\} |z_2|^{n_2}] \quad (10)$$

$$\dot{y} = \frac{1}{c_1} \{c_1 \dot{x} + \alpha_1 k_1 (x - y) - k_0 y + (1 - \alpha_1) k_1 z_1\} \quad (11)$$

$$\dot{w} = \frac{1}{c_0 + c_2} \{c_2 \dot{x} + \alpha_2 k_2 (x - w) + (1 - \alpha_2) k_2 z_2\} \quad (12)$$

$$F = k_0 y + c_0 \dot{w} \quad (13)$$

4. 수치 예제

4.1 파라미터 규명

부싱 모델의 파라미터를 선정하기 위한 동역학적 모델링은 ADAMS를 이용하였다. 입력 가지는 Dzierzek¹³⁾의 논문을 참고하여 2장에서 실험으로 측정된 진폭 4 mm, 주파수 10 Hz의 사인 함수를 이용하였다. 입력에 대한 출력의 차이를 최소화하기에 적합한 RMS(root mean square) 오차를 목적함수로 사용하였다.¹⁴⁾

$$E = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m [F_{exp} - F_{pre}]^2} \quad (14)$$

subject to $A_i \geq 1, \beta_i \geq 0, \beta_i + \gamma_i > 0, i = 1, 2$

여기서 F_{exp} 는 실험으로 측정된 부싱력, F_{pre} 는 시뮬레이션으로 산출된 부싱력이다. m 은 데이터의 총 개수이다.

목적함수인 RMS 오차 E 는 ADAMS와 최적설계 프로그램 VisualDOC를 연계하여 최소값을 갖도록 하였다. VisualDOC는 외부 프로그램 및 데이터와 상호 작용하여 최적설계를 가능하게 하는 프로그램으로써 본 연구에서는 VisualDOC의 유전 알고리즘 (Genetic Algorithms)을 사용하였다. 유전 알고리즘은 비선형성이 강한 시스템의 최적설계에 적합한 것으로 알려져 있다.¹⁵⁾ 유전 알고리즘에 사용되는 파라미터로 집단 크기는 200, 세대교체의 최대 횟수는 300, 돌연변이율은 0.05를 사용하였다. 교배는 일정 교배법을 이용하였고, 교배율은 0.8을 사용하였다.

VisualDOC 프로그램에서는 제한조건이 있는 목

적함수를 Lagrange multiplier method를 사용하여 비 제약 최적설계 문제로 변경하여 최적설계를 수행하도록 내부적으로 구성되어 있다. 따라서 본 논문에서 유전 알고리즘을 사용한 최적설계문제도 위와 같은 방법으로 구속조건을 처리하였다. 설계변수의 범위는 민감도 해석 결과를 바탕으로 허용 가능한 범위를 설정하였다.

VisualDOC에서 설계변수 입력 파일은 ADAMS의 모델링 파일인 *.cmd 파일을 사용하였다. 목적함수와 제약조건 설정은 *.txt 파일을 이용하였다. *.txt는 해석 결과를 저장하고 있는 파일이다. ADAMS와 VisualDOC를 연계한 최적설계의 진행과정을 Fig. 8에 나타내었다.

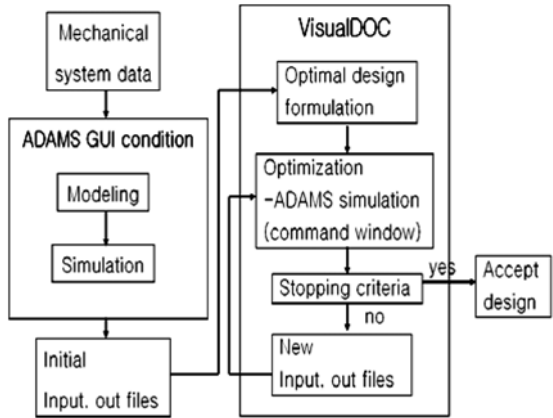


Fig. 8 Flow chart for the optimization

파라미터 규명 과정을 통해서 얻어진 결과를 이용하여 부싱력을 산출하였다. 시간에 대한 부싱력을 Fig. 9에, 변위에 대한 부싱력을 Fig. 10에 각각 나타내었다. 부싱력의 차이를 좀 더 잘 보기 위해 Fig. 9에 시간 간격은 1초에서 1.5초 까지만 나타내었다. Fig. 9와 Fig. 10에서 실선은 실험값(experiment)을 가리키고, 점선은 기본 Bouc-Wen 모델의 부싱력을, 이 점쇄선은 제안된 부싱 모델의 부싱력을 각각 나타낸다. 실험값에 대한 부싱력의 최대 차이는 Bouc-Wen 모델일 경우 206 N, 제안된 부싱 모델은 27 N의 차이가 발생하며 Bouc-Wen 모델은 최소값과 최대값을 나타내는 영역에서 실험값에서 다소 벗어난 것이 확인된다. Bouc-Wen 모델을 이용하는

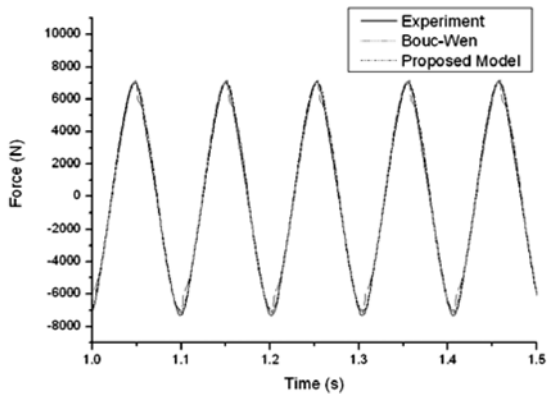


Fig. 9 Bushing force to time

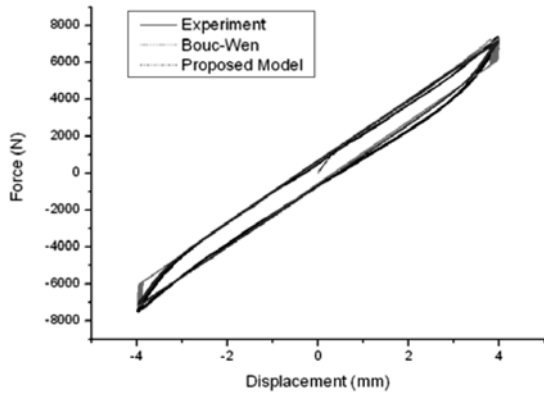


Fig. 10 Bushing force vs displacement

Table 3 Identification results using the Bouc-Wen model

Model parameter	Optimal value
α	0.979
A	1456.421
$\tilde{\beta}$	3.975
γ	0.299
n	2.119
k_0	1722.266
c_0	7.432

것보다 제안된 부싱 모델을 이용한 부싱력이 실험 값에 더 근사적으로 추종하는 것이 확인된다. 따라서 제안된 부싱 모델의 파라미터 선정은 유효한 것으로 판단된다. Table 3과 Table 4에 파라미터 선정 결과를 나타내었다.

Table 4 Identification results using the proposed model

Model parameter	Optimal value	Model parameter	Optimal value
c_0	47.188	c_2	0.155
k_0	1651.776	k_2	6.077
β_1	2.889	β_2	2.570
γ_1	0.313	γ_2	2.846
n_1	3.754	n_2	0.910
α_1	0.908	α_2	0.564
c_1	2285.158	A_1	1734.154
k_1	1529.782	A_2	443.479

4.2 제안된 부싱 모델의 오차해석

제안된 부싱 모델을 검증하기 위해 실험과 같은 동적 모델을 ADAMS를 이용하여 모델링 하였다. ADAMS에서의 부싱 모델은 프로그램내의 사용자 정의 루틴(user subroutine)을 이용하여 구현하였고, ADAMS 프로그램에서 사용된 모델을 Fig. 11에 나타내었다.

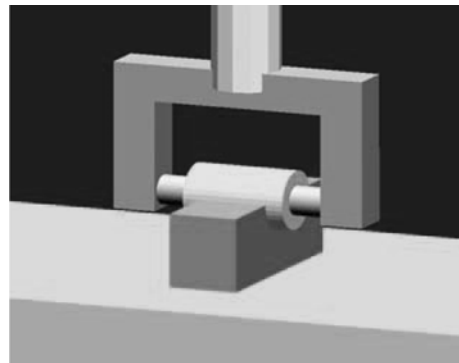


Fig. 11 Dynamic model using ADAMS

주파수와 진폭에 따른 오차를 확인하기 위해 주파수는 1, 5, 10, 15, 20 Hz, 진폭은 0.5, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0 mm를 각각 이용하였다. 예측된 부싱력의 오차를 확인하기 위해 식 (15)와 같은 목적함수에 대한 상대 오차를 이용하였고, 결과를 Fig. 12와 Fig. 13에 각각 나타내었다.

$$E = \frac{|RMS(F_{exp}) - RMS(F_{pre})|}{RMS(F_{exp})} \quad (15)$$

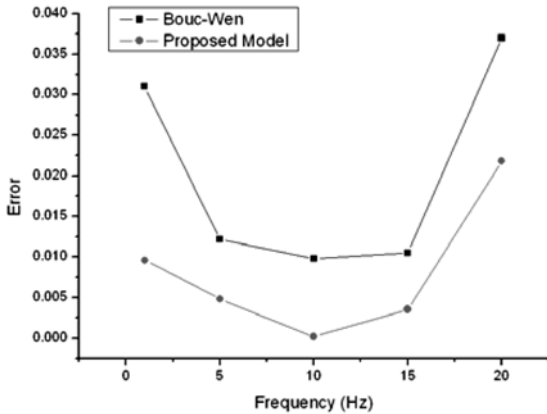


Fig. 12 Errors according to the frequency

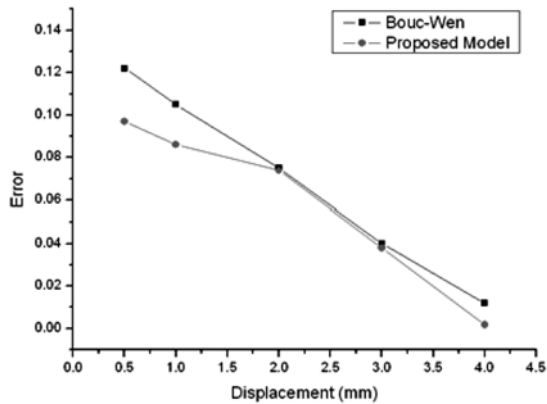


Fig. 13 Errors according to the amplitude

Fig. 12에서 주파수에 따른 에러는 10 Hz 일 때 가장 작은 값을 나타내고, 저주파수와 고주파수에서는 비교적 큰 값을 나타낸다. 이러한 이유는 파라미터 규명 과정에서 입력주파수로 10 Hz를 사용했기 때문인 것으로 사료된다. Fig. 13에서 변위가 증가함에 따라 에러는 줄어들고 4 mm에서 가장 작은 값을 나타낸다. 마찬가지로 입력 가진 변위를 4 mm로 사용한 결과로 사료된다. Fig. 13에서 변위가 1 mm 이하일 때 Bouc-Wen 부싱 모델의 에러값은 10%가 넘는 것이 확인되어 부싱 모델로서 적합하지 않은 것으로 판단된다. 제안된 부싱 모델의 에러값은 전 구간에서 10% 이하를 만족하므로 부싱모델로서 적합하다고 여겨진다.

5. 결론

본 논문에서는 차량 동역학 해석에 적용되는 새로운 부싱 모델을 제안하였다. MTS 1축시험기를 이용하여 부싱의 반경방향의 힘과 변위와의 관계를 주파수 및 진폭별로 시험하였다. 실험으로 측정된 부싱력과 변위는 파라미터 선정 과정에서 입력 가진으로 사용되었다. ADAMS에서의 부싱 모델은 프로그램내의 사용자 정의 루틴을 이용하여 구현하였다. ADAMS와 VisualDOC를 연계하여 부싱 모델의 최적의 파라미터를 찾도록 모델을 구성하였으며, 목적함수는 실험으로 측정된 부싱력과 시뮬레이션으로 예측된 부싱력의 오차를 줄이기 위해 RMS 오차를 이용하였다. 입력 가지는 시간 영역에서 사인 입력을 입력하였다.

파라미터 규명 과정을 통해서 얻은 결과는 실험으로 측정된 결과와 유사한 것을 확인하였다. 제안된 부싱 모델의 에러값은 전 구간에서 10% 이하를 만족하므로 부싱모델로서 적합하다고 여겨지며, 파라미터 선정은 유효한 것으로 사료된다. 본 연구에서 제안한 부싱 모델은 차량 동역학 해석에서 Kelvin-Voight 부싱 모델을 대체하여 유용하게 적용될 수 있을 것으로 사료된다.

한편 부싱은 동시에 3축으로부터 가진 입력이 들어오는 데 반해, 본 연구에서는 반경방향에 대한 실험을 수행하였다. 따라서 동시에 3축이 가진되는 부싱모델을 위해서는 3축 시험이 필요하며, 부싱모델 또한 복잡해질 것으로 사료되며 향후 연구할 예정이다.

후 기

본 논문은 과학기술부 국가지정연구실사업(과제번호 M10203000017-02J0000-00910)의 지원으로 이루어 졌으며 이에 감사드립니다.

References

- 1) M. V. Blundell, "The Influence of Rubber Bush Compliance on Vehicle Suspension Movement," Materials and Design, No.19, pp.29-37, 1998.
- 2) CADSI, DADS Revision 8.0 User's Manual,

- Oakdale, IA, USA, 1995.
- 3) ADAMS User's Guide, MSC Software Corporation, 2003.
 - 4) R. Bouc, "Forced Vibration of Mechanical Systems with Hysteresis," Proceedings of the 4th International Conference on Nonlinear Oscillations, Prague, Czechoslovakia, 1967.
 - 5) P. M. Sain, M. K. Sain, B. F. Spencer and J. D. Dain, "The Bouc Hysteresis Model : An Initial Study of Qualitative Characteristics," Proceedings of the American Control Conference, pp. 2559-2563, 1998.
 - 6) Y. Q. NI, J. M. KO and C. W. Wong, "Identification of Non-linear Hysteretic Isolators from Periodic Vibration Tests," Journal of Sound and Vibration, Vol.217, No.4, pp.737-756, 1998.
 - 7) B. F. Spencer Jr., S. J. Dyke, M. K. Sain and J. D. Carlson, "Phenomenological Model of a Magnetorheological Damper," ASCE Journal of Engineering Mechanics, 1996.
 - 8) S. K. Lee and S. B. Choi, "Hysteresis Model of Damping Forces of MR Damper for a Passenger Car," Transactions of KSAE, Vol.9, No.1, pp.189-197, 2001.
 - 9) VisualDOC 5.0 Users Manual, Vanderplaats Research & Development, Inc., U.S.A, 2005.
 - 10) E. Y. Kuo, "Testing and Characterization of Elastomeric Bushing for Large Deflection Behavior," SAE 970099, 1997.
 - 11) R. H. Sues, S. T. Mau and Y. K. Wen, "System Identification of Degrading Hysteresis Restoring Forces," J. of Engrg. Mech., ASCE, Vol.114, No.5, pp.833-846, 1988.
 - 12) C. W. Wong, Y. Q. Ni and S. L. Lau, "Steady-State Oscillation of Hysteretic Differential Model. I: Response Analysis," Journal of Engineering Mechanics, Vol.120, No.11, pp.2271-2298, 1994.
 - 13) S. Dzierzek, "Experiment-Based Modeling of Cylindrical Rubber Bushings for the Simulation of Wheel Suspension Dynamic Behavior," SAE 2000-01-0095, 2000.
 - 14) K. E. Atkinson and W. Han, Elementary Numerical Analysis, John Wiley & Sons, Inc. New York, pp.178-185, 2004.
 - 15) A. D. Belegundu and T. R. Chandrupatla, Optimization Concepts and Applications in Engineering, Prentice-Hall, New Jersey, pp.276-279, 1999.