대 한 조 선 학 회 논 문 집
제43권 제1호 2006년 2월

Journal of the Society of Naval Architects of Korea
Vol. 43, No. 1, pp. 22-31, February 2006

횡동요에 기인하는 전복에 대한 1-자유도계 모형의 이론적 해석

이승준[†*]

충남대학교 선박해양공학과[*]

Theoretical Analysis of One Degree-of-Freedom Model for Rolling of Ships with Focus on Capsize

Seung Joon Lee[†*]

Dept. Naval Arch. & Ocean Eng. Chungnam National University[*]

Abstract

Recent studies have shown that the short time solution of the equation of motion for the rolling of ships is important in deciding the possibility of capsize of ships due to the excessive heel. Since most of known solutions for nonlinear equations of motion are long time or steady periodic solutions, here a simple way is described to get the short time solutions of the Duffing equation, which was chosen for deriving a criterion for the capsize of the ship. With the small external rolling moment, we first assume the state of the small damping and near resonance. Then, for cases when the frequency of the external moment is higher than the resonant one, an inequality was derived as a criterion for the capsize. This gives the range of the initial condition and the magnitude of the external moment which should be avoided for a ship to be safe from capsize. Furthermore, from the linearized equation, it is also shown that a simple and self-explanatory solution can be obtained consistent with that for the case of no damping, which yields the well-known linear growth with time.

※Keywords: Theoretical analysis(이론해석), Rolling of ships(선박의 횡동요), Capsize criteria(전복 조건), One-degree-of-freedom-system(1-자유도계), Duffing equation(더핑 방정식), Small damping near resonance(미소 감쇠 근공진)

1. 서론

최근 IMO는 선박 안전성 기준에 대한 토론을 진행하고 있으며, 이에 따라 선박의 전복에 대한 이론적, 수치적, 실험적 연구가 각국에서 활발히 수행되

접수일: 2005년 7월 14일, 승인일: 2005년 11월 11일
†주저자, E-mail: sjoonlee@cnu.ac.kr
Tel: 042-821-6627

고 있다. 우리나라에서도 해양연구원을 중심으로 다각적인 연구가 진행되고 있으며 본 논문은 이론적인 측면에서 선박의 전복 판정 기준을 마련하기 위해 수행된 연구의 1차년도 결과이다. 한편 국내의 관련 연구로는 박주성과 이승준(1999), 이희성과 권순홍(1999)을 들 수 있다.

지난 20년 동안 수행된 비선형 동역학적인 연구 및 실험적 연구의 결과, 전복의 가능성은 정상해(steady solution) 보다는 과도해(transient solution)에 의해 판정해야 하며, 새로운 상태로 운동을 시작한 뒤 운동 주기의 3-4배 시간 이내에 전복하지 않는 선박은 대체적으로 안정하다고 볼 수 있다는 연구 결과들이 발표되고 있다(Soliman 1990). 본 논문에서는 이러한 결과들이 진실에 가깝다는 전제 하에 과도해가 주된 영향을 미치는 짧은 시간(small time)에 초점을 맞추어 논의를 진행하였다.

먼저 감쇠력과 복원력에 대해 고찰하였는데, 특히 복원력에 대해서는 3차 다항식과 5차 다항식을 비교하여 5차식의 장점이 그리 크지 않으므로 3차식을 사용하기로 하였으며, 기진력이 없을 때를 상정하면 연성 스프링에 대한 자유 Duffing 방정식이 선박의 자유 횡동요에 대한 운동 방정식으로 사용될 수 있음을 보였다. 이 비선형 방정식에 대해 짧은 시간에 대한 해를 구하여 위상 평면의 분리곡선(separatrix) 바깥에 해당하는 초기 조건은 전복에 이르는 결과를 줄 수 있음을 보였고, 또 운동의 진동수가 초기 조건의 크기에 따라 변화되는 것을 보였으며, 이는 비선형계의 특성으로 볼 수 있다.

기진력이 작용할 경우에는 Duffing 방정식이 선박의 강제 횡동요에 대한 운동 방정식으로 사용될 수 있음을 보였다. 먼저 선형계에 대해 미소 감쇠-근공진(small damping-near resonance)을 가정하여 과도해가 시간이 지남에 따라 지수 함수적으로 감소하여 감쇠계수의 역수에 비례하는 크기를 가지는 정상해에 도달하는 과정을 보였으며, 이 해는 감쇠가 없을 경우 공진 상태에서 선형적으로 운동이 증가한다는 기존의 결과와 일관된 것임을 보였다. 또 비선형 방정식에 대해서는 짧은 시간에 대한 해를 구하여 기진력의 진동수가 선형계의 공진 진동수보다 큰 경우 초기 조건과 기진력의 크기가 과도하면 전복에 이를 수 있음을 보였다.

2. 정수 중 횡동요 비선형 방정식의 정립과 해법

선박의 횡동요에 대한 운동 방정식은 19세기에 이미 그 기본적인 형태가 주어졌으며, 정수 중에서 발생하는 선박의 횡동요를 1-자유도계 운동으로 간주한다면 다음과 같은 2계 상미분 방정식의 형태로 운동 방정식을 쓸 수 있다.

$$m\ddot{x} = -D(\dot{x}) - R(x) \tag{1}$$

여기서 m은 선박의 횡동요에 대한 질량 관성 모멘트이고, x는 횡동요의 각변위(이하에서는 변위로 부르기로 한다)이다. 한편 식(1)의 우변의 D는 횡동요에 대한 감쇠 모멘트(이하에서는 감쇠력으로 부르기로 한다), R은 복원 모멘트(이하에서는 복원력으로 부르기로 한다)를 나타낸다. 감쇠력은 각속도 만의 함수, 복원력은 각변위 만의 함수로 각각 가정한 점에 유의하며, 이와 같은 가정은 실제 문제의 물리적 현상과 크게 차이가 없다고 할 수 있다.

본 연구에서 다루고자 하는 문제는 파도, 바람 등에 기인하는 외력(external force)에 의해 횡동요의 크기가 과도해지는데 따른 선박의 전복 현상이다. 특히 근자의 연구에 따르면 선박이 전복되는 경우, 외력이 가해지기 시작한 뒤, 짧은 시간(short time), 즉 파도의 주기의 2-3 배 보다 짧은 시간 안에 전복이 발생할 가능성이 큰 것으로 알려져 있으므로, 운동 방정식의 각 항을 고려하거나 방정식의 해를 구함에 있어 짧은 시간에 초점을 맞추기로 한다. 또한 전복에 이르기 위해서는 운동 방정식으로부터 알 수 있는 바와 같이, 외력과 선박의 고유 운동의 주기가 상당히 비슷한 근공진(near-resonance) 상태라고 가정하기로 한다.

이하에서는 먼저 감쇠력과 복원력에 대해 고찰하고, 결과로서 얻어진 비선형 방정식인 자유 Duffing 방정식(free Duffing equation)에 대해 살펴보기로 한다.

2.1 감쇠력에 대한 고찰

횡동요에 대한 감쇠력은 조파에 기인하는 조파 저항, 유체의 점성에 기인하는 마찰 저항, 그리고 박리

등의 생성에 기인하는 형상 저항 등에 의해 발생하며, 조파 저항은 속도에 비례, 마찰 저항과 형상 저항은 각각 속도의 제곱에 비례하는 것으로 알려져 있으므로 감쇠력을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$D(\dot{x}) = \dot{x}(b_1 + b_2|\dot{x}| + b_3|\dot{x}|) \quad (2)$$

여기서 b_1은 조파 저항 계수, b_2는 마찰 저항 계수, b_3는 형상 저항 계수이다. 본 연구에서는 주로 운동의 초기, 즉 짧은 시간에 대한 해를 구하고자 하는데, 이 경우에는 횡동요의 속도가 그리 크지 않을 것이므로 고차항은 선형항에 비해 상대적으로 크기가 작을 것이며, 따라서 본 연구에서는 감쇠력을 선형 감쇠로 가정하여 다음과 같이 쓰기로 한다.

$$D(\dot{x}) = b\dot{x} \quad (3)$$

이와 같은 가정은 속도의 크기가 커지면 당연히 무시할 수 없을 만한 오차를 야기할 것이므로 이를 염두에 두고 해석에 임하기로 한다. 비선형 고차 감쇠력을 고려하면 해석적인 해를 구하기가 더욱 어려워지므로, 해석해를 구하는 경우 이와 같이 선형 감쇠를 가정하는 것이 일반적이며, 식(3)의 b와 식(2)의 b_1은 같은 양이 아닌 점에 유의한다. 즉 비선형 감쇠력도 부분적으로는 등가 선형 감쇠의 개념을 사용하여 고려할 수 있으며, 한 주기 당 감쇠력에 기인하여 계로부터 소실되는 에너지가 같은 양이 되도록 등가 감쇠 계수를 정하는 방법을 사용하는 것이 일반적으로 보인다.

2.2 복원력에 대한 고찰

횡동요에 대한 복원력은 부심의 이동에 따른 복원력의 발생에 기인하는데, 복원력은 선박의 기하학적인 특성이 알려지면 구할 수 있으며, 변위 x만의 함수로 주어진다. 복원력 곡선은 다음과 같은 몇 가지의 특성 요소를 가진다.

[1] x의 기함수(odd function) 이다.

[2] $x=0$에서의 기울기 $k>0$는 중요한 물리적 의미를 가진다.

[3] $x=x_z$에서 복원 모멘트의 값이 영이 된다.

[4] $x=x_m$에서 국부 최대값을 가진다.

위의 특성 중, [1, 2, 3]을 만족시키는 복원 모멘트 곡선은 다음과 같은 x의 3차식으로 나타낼 수 있는데,

$$R(x) = kx\left(1 - \frac{x^2}{x_z^2}\right) \quad (4)$$

위와 같은 형태의 복원력이 가지는 문제점은 위의 특성 중 [4]를 만족시키지 않는다는 점이며, 식(4)는

$$x = x_M = \frac{x_z}{\sqrt{3}} = 0.577x_z \quad (5)$$

에서 다음과 같은 국부 최대값을 가진다.

$$R_M = \frac{2}{3\sqrt{3}}kx_z = 0.385kx_z \quad (6)$$

일반적인 선박의 복원력 곡선을 위와 같은 형태의 3차식으로 일률적으로 나타낸다는 것은 분명히 문제가 있지만, 해석해를 구하여 운동의 이론적 특성을 살펴보는 데는 큰 도움이 될 것으로 생각할 수 있다. 식(4)에서 볼 수 있는 바와 같이 3차식으로 표현되는 복원력 곡선은 k, x_z 두 개의 매개변수를 포함하는 점에 유의한다.

한편 복원력의 국부 최대치의 위치와 최대값이 고정되는 문제점을 극복하는 방법의 하나로 5차식을 사용하는 것을 생각해 볼 수 있다. 위에서 논의한 여러 가지 조건을 만족시키는 5차식은 다음과 같은 형태로 쓸 수 있는데,

$$R(x) = kx\left(1 - \frac{x^2}{x_z^2}\right)(1 + dx^2) \quad (7)$$

이 식은 k, x_z, d 등 세 개의 매개변수를 포함한다. 이 5차식의 미분은 $x=x_m$에서 영이 되어야 하고, $x>0$에서 하나의 국부 최대값을 가지기 위해서는 다음과 같은 형태를 가져야 한다.

$$\frac{dR}{dx} = \frac{kd}{x_z^2}\left(5x^2 + \frac{B}{x_m^2}\right)(x_m^2 - x^2) \quad (8)$$

단 여기서 $B>0$ 이어야 한다. 식(8)을 식(7)의 미분과 비교하여 B에 대해 다음을 얻고,

$$B = \frac{x_z^2}{d} \quad (9)$$

또한 d에 대해 다음을 얻는다.

$$d = \frac{3\xi^2 - 1}{\xi^2(3 - 5\xi^2)} \quad (10)$$

여기서 $\xi = \frac{x_m}{x_z}$ 이며, d는 ξ만의 함수로 주어지므로, 식(7)로 주어지는 5차식은 k, x_z, ξ 또는 k, x_z, x_m 등 세 개의 매개변수에 의해 결정된다. B에 대한 조건 $B>0$ 으로부터, $d>0$을 얻을 수 있으

므로 ξ에 대한 다음 조건을 얻는다.

$$\xi \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right) = (0.577, 0.775) \tag{11}$$

ξ의 이 구간에 대해 d는 단조 증가 함수이며, $(0, \infty)$의 값을 가진다. 한편 식(5)로부터 복원력이 3차식으로 주어지는 경우에는 $\xi = 0.577$을 얻으므로, x_z의 값이 같다면 5차식인 때의 최대값이 항상 x_M보다 큰 값에서 나타나며, 최대값의 크기는 식(7)로부터 항상 3차식의 최대값 R_M 보다 큰 값을 가진다. 바꾸어 말하면 5차식을 사용한다 하더라도 국부 최대값이 발생하는 위치나 그 최대값을 3차식인 경우보다 작게 할 수 없다는 문제점이 있음을 알 수 있다. 이와 같은 문제점은 5차식을 사용할 때의 이점을 크게 떨어뜨린다고 할 수 있다. 실제 선박에 대한 ξ의 값은 0.577 보다 작은 경우가 대부분이나 값에는 그렇게 큰 차이가 없으므로 3차식을 사용하는 것이 실제 선박에 대해 그렇게 나쁜 근사는 아니라고 볼 수 있다.

복원력을 표현하는데 3차식을 사용하는 것은 비선형 방정식의 해석해를 구하여 해의 성질 및 전복에 대한 메카니즘에 대해 알고자 하는 경우에는 비교적 적절하다고 생각되며, 이런 견지에서 본 연구에서는 식(4)를 사용하기로 한다.

2.3 연성 스프링에 대한 자유 Duffing 방정식의 특성

위에서 살펴본 바와 같이, 강제력이 없는 경우, 전복에 이르는 선박의 횡동요에 대한 해석적 연구를 위해 다음과 같은 운동 방정식을 택하기로 한다.

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx\left(1 - \frac{x^2}{x_z^2}\right) = 0 \tag{12}$$

이 식은 마지막 항인 비선형 항을 제외하면 잘 알려진 질량-감쇠-스프링 계의 운동 방정식이며, 비선형 항은 연성 스프링(soft spring)에 대한 보정항으로 볼 수 있다. 식(12)를 m으로 나누고 무차원 감쇠계수 ζ와 선형계의 고유 진동수 ω_n을 도입하여 다시 쓰면 다음과 같은 자유 Duffing 방정식을 얻는다.

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x\left(1 - \frac{x^2}{x_z^2}\right) = 0 \tag{13}$$

여기서 $\zeta = \frac{b}{2\sqrt{mk}}$, $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$이다. 최근까지 행해진 많은 연구에서 $2\zeta\omega_n$(또는 $\frac{b}{m}$)의 값을 0.1로 택하고 있는데 대해 Thompson(1997)은 너무 작은 값이 아닌가 하는 의문을 제기하고 있으나, 과도해가 중요한 짧은 시간에 대해서는 실제 선박의 경우 대부분 $2\omega_n > 1.5$ 로 볼 수 있으므로, ζ는 0.1 보다는 작은 양으로 가정해도 큰 무리가 없을 것으로 생각된다.

식(13)은 $x \ll x_z$일 때는 비선형 항을 무시하여 다음과 같은 선형 방정식으로 근사할 수 있는데,

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \tag{14}$$

이 선형 미분 방정식의 해는 대부분의 공업수학 교과서에 나와 있는 대로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$x(t) = x_0 e^{-\zeta\omega_n t}\cos\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t \tag{15}$$

여기서 초기 조건으로 $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$을 취하였고, $\zeta \ll 1$을 가정하였다. 선형해의 특성 중 하나는 운동의 진동수(또는 주기)는 초기 조건과 무관하다는 것이며, 또 이 해에 따르면 감쇠의 역할은 다음 두 가지로 요약된다;

1) 지수 함수를 진폭의 일부로 보면, 진폭이 시간에 따라 지수 함수적으로 감소하게 한다.

2) 주기적인 운동을 나타내는 삼각 함수의 진동수를 감소시킨다.

$\zeta \ll 1$을 가정한 것은 미소 감쇠(small damping)로 간주한다는 뜻이며, $\sqrt{1-\zeta^2} \simeq 1 - \frac{1}{2}\zeta^2$로 볼 수 있으므로, 따라서 진동수의 감소는 그리 크지 않다고 할 수 있다.

한편 식(14)에 대해 해를 다음과 같은 형태로 가정할 수도 있으며,

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} y(t) \tag{16}$$

이 가정을 식(14)에 대입하면 $y(t)$에 대한 미분 방정식을 다음과 같이 얻는다.

$$\ddot{y} + \omega_d^2 y = 0, \tag{17}$$

여기서 $\omega_d^2 = \omega_n^2(1-\zeta^2)$이며, 식(17)은 조화 함수(harmonic function)를 해로 가지는 매우 잘 알려진

기본적인 방정식이므로, 이 방정식의 기본해로부터 식(14)의 해를 쉽게 구할 수 있다. 선형 감쇠의 주된 역할 중의 하나가 운동의 지수 함수적인 감소라는 점을 이용하여 식(16)을 가정, 운동 방정식에서 감쇠력 항을 소거하는 방법은 미분 방정식을 다루는데 매우 중요한 방법 중의 하나이다.

식(13)의 자유 Duffing 방정식에 식(16)의 가정을 사용하면 $y(t)$에 대한 다음 식을 얻는다.

$$\ddot{y}+\omega_n^2 y\left[(1-\zeta^2)-\frac{e^{-2\zeta\omega_n t}y^2}{x_z^2}\right]=0 \qquad (18)$$

이 식을 그대로 푸는 것은 쉬운 일이 아니므로, 아래에서는 다음과 같은 두 가지 점근적(asymptotic)인 경우를 생각한다;

1) 먼저, t가 대단히 작을 경우, 즉 $\zeta=0.05$를 가정하고 $2\zeta\omega_n t<0.2$인 경우, 다시 말하면 $t<\frac{T}{\pi}$에는, $e^{-2\zeta\omega_n t}\simeq 1$로 근사할 수 있고, 또 같은 근사 정도를 유지한다는 측면에서 $1-\zeta^2\simeq 1$의 근사를 사용하면 짧은 시간에 대해 다음과 같은 근사식을 얻는다.

$$\ddot{y}+\omega_n^2 y\left(1-\frac{y^2}{x_z^2}\right)=0 \qquad (19)$$

이 식은 비감쇠 자유 Duffing 방정식(undamped free Duffing equation)으로 부르는데, 식(13)과 비교하면 원래 미분 방정식의 감쇠 항이 짧은 시간에 대해서는 해의 지수 함수적인 감소를 의미하는 것으로 대체되었음을 알 수 있다. 한편 식(19)와 같이 관성을 나타내는 2계 미분 항과, 변위만의 함수로 주어지는 복원력을 나타내는 항만으로 이루어진 미분 방정식을 다루는 방법에 대해서는 비선형 진동을 다루는 책들에 비교적 자세히 서술되어 있다. 식(19)와 그 해에 대해 물리적으로 설명하면 이 식은 연성 스프링에 대한 운동 방정식으로, 초기 조건에 따라 두 가지의 운동을 할 수 있는데, 초기 조건이 "작으면" 비선형 주기 운동을, "크면" 탈출(escape), 파괴(breakdown) 또는 전복(capsize)에 이르는 대변위 운동을 하게 된다. 식(19)의 해에 대한 위상 평면(phase plane)은 분리곡선(separatrix)을 경계로 주기 운동과 전복으로 양분된다. 분리곡선은 식(19)를 적분하여 다음 식으로 얻는데

$$u=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\omega_n}{x_z}(y^2-x_z^2) \qquad (20)$$

여기서 $u=\frac{dy}{dt}$, 분리곡선의 y절편은 x_z, u절편은 $\omega_n x_z/\sqrt{2}$이므로, 예를 들어 초기조건이 $x(0)=x_0$, $\dot{x}(0)=0$인 경우, $x_0<x_z$일 때는 전복의 위험이 없는 것으로 간주할 수 있다. 그러나 초기 속도가 영이 아닌 경우에는 $x_0<x_z$가 만족된다고 하더라도 초기 조건에 상응하는 위상 평면상의 점이 분리곡선의 바깥에 있다면 전복의 가능성이 있다. 실제 운동인 $x(t)$는 물론 식(16)에서 가정한 바와 같이 지수 함수적으로 감소하나, 짧은 시간에 대해서는 지수 함수의 영향이 그리 크지 않으므로, 위에서 보인 바와 같은 이유에 기인하는 전복이 발생할 수도 있음에 유의한다.

비선형 주기 운동의 경우 선형 해로 주어지는 주기 운동과 다른 가장 중요한 결과는 진동수(또는 주기)가 초기 운동의 크기에 따라 변화한다는 점이다. 연성 스프링의 경우, 주기 T는 식(19)를 두 번 적분하여 다음과 같이 얻는데

$$\begin{aligned}
T &= \frac{4}{\omega_n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{\delta^2}{2}-\frac{\delta^2}{2}\sin^2\theta}}\\
&=\frac{4}{\omega_n}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\delta^2}{2}}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-x^2\sin^2\theta}}\\
&=\frac{4}{\omega_n}\tau(\delta)K(x)\\
&=\frac{2\pi}{\omega_n}\tau(\delta)\left\{1+\frac{1}{4}x^2+\frac{9}{64}x^4+\cdots\right\} \qquad (21)
\end{aligned}$$

단 $x^2=\delta^2/(2-\delta^2)$, $\tau(\delta)=(1-\frac{\delta^2}{2})^{-\frac{1}{2}}$이며, $\delta=\frac{y_{\max}}{x_z}$이고, 통상 $\delta<1$이므로, $x<1$이며, $K(x)$는 제 1종 완전 타원 적분이다. $K(x)$는 $x=0$에서 $\frac{\pi}{2}$, $x\to\infty$에서 ∞가 되는 단조 증가 함수이다. 식(21)에서 $\delta=0$은 선형인 경우에 해당하며, 이때는 $T=\frac{2\pi}{\omega_n}$을 얻어 선형 문제에 대한 결과를 얻게 된다. 한편 $\delta\ll 1$인 경우에는 τ와 x는 다음과 같이 점근적으로 근사할 수 있으므로,

$$\tau\simeq 1+\frac{1}{4}\delta^2 \qquad (22)$$

$$x^2 \simeq \frac{1}{2}\delta^2(1+\frac{1}{2}\delta^2) \tag{23}$$

이들을 사용하여 T에 대한 다음 점근식을 얻는다.

$$T \simeq \frac{2\pi}{\omega_n}(1+\frac{1}{4}\delta^2)(1+\frac{1}{8}\delta^2)$$
$$\simeq \frac{2\pi}{\omega_n}(1+\frac{3}{8}\delta^2) \tag{24}$$

주기 운동의 경우, 초기 조건이 $x(0)=x_0$, $\dot{x}(0)=0$인 때는 $y_{\max}=x_0$이므로, 식(24)는 주기가 초기 조건에 따라 어떻게 변화하는지를 보여 주는 결과이며, $\delta=0.5$일 때 선형 주기에 비해 약 10% 정도 증가한다. 연성 스프링의 경우, 초기 변위의 크기가 증가하면 주기는 증가하고 진동수는 감소한다. x_z가 작을수록, 비선형의 효과가 커져서, 초기 변위의 증가에 따라 진동수가 더욱 급격히 감소한다.

2) 다음으로, t가 매우 클 경우에는, $e^{-2\zeta\omega_n t}\simeq 0$으로 근사할 수 있으며, 따라서 긴 시간(long time)에 대해서는 선형 방정식인 식(17)을 적용할 수 있으므로, 짧은 시간 안에 전복이 발생하지 않으면 긴 시간에 대한 $y(t)$는 조화 함수로 나타낼 수 있다. 따라서 횡동요 $x(t)$는 결국 감쇠 때문에 소멸될 것으로 볼 수 있다.

위에서 얻은 이론적 결과들에 대한 실험적 확인을 본 연구에서는 수행하지 않았지만 차후 이 분야에 대한 실험적 연구들이 기대된다.

3. 횡파 중 횡동요 비선형 방정식의 정립과 해법

선박이 횡파 중에 놓여 있을 때는, 파도에 의한 기진 모멘트(exciting moment, 이하에서는 기진력으로 부르기로 한다)가 작용하게 되며, 이 힘을 고려한 횡동요에 대한 운동 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx(1-\frac{x^2}{x_z^2})=F_0\cos\omega t \tag{25}$$

여기서 ω는 강제력의 진동수이다. 강제력이 있는 경우에 대해서도 비선형 항을 무시하면 공업수학의 대부분의 교과서에서 다루고 있는 상수 계수의 2계 미분 방정식을 얻게 되므로 해를 쉽게 구할 수 있다. 단 강제력의 진동수가 선박의 횡동요 고유 진동수와 비슷한 근공진 상태이며, 또 감쇠가 작은 경우의 짧은 시간에 대한 해는 잘 알려져 있지 않으며, 한편 이와 같은 상태가 본 연구에서 주요한 과제로 삼고 있는 문제와 관련이 있으므로 이에 대해 먼저 살펴보고 비선형 방정식을 다루기로 한다.

3.1 선형 강제 방정식의 미소 감쇠 근공진 (SDNR) 상태에 대한 해

이 절에서는 식(25)의 선형 방정식을 고려하기로 하는데, 먼저 m으로 나누어 다음과 같은 방정식을 얻는다.

$$\ddot{x}+2\zeta\omega_n\dot{x}+\omega_n^2 x=f_0\cos\omega t \tag{26}$$

여기서 $f_0=\frac{F_0}{m}$이며, 식(26)의 일반해는 과도해(transient solution) X_t와 정상해(steady solution) X_s로 이루어지는데 먼저 과도해 X_t는 다음과 같고

$$X_t(t)=e^{-\zeta\omega_n t}\Big[\{x_0-S(\omega_n^2-\omega^2)\}\cos\omega_d t$$
$$+\frac{1}{\omega_d}\{\zeta\omega_n x_0+\dot{x}_0-\zeta\omega_n S(\omega_n^2+\omega^2)\}\sin\omega_d t\Big] \tag{27}$$

여기서 $x_0=x(0)$, $\dot{x}_0=\dot{x}(0)$으로 주어지는 초기 조건이고, S는 다음과 같이 주어진다.

$$S=\frac{f_0}{(\omega_n^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2} \tag{28}$$

한편 정상해 X_s는 다음과 같다.

$$X_s(t)=S\{(\omega_n^2-\omega^2)\cos\omega t+2\zeta\omega_n\omega\sin\omega t\} \tag{29}$$

식(27)에 따르면 과도해는 지수 함수적으로 감소하므로, 시간이 지나면 결국 정상해만 남게 되는데, 여기서 예외적인 경우가 $S\to\infty$인, 미소 감쇠 근공진(SDNR) 상태이다. 정상해 또한 SDNR 상태가 아니면 전복에 이르는 과도한 변위를 가질 수 없으므로, 본 연구에서 고려해야 하는 경우는 SDNR 상태임을 확인할 수 있다.

여기서 SDNR 상태는 $\zeta\ll 1$, $\omega=\omega_n(1-\varepsilon)$, $\varepsilon\ll 1$임을 의미하며, 해석해의 논의를 간단히 하기

위해 초기 조건이 $x(0)=\dot{x}(0)=0$ 인 경우를 먼저 고려하기로 한다. SDNR 상태인 경우,

$$\omega_d \simeq \omega_n\left(1-\frac{1}{2}\zeta^2\right) \simeq \omega_n \tag{30}$$

$$\omega=\omega_n(1-\varepsilon) \simeq \omega_n \tag{31}$$

으로 볼 수 있으며, 여기서 위 두 근사식의 일관성 (consistency)을 위해 다음을 가정하고,

$$\varepsilon=O(\zeta^2) \tag{32}$$

이하에서 SDNR 상태는 식(32)가 성립하는 경우를 지칭하는 것으로 한다. 식(30), (31)을 식(28)에 대입하고 식(32)를 이용하여 SDNR 상태에 대한 S를 다음과 같이 얻는다.

$$S \simeq \frac{f_0}{4\zeta^2\omega_n^4} \tag{33}$$

위의 가정, 결과들을 식(27), (29)에 대입하여 SDNR 상태에 대한 과도해와 정상해를 각각 다음과 같이 얻는다.

$$X_t(t) \simeq -2\zeta\omega_n^2 S\, e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_n t \tag{34}$$

$$X_s(t) \simeq 2\zeta\omega_n^2 S \sin\omega_n t \tag{35}$$

결과적으로 식(26)의 SDNR 상태에 대한 일반해 $X(t)$는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$X(t) \simeq \frac{f_0}{2\zeta\omega_n^2}\left(1-e^{-\zeta\omega_n t}\right)\sin\omega_n t \tag{36}$$

위에서 얻어진 해에 대해 고찰하여 다음과 같은 중요한 사실들을 알게 된다;

1) 식(36)에서 감쇠의 역할은 다음과 같다.

1> 과도해의 진폭을 지수 함수적으로 감소하게 한다.

2> 정상해의 상수 진폭은 ζ에 반비례한다.

2) 식(36)에 보인 일반해의 진폭은 $(1-e^{-\zeta\omega_n t})$와 같이 시간에 따라 변화하는데, 이 함수는 $t=0$에서 영의 값을 가지며, $t\to\infty$일 때 1의 값을 가지는, 단조 증가 함수이다.

3) 식(36)에서 정상해의 진폭의 크기는 $O(\frac{1}{\zeta})$ 이므로, SDNR 상태에서 시간이 경과함에 따라 선박이 전복에 이를 수 있는 가능성을 보여주고 있다.

4) 식(26)에서 감쇠가 없고($\zeta=0$), $\omega=\omega_n$인 경우, 통상 공진이라고 부르는 현상이 발생하며, 이때 운동의 진폭은 시간에 따라 선형적으로 증가한다고 알려져 있다. 이러한 사실은 식(36)의 짧은 시간에 대한 근사를 통해 확인할 수 있는데,

$(1-e^{-\zeta\omega_n t}) \to \zeta\omega_n t$ 이므로 다음 결과를 얻는다.

$$X(t) \to \frac{f_0}{2\omega_n}\, t\sin\omega_n t \tag{37}$$

이 결과는 감쇠가 없는 경우, 공진이 발생할 때의 해와 정확히 일치한다. 따라서 비감쇠계가 공진할 경우 운동의 진폭이 시간에 따라 선형적으로 증가한다는 결과는 SDNR 상태의 짧은 시간에 대해서도 그대로 적용되는 결과임을 알 수 있다.

이 결과는 많은 것을 의미하는데, 실제 물리계의 경우 어떤 계도 감쇠가 아주 없을 수는 없으므로, 공진이 일어날 때, 짧은 시간에는 운동의 진폭이 시간에 따라 선형적으로 증가하나, 시간이 지나면서 결국은 감쇠의 개입에 따라 일정한 크기의 진폭을 가지게 될 것임을 시사한다. 만약 최종적인 진폭이 선박의 전복이 일어날 수 있는 한도를 초과하면 유한한 시간 내에 전복이 발생할 가능성이 있음을 뜻한다고 볼 수 있다.

5) 해석을 간단히 하기 위해 무시했던 초기 조건의 영향을 다시 생각해보면, 영이 아닌 초기 조건은 식(27)의 과도해에만 영향을 끼침을 알 수 있으며, 이들의 진폭은 유한하므로[$=O(1)$] 결국은 시간이 지나면 소멸되는 과도적 운동이다. 따라서 초기 조건이 너무 과도하게 크지 않다면, 식(36)은 어떠한 초기 조건에 대해서도 성립하는 결과임을 알 수 있다.

위에서 보인바와 같이 비교적 간단한 일반해를 얻는 데는 식(32)로 주어지는 SDNR 상태에 대한 가정의 역할이 꽤 중요하다는 점에 다시 한번 유의한다.

3.2 Duffing 방정식의 짧은 시간(ST)에 대한 해

앞 절에서와 같이 식(25)를 m으로 나누어 다음 식을 얻는다.

$$\ddot{x}+2\zeta\omega_n\dot{x}+\omega_n^2 x(1-\frac{x^2}{x_z^2})=f_0\cos\omega t \quad (38)$$

이 식은 Duffing 방정식으로 알려진 식이며, Duffing(1918) 이후, 일찍부터 연구의 대상이 되어 왔으나, 대부분의 연구가 주기 함수로 주어지는 일종의 '정상해'를 구하는 것에 한정되어 있다. 이는 Jordan & Smith(1999) 등의 여러 참고 문헌에서 확인할 수 있다. 선형 미분 방정식의 경우, 과도해는 강제력이 없는 경우의 해를 뜻하며, 정상해는 특정한 강제력에 대한 특별해를 뜻한다. 과도해의 크기는 초기 조건을 만족시키도록 결정되는데, 선형성 때문에 과도해와 정상해의 합 또한 미분 방정식의 해가 되는 것이 보장되지만, 비선형 방정식인 경우에는 이와 같은 분리가 근본적으로 불가능하다. 따라서 비선형계에 대해서는 과도해와 정상해의 구분 자체가 무의미하며, 본 연구에서와 같이 짧은 시간에 대한 해를 구하고자 하는 경우에는 반드시 정상해가 아니라도 일단 초기 조건을 만족하는 해를 구할 수 있다면 수학적으로 큰 문제가 없을 것이다. 이하 본 연구에서는 식(38)이 다음과 같은 초기 조건에 대해

$$x(0)=x_0\,,\quad \dot{x}(0)=0 \quad (39)$$

다음과 같은 형태의 해를 가질 수 있는지에 대해 우선적으로 고찰해 보기로 한다.

$$x(t)=e^{-\zeta\omega_n t}y(t) \quad (40)$$

운동의 초기에는 선형 방정식으로 설명이 가능한 비교적 작은 크기의 운동이 발생할 것이나, 점차 운동이 커지면서 복원력의 비선형성을 고려해야만 하는 상태로 발전할 것이며, 어느 시점 이후에는 비선형 복원력의 영향에 따라 운동의 증가 추세에 변화가 생길 것이다. 이때 만약 감쇠의 역할이 식(40)과 같은 형태로 나타나고 $y(t)$의 크기가 제한되어 있다면, 운동이 시간이 지남에 따라 지수 함수적으로 감소하므로, 전복의 위험은 크지 않을 것으로 기대할 수 있다. 먼저 $y(t)$에 대한 초기 조건은 식(39)로부터 다음과 같고,

$$y(0)=x_0\,,\quad \dot{y}(0)=\zeta\omega_n x_0 \quad (41)$$

식(40)을 식(38)에 대입하여 다음 결과를 얻는다.

$$\ddot{y}+\omega_d^2 y-\beta e^{-2\zeta\omega_n t}y^3=f_0 e^{\zeta\omega_n t}\cos\omega t \quad (42)$$

여기서 $\beta=\frac{\omega_n^2}{x_z^2}$ 이며, 대체적으로 1보다는 작은 양이다. 식(42)의 짧은 시간(ST), 즉 $t<\frac{T}{\pi}$ 에 대한 해를 생각하면 지수 함수를 모두 1로 근사할 수 있으므로 다음과 같이 다시 쓸 수 있으며,

$$\ddot{y}+\omega_d^2 y-\beta y^3=f_0\cos\omega t \quad (43)$$

이 식은 비감쇠 Duffing 방정식이다. 식(43)의 해를 구하기 위해서는 Duffing에 의해 알려진 반복법을 사용하기로 하는데, 이 방법의 특징은 선형 고유 진동수에 가까운 계의 진동수 ω를 주어진 양이 아닌 f_0에 따라 변화하는 양으로 간주한다는 점에 유의한다. 먼저 1차 근사로 다음을 가정한다.

$$y(t)=y_1(t)=x_0\cos\omega t \quad (44)$$

반복법을 쓸 때에는 반복자(iterator)의 선택이 중요하며, 먼저 식(43)의 양변에 $\omega^2 y$를 더하고 좌변의 복원력 항들을 이항하여 다음과 같은 형태의 반복자를 얻고,

$$\ddot{y}+\omega^2 y=(\omega^2-\omega_d^2)y+\beta y^3+f_0\cos\omega t \quad (45)$$

이 식의 우변에 식(44)를 대입하여 다음을 얻는다.

$$\ddot{y}+\omega^2 y=\left\{(\omega^2-\omega_d^2)x_0+\frac{3}{4}\beta x_0^3+f_0\right\}\cos\omega t + \frac{1}{4}\beta x_0^3\cos 3\omega t \quad (46)$$

여기서 우변의 $\cos\omega t$의 계수가 영인 경우, 즉 y가 주기 함수인 해를 먼저 생각해 보기로 하면, 계의 진동수 ω를 계의 매개변수 ω_n, ζ, β 및 f_0의 함수로 다음과 같이 얻는다.

$$\omega^2=\omega_d^2-\frac{3}{4}\beta x_0^2-\frac{f_0}{x_0} = \omega_n^2(1-\zeta^2-\frac{3}{4}\delta^2-\sigma) \quad (47)$$

여기서 $\delta = \dfrac{x_0}{x_z}$, $\sigma = \dfrac{f_0}{\omega_n^2 x_0} = \dfrac{F_0}{kx_0}$ 이다. 식(47)은 비선형 계의 진동수가 초기 조건과 기진력의 크기에 따라 어떻게 변화하는지 보여주는 식으로, $\zeta = \sigma = 0$인 경우에는 식(24)의 비감쇠 자유 Duffing 방정식에 대한 결과와 동일한 결과를 주고 있다. 식(47)에 따르면 연성 스프링의 경우, 감쇠, 초기 변위, 강제력의 크기 등이 클수록 진동수는 감소하며 한편 σ는 기진력의 크기를 초기 변위에 상응하는 복원력으로 나누어 얻은 무차원량임에 유의한다. 그러나 식(47)에 따르면 ω는 ω_n보다 항상 작으므로, 식(47)은 $\omega < \omega_n$인 경우에 성립하며, 이 경우에는 식(46)으로부터 $y(t)$에 대한 2차 근사를 다음과 같이 얻는다.

$$y_2(t) = x_0 \cos \omega t - \frac{\delta^2 x_0}{32(1-\zeta^2 - \frac{3}{4}\delta^2 - \sigma)} \cos 3\omega t \tag{48}$$

이 절에서 지금까지 미소 감쇠-근공진에 대한 가정을 표면적으로(explicitly) 언급한 적은 없으나 위에서 사용하고 있는 반복법이 수렴하기 위해서는 식(48)에서 알 수 있는 바와 같이 미소 감쇠-근공진의 가정이 성립해야 될 뿐만 아니라 초기 변위 및 기진력 또한 어느 정도 작은 양이어야 한다. 그와 같은 경우에는 식(48)이 초기 조건인 식(41)도 만족한다고 볼 수 있으므로, 식(47)이 성립하는 경우, 식(38)의 짧은 시간에 대한 해는 주어진 초기 변위보다 커질 수 없고, 따라서 전복이 발생할 가능성은 없다고 볼 수 있다.

한편 위에서 언급한 바와 같이, 식(47)은 ω가 ω_n보다 작은 경우에만 만족될 수 있으므로, $\omega > \omega_n$인 경우는 따로 고려해야 한다. 즉 이 경우에는 식(46) 우변의 $\cos \omega t$의 계수가 영이 아니므로 y는 시간 t에 비례하여 증가하는 변위 성분을 가지게 되며, 다음과 같은 2차 근사를 얻는다.

$$y_2(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{\omega_n^2 P x_0}{2\omega} t \sin \omega t - \frac{1}{32}\frac{\omega_n^2}{\omega^2}\delta^2 x_0 \cos 3\omega t \tag{49}$$

여기서 $P = \zeta^2 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 + \frac{3}{4}\delta^2 + \sigma$이며, $\varepsilon < 0$ 이므로 $P > 0$을 얻는다. 이 경우 반복을 거듭할수록 반복자인 식(45)의 우변에 $\frac{\omega_n t}{2} < 1$의 고차항들이 나타날 것이며, ST에 대해서는 이들 고차항을 무시할 수 있으므로, 식(49)를 근사해로 취하기로 하면, 결국 ST에 대한 x에 대해 다음과 같은 근사해를 얻는다.

$$x(t) \simeq \frac{\omega_n^2 P x_0}{2\omega} t e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega t \tag{50}$$

우변의 시간에 따른 증감을 결정짓는 인자는 $te^{-\zeta\omega_n t}$인데 이 인자는 $t = \frac{1}{\zeta\omega_n}$ 에서 최대값을 가지므로 ST에 대해서는 단조 증가 함수나 마찬가지로 볼 수 있으며, 따라서 다음과 같은 조건이 만족되는 경우에는

$$\frac{\omega_n^2 P}{2\omega} te^{-\zeta\omega_n t} > 1 \tag{51}$$

횡동요의 변위가 초기 변위보다 더 큰 값을 가지게 되어 전복이 발생할 가능성이 크다고 볼 수 있다. SDNR인 경우에는 식(51)을 다음과 같이 근사적으로 다시 쓸 수 있고,

$$\frac{\omega_n P t}{2} > 1 \tag{52}$$

여기서 $P \simeq \frac{3}{4}\delta^2 + \sigma$, $t \simeq \frac{0.1}{\zeta\omega_n}$, $\zeta = 0.05$로 취하면 결국 다음을 얻는다.

$$\left(\frac{3}{4}\delta^2 + \sigma\right) > 1 \tag{53}$$

초기 변위와 기진력의 크기가 너무 작지 않다면, 식(53)은 충분히 성립될 가능성이 있다. 따라서 $\omega > \omega_n$인 SDNR의 경우, $\omega < \omega_n$에 비해 상대적으로 전복 발생의 위험이 높다고 볼 수 있다.

4. 결론

이상의 논의에서 선박의 횡동요에 대한 운동 방정식을 고려함에 있어 짧은 시간에 대한 해를 구하는 것과 관련하여 다음 결론을 얻는다.

1) 감쇠력으로는 등가 선형 감쇠력을 사용한다.

2) 복원력으로는 k, x_z 두 개의 매개변수를

포함하는 3차식을 사용한다. 따라서 운동 방정식은 연성 스프링에 대한 Duffing 방정식이다.

3) 기진력이 없을 때, 짧은 시간, 즉 $t<\frac{T}{\pi}$ 에 대한 해로부터, 초기 조건이 자유 Duffing 방정식의 분리곡선의 바깥에 위치하는 경우, 전복 가능성이 있다.

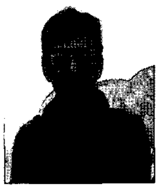
4) 기진력이 있을 때, 미소 감쇠-근공진(SDNR)인 경우, 선형 방정식으로 기술 가능한 초기에는 변위의 진폭이 기진력의 크기에 비례하고, 감쇠계수에 반비례하며, 시간에 따라 $(1-e^{-\zeta\omega_n t})$ 처럼 증가한다. 따라서 비선형 방정식을 사용하여 운동을 기술해야 할 만큼 변위가 큰 시점에 도달하게 되며, 비선형 방정식의 해에 따르면, $\omega>\omega_n$ 인 경우, 초기 변위와 기진력이 식(53)을 만족하는 경우, 전복 가능성이 있다.

후 기

본 논문은 과학기술부 특정연구개발과제(해양연구원)의 위탁과제로 수행되었으며, 위 기관의 후원에 심심한 사의를 표합니다.

참 고 문 헌

- 박주성, 이승준, 1999, "비선형 횡요 운동에 있어서의 프랙탈과 혼돈현상," 대한조선학회 춘계학술대회 논문집, pp. 304-309.
- 이희성, 권순홍, 1999, "흡인영역과 끌개의 해석을 통한 선박의 비선형 횡동요 운동에 관한 연구," 대한조선학회 논문집, 제 36권, 제 3호, pp. 71-83.
- Jordan, D.W. and Smith, P., 1999, An introduction to dynamical systems, 3rd Ed., Oxford Univ. Press.
- Soliman, M.S., 1990, "An analysis of Ship Stability Based on Transient Motions," Proc. 4th Int'l Conf. Stability of Ships & Ocean Vehicles, pp. 183-199, Naples.
- Thompson, J.M.T., 1997, "Designing Against Capsize in Beam Seas: Recent Advances and New Insights," Appl. Mech. Rev., Vol. 50, No. 5, pp. 307-325.



< 이 승 준 >