

< 논문 >

# 정탄성학 문제에서 경계 기반 형상설계 민감도 해석

최 주 호<sup>†</sup> · 원 준 호<sup>\*</sup>

(2005년 7월 15일 접수, 2005년 12월 28일 심사완료)

## Boundary-Based Shape Design Sensitivity Analysis of Elastostatics Problems

Joo-Ho Choi and Jun-Ho Won

**Key Words :** Boundary Integral(경계적분), Shape Design Sensitivity Analysis(형상설계민감도해석), Shape Optimization(형상최적설계), Three Dimensional Elastostatics(3차원 정탄성학)

### Abstract

A boundary-based design sensitivity analysis(DSA) technique is proposed for addressing shape optimization issues in the elastostatics problems. Sensitivity formula is derived based on the continuum formulation in a boundary integral form, which consists of the boundary solutions and shape variation vectors. Though the boundary element method(BEM) has been mainly used to obtain the boundary solution, the FEM is used in this paper because this is much more popular, and has greatly improved meshing and computing power recently. The advantage of the boundary DSA is that the shape variation vectors, which are also known as design velocity fields, are needed only on the boundary. Then, the step for determining the design velocity field over the whole domain, which was necessary in the domain-based DSA, is eliminated, making the process easy to implement and efficient. Problem of fillet design is chosen to illustrate the efficiency of the proposed method. Accuracy of the sensitivity is good with this method even by employing the free mesh for the FE analysis.

### 1. 서론

구조물 설계시 형상최적설계(shape optimization)는 최적화 과정 동안 구조물의 형상이 변하기 때문에 설계변수로 고려되는 기하학적 데이터 즉, 경계면 또는 접촉면의 형상을 다루게 된다. 이는 치수를 결정하는 치수최적설계(size optimization)에 비해 더욱 어려운 것으로 알려져 있으나, 형상최적화의 우수성과 중요성으로 인해 지난 30년간 많은 연구가 진행되어 왔다.<sup>(1,2)</sup>

형상최적화에 사용되는 대부분의 이론들은 최적의 형상을 찾기 위해 경사(gradient)를 이용한다.

경사 계산을 위해서는 유한차분법(finite difference method, FDM)이 많이 사용되는데, 이 방법은 쉽게 적용이 가능한 반면 해석시간이 많이 소요되며 종종 잘못된 최적화를 유발하는 경우도 있다. 그에 비해 본 논문에서 이용하는 설계민감도해석(design sensitivity analysis, DSA)은 해석적인 방법에 기반을 둔 민감도공식을 이용함으로써 유한차분법에 비해 더 효과적이며, 정확도가 높은 장점이 있다.

설계민감도해석은 형식에 따라 이산화방법과 연속방법으로 나눌 수 있다. 두 방법 모두 민감도를 계산 가능한 식으로 표현한다는 목적은 동일하지만, 이산화방법은 주어진 문제를 유한요소화한 후 미분을 하는 반면, 연속방법은 본래의 연속방정식을 미분한 후 나온 결과식을 이산화하여 계산한다는 점에서 차이를 가진다. 또한 이산화방법은 유도과정이 이해하기 쉬운 장점이 있으나 실제 코딩을 위해 많은 노력이 필요하며, 강성행렬 정보를

<sup>†</sup> 책임저자, 회원, 한국항공대학교 항공우주 및 기계공학부  
E-mail : jhchoi.@hau.ac.kr

TEL : (02)300-0117 FAX : (02)3158-2y1

\* 한국항공대학교 대학원 항공우주 및 기계공학과

필요로 하기 때문에 이를 제공하지 않는 상용소프트웨어를 이용한다면 이 방법을 사용하는 것이 불가능하다. 반면, 연속방법은 해석적으로 유도된 민감도공식을 사용하므로 강성행렬이 필요 없고 상용소프트웨어의 활용이 가능하다. 이점은 최근 설계가 다분야통합해석(multidisciplinary analysis)을 수반한다는 점을 고려할 때 바람직한 것으로 판단된다.

연속방법은 Zolesio,<sup>(3)</sup> Rousselet와 Haug,<sup>(4)</sup> Choi와 Haug<sup>(5)</sup> 그리고 Dems와 Mroz<sup>(6)</sup> 등에 의해 개척되었으며, 영역 전체를 대상으로 하는 영역적분법(domain integration)과 경계만을 고려하는 경계적분법(boundary integration)으로 구분된다. 영역적분법<sup>(7-13)</sup>은 성능함수(performance function)가 영역 전체에서 정의되며, 민감도 역시 영역에 대한 적분형태로 표현된다. 한편 형상을 다루는 설계민감도해석에서는 형상변분(shape variation)을 표현하기 위해 전미분(material derivative)<sup>(3)</sup>을 이용하는 것이 일반적인데, 이 경우 형상변분은 유체 유동에서의 속도장(velocity field)에 해당되며 따라서 이를 설계속도장(design velocity field)이라고도 부른다. 영역적분법에서는 이 속도장이 전 영역에 걸쳐 정의되는데 이것은 단점으로 작용한다. 왜냐하면, 영역의 형상이 전 영역이 아닌 단지 경계에 의해서만 정의되며 따라서 속도장을 전 영역에서 정의한다는 것은 불필요한 일이기 때문이다. 이를 위해 영역법에서는 영역전체의 속도장을 구하기 위해 주어진 경계속도장 하에서 가상의 탄성체해석을 수행하는 경계변위법(boundary displacement method)을 이용한다.<sup>(9)</sup> 이 방법은 최적화의 매 반복마다 수행되므로 많은 시간과 노력이 요구된다. 게다가 열전도해석과 같은 비탄성해석이 수반되는 최적화 문제라면, 성격이 전혀 다른 탄성체 문제를 추가로 해석해야 하므로 효율은 더욱 감소한다. 이러한 비효율성은 민감도를 영역적분으로 표현하기 때문이다.

이와 반면에 경계적분법<sup>(14-17)</sup>은 민감도가 경계적분의 형태로 표현되므로 경계에서의 속도장만을 필요로 하며, 앞서의 경계변위법과 같은 추가적인 계산을 하지 않는 장점이 있다. 경계적분법에서는 경계에서의 해만을 필요로 하므로 지금까지 경계요소법(boundary element method, BEM)을 주로 사용하였다. 그러나 이 방법은 경계요소법 자체의 활용분야가 매우 제한적이기 때문에 그 장점에도 불구하고 활발히 사용되지 못하고 있다. 본 논문에서는 이러한 점에 착안하여 유한요소법을 사용한 경계적분법으로 정확한 민감도를 구하는 방법을 제안하였다. 이것이 가능한 이유는 민감도해석이 해석적으로 구한 민감도공식을 사용하기 때문에

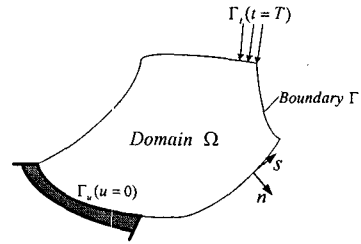


Fig. 1 Elastostatics problem

해석 방법은 유한요소법이나 경계요소법 어떤 것을 사용해도 상관없기 때문이다. 그러나 실제 수치계산의 측면에서는 유한요소법이 경계에서 해가 부정확하며 매 형상이 바뀔 때 마다 영역전체에 메쉬를 생성해야 한다는 문제가 과거에 지적된 바 있다. 그런데 이러한 문제점이 지난 수십 년의 기술발전으로 자동영역메쉬 및 경계근방 조밀메쉬 생성기능 등을 통하여 해결이 되었다. 따라서 유한요소법을 이용한 경계적분기법의 민감도해석은 유한요소법이 여전히 지배적인 해석 방법임을 고려할 때 매우 필요한 방법이다. 또한 이 기법을 통해 앞서 언급한 영역 설계속도장의 계산을 피할 수 있다. 이러한 사실에도 불구하고 이 방향으로 연구한 사례는 아직 찾아볼 수 없었다. 이 방법은 본 저자가 최근 연구했던 금속성형(metal forming)과 같은 비선형 문제에도 쉽게 적용될 수 있다.<sup>(18)</sup> 본 방법의 사용 예를 보이기 위해 필렛문제를 고려하였으며, 해석을 위해 ANSYS를, 민감도 계산을 위해 Matlab을 이용하였다.

## 2. 형상설계민감도 정식화

형상설계민감도 이론 과정의 시작은 주어진 문제를 파악하고, 목적함수(object) 또는 제약조건(constraint)을 나타내는 성능함수 및 형상을 나타내는 설계변수를 정의하는 것으로부터 시작된다. 형상변분은 전미분의 개념을 이용하여 효과적으로 설명된다.<sup>(19)</sup> 이와 관련한 이론 및 민감도공식의 유도는 이미 지난 연구<sup>(15)</sup>에서 다룬 바 있으며 따라서 본 논문에서는 중요한 결과식만을 수록하였다.

### 2.1 정탄성학 문제의 설계민감도해석

Fig. 1과 같은 임의 탄성체에 대해 식 (1)과 같은 지배방정식을 만족하는 변위  $u_i$ 를 고려하자.

$$\sigma_{i,j} + f_i = 0 \text{ in } \Omega \quad (1)$$

여기서  $f_i$ 는 영역내에 존재하는 단위부피의 체적

력이며, 응력텐서(stress tensor)는 다음과 같다.

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2)$$

여기서

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3)$$

이며 변형률텐서(strain tensor)는

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (4)$$

이다. 경계조건(boundary condition)은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} u_i &= U_i \text{ on } \Gamma_u \\ t_i &= \sigma_{ij} n_j = T_i \text{ on } \Gamma_t \end{aligned} \quad (5)$$

여기서  $U_i$  와  $T_i$  는 경계  $\Gamma_u$  와  $\Gamma_t$  에 주어진 변위와 트래션(traction)이며,  $n_i$  는 경계에서의 단위 법선벡터를 나타낸다.

이제, 형상최적화 문제의 목적함수 또는 제한조건으로 사용 가능한 일반적인 범함수(functional)를 다음과 같이 고려한다.

$$\Psi = \int_{\Omega} \varphi(u_i, \sigma_{ij}) dx \quad (6)$$

여기서  $\varphi$  는 영역에서 정의된 변위와 응력의 함수이다. 이 범함수의 민감도공식은 다음과 같이 경계적분으로 표현된다.

$$\Psi' = \int_{\Gamma} \left[ (\varepsilon_{ij} \bar{\sigma}_{ij}^* - u_{i,s} \bar{q}_i^* - u_{i,s}^* q_i + f_i u_i^* + \varphi) V_n \right. \\ \left. + (u_{i,s} \bar{t}_i^* + u_{i,s}^* t_i) V_s + t_i u_i^* DV_s \right] ds \quad (7)$$

이 식에서  $q_i^* = \sigma_{ij}^* s_j$  이며,  $s_i$  는 경계에서의 단위 접선벡터이다.  $V_n$  과  $V_s$  는 설계속도장의 경계에서의 법선 및 접선방향 성분을 나타낸다. 그리고

$$DV_s = V_{k,s} s_k = V_n H + V_{s,s} \quad (8)$$

이며,  $H$  는 경계의 곡률이다. 위 식에서  $\bar{\sigma}_{ij}^*$  및  $\bar{q}_i^*$  와 같이 첨자  $\sim$  로 표현된 변수는 아래와 같이 상 첨자 \*로 표시된 변수와  $\circ$  로 표시된 변수와의 차이로 정의된다.

$$\bar{\sigma}_{ij}^* = \sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}^{\circ} \quad (9)$$

그리고  $\circ$  로 표시된 변수는 다음과 같이 정의된다.

$$\sigma_{ij}^{\circ} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (10)$$

여기서

$$\varepsilon_{ij}^{\circ} = \varphi_{\sigma_{ij}} \quad (11)$$

이며, 우측의 식은 함수  $\varphi$  를 응력텐서  $\sigma_{ij}$  로 편미분한 것임을 나타낸다. 상 첨자 \*로 표현된 변수는 보조변수를 뜻하는데 이것은 다음과 같이 주어진 보조조건의 해이다.

$$\sigma_{ij}^{*I} = -\sigma_{ij}^{\circ}, \quad f_i^{*I} = \varphi_{u_i} \quad (12)$$

여기서 상 첨자  $I$  는 초기응력을 뜻한다. 따라서 식 (6)으로 정의된 함수의 민감도를 구하려면 경

계에서의 기본변수  $u_i$  및 보조변수  $u_i^*$  의 해와 함께 설계속도장  $V_i$  를 구하여 식 (7)에 대입함으로써 민감도를 계산할 수 있다.

### 2.2 등가응력의 민감도해석

Fig. 2와 같이 미소영역  $\Omega_p$  에서 등가응력(Von Mises or effective stress)이 포함된 임의의 범함수를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\Psi = \int_{\Omega_p} \varphi(\sigma_e) dx = \int_{\Omega_p} \sigma_e dx \quad (13)$$

여기서  $\sigma_e$  가 등가응력이며, 2차원 평면응력 문제의 경우

$$\sigma_e = \sqrt{(\sigma_n + \sigma_s)^2 - 3\sigma_n \sigma_s + 3\sigma_n^2} \quad (14)$$

로, 3차원에서는

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) \quad (15)$$

로 주어진다. 이 함수에 대한 민감도를 구하기 위해 보조변수의 해를 구해야 하는데, 이는 식 (14) 또는 식 (15)를 식 (10)에 적용하여  $\sigma_{ij}^*$  를 구하고, 이를 초기응력으로 사용하여 해석함으로써 얻을 수 있다. 이제 미소영역  $\Omega_p$  에서 발생하고 있는 평균등가응력(average of effective stress)을 살펴보자. 평균등가응력은 다음 식으로 정의된다.

$$\bar{\sigma}_e = \frac{\Psi}{W_p} = \frac{1}{W_p} \int_{\Omega_p} \sigma_e dx \quad (16)$$

여기서

$$W_p = \int_{\Omega_p} dx \quad (17)$$

이며, 이것의 민감도는 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{\sigma}_e' = \frac{1}{W_p} \left[ \Psi' + \int_{\Omega_p} \{ \sigma_{e,k} V_k + (\sigma_e - \bar{\sigma}_e) V_{k,k} \} dx \right] \quad (18)$$

여기서  $\Psi'$  는 식 (7)로 주어진 민감도공식인데 적분 속에 있는 항 중에서  $\varphi V_n$  은 제외한 식이다. 이것은 경계적분이므로 경계에서의 속도장만 알고

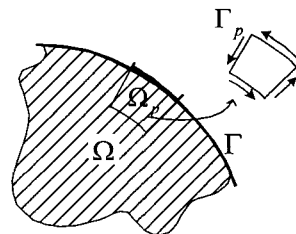


Fig. 2 Small part of the boundary and domain

있으면 된다. 반면에 식 (18)에서 우측 둘째항은  $\Omega_p$ 에서의 영역적분으로 표현되어 있다. 따라서 이를 계산하려면  $\Omega_p$  내에서 속도장을 알아야 하는데 속도장은 단지 경계에서만 주어지 있다. 그러나 Fig. 2에서와 같이  $\Omega_p$ 가 경계에 접하여 있다면, 그리고  $\Omega_p$ 의 크기가 매우 작다면 이 영역내에서의 속도장은 일정하다고 가정할 수 있다. 그리고 이 값은  $\Omega_p$ 가 접하고 있는 경계의 속도장 평균으로 간주할 수 있다. 이러한 방법을 통하여 영역에서의 불필요한 형상변분 계산을 피할 수 있다. 실제 계산에서는 미소영역  $\Omega_p$ 가 하나의 유한 요소에 해당한다.

해석을 위해 상용 유한요소해석 소프트웨어인 ANSYS를 사용하였다. ANSYS는 초기응력을 하중으로 적용해 주는 기능이 있다. 그러나 후처리에 구해지는 응력은 탄성응력(elastic stress)이 아니라 총응력(total stress), 즉  $\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}^e - \sigma_{ij}^0$ 에 해당한다. 이 점은 민감도 계산을 더욱 편리하게 만드는데, 왜냐하면 식 (7)은 이미 총응력으로 표현되어 있기 때문이다.

### 3. 설계속도장의 계산

앞서 살펴본 식 (7)의 민감도공식은 아래와 같은 수학적 기호로 요약하여 표현할 수 있다.

$$\Psi' = \int_{\Gamma} K(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*, \mathbf{V}) ds \quad (19)$$

이것은 민감도 계산을 위해 경계에서의 기본해  $\mathbf{u}$ , 보조해  $\mathbf{u}^*$  및 설계속도장  $\mathbf{v}$ 가 필요하다는 것을 의미한다. 기본해와 보조해는 ANSYS를 이용하여 구할 수 있다. 설계속도장  $\mathbf{v}$ 는 다음과 같은 방법으로 구한다.

형상은 흔히 직선, 호 및 스플라인 등과 같은 기하함수(geometric function)의 조합으로 경계에서 결정된다. 결국, 형상을 결정짓는 것은 기하함수에서 사용하는 유한개의 설계변수이다. 만약 설계변수를  $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ 라 한다면 경계의 형상 즉, 경계에서의 좌표는 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{b}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (20)$$

이때 형상변분과 설계변수는 다음의 관계를 가진다.

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial b_i} \delta b_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{V}'^i \delta b_i \quad (21)$$

이 식에 의하면, 설계속도장  $\mathbf{v}$ 는  $\mathbf{v}'$ 와  $\delta b_i$ 의 조합으로 나타나며, 여기서  $\mathbf{v}'$ 는  $i$ 번째 설계변수의

변분에 의한 경계좌표  $\mathbf{x}$ 의 변화를 뜻한다. 따라서 설계변수 개수가  $n$ 이라 할 때  $\mathbf{v}'$ 는  $n$ 개 존재한다. 이 식을 식 (19)에 적용하면 결국 아래 식이 유도된다.

$$\Psi' = \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma} K(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial b_i}) ds \cdot \delta b_i = \sum_{i=1}^n GRAD_i \cdot \delta b_i \quad (22)$$

여기서  $GRAD_i$ 는 설계변수  $b_i$ 의 경사를 의미하며, 최적화 과정에 사용된다.

설계속도장은 위와 같이 기하함수를 설계변수에 대해 미분함으로써 구할 수 있다. 그러나 이것을 해석적으로 구하는 것은 실제 문제에 적용할 때 매우 불편한데, 그 이유는 기하함수마다 다르게 미분식을 구해야 하기 때문이다. 이러한 문제점으로 인해, 설계속도장 계산에 유한차분의 개념이 도입되었는데 이는 Hardee<sup>(12)</sup> 등에 의해 소개되었으며, 다음의 식으로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{V}'^i(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial b_i} \approx \frac{1}{\Delta b_i} \{ \mathbf{x}(\mathbf{b} + \Delta b_i \mathbf{e}_i) - \mathbf{x}(\mathbf{b}) \} \quad (23)$$

여기서  $\mathbf{e}_i$ 는  $i$ 번째 설계변수의 방향을 나타내는 단위벡터이다. 실제로 위 식은 유한요소모델의 경계에 존재하는 각 절점(node)에서 계산된다. 설계속도장은 단지 경계에서만 생성되기 때문에, 경계 매쉬만으로도 충분히 계산할 수 있으며 속도장 계산 외 다른 어떠한 해석을 수행하는 것도 아니기 때문에 계산 시간도 별로 걸리지 않는다. 이에 비해 영역법은 영역을 구성하고 있는 모든 절점에서 설계속도장을 구하기 위해 경계에서 주어진 속도장을 주어진 변위라 가정하고 가상의 탄성체해석을 추가로 수행하여 영역 내부의 속도장을 구해야 한다.<sup>(9)</sup> 그러나 경계법에서는 이러한 과정이 불필요하다.

### 4. 수치 예제

설계민감도해석으로 구한 민감도의 정확도는 유한차분법을 이용한 민감도와 비교하였다. 유한차분법은 전방차분을 이용하였으며 적용된 차분의 크기는 설계변수의 0.1%이다. 정확도의 척도는 유한차분법으로 구한 민감도와와의 비로 정하였으며 백분율로 표현하였다. 따라서 이것이 100%이면 정확한 민감도로 간주하였다.

#### 4.1 2차원 필렛

Fig. 3과 같이 인장하중을 받는 2차원 필렛문제가 있다. 탄성계수는  $30 \times 10^6$  psi이며, 포아송비는 0.293이다. 설계영역은 두 점 A, B를 잇는 선분으로서 ANSYS에서 제공하는 B-스플라인으로 표현된다. 스플라인 생성에 사용된 점은 Fig. 3의 A, B

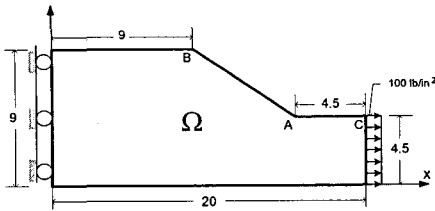


Fig. 3 A fillet problem

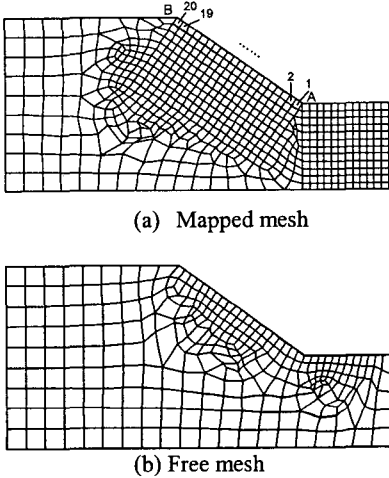


Fig. 4 Finite element model of a fillet problem

Table 1 Sensitivity comparison of domain stress in the fillet problem

ID	Stress at domain elements	FDM	DSA	ratio	DSA (domain velocity)	ratio
1	1.46E+02	6.78E+00	1.15E+01	169.83	6.43E+00	94.84
2	1.18E+02	-1.40E+01	-1.62E+01	115.95	-1.64E+01	117.14
3	9.73E+01	-2.74E+01	-2.72E+01	99.11	-2.71E+01	98.61
4	8.54E+01	-3.18E+01	-3.22E+01	101.46	-3.19E+01	100.55
5	7.65E+01	-3.35E+01	-3.41E+01	101.55	-3.37E+01	100.6
6	6.95E+01	-3.35E+01	-3.39E+01	101.2	-3.36E+01	100.21
7	6.37E+01	-3.25E+01	-3.29E+01	101.18	-3.26E+01	100.18
8	5.87E+01	-3.08E+01	-3.11E+01	101.09	-3.08E+01	100.05
9	5.42E+01	-2.85E+01	-2.88E+01	101.09	-2.85E+01	99.99
10	5.00E+01	-2.58E+01	-2.61E+01	101.1	-2.58E+01	99.91
11	4.61E+01	-2.28E+01	-2.30E+01	101.13	-2.27E+01	99.81
12	4.24E+01	-1.95E+01	-1.97E+01	101.26	-1.94E+01	99.75
13	3.88E+01	-1.60E+01	-1.62E+01	101.35	-1.59E+01	99.53
14	3.53E+01	-1.23E+01	-1.25E+01	101.75	-1.22E+01	99.39
15	3.17E+01	-8.49E+00	-8.71E+00	102.5	-8.42E+00	99.08
16	2.81E+01	-4.67E+00	-4.88E+00	104.58	-4.59E+00	98.3
17	2.43E+01	-9.13E-01	-1.15E+00	125.55	-8.46E-01	92.65
18	2.04E+01	2.63E+00	2.34E+00	89.12	2.65E+00	100.76
19	1.63E+01	5.67E+00	5.21E+00	91.77	5.55E+00	97.89
20	1.21E+01	8.16E+00	7.20E+00	88.18	7.41E+00	90.82

및 (A+B)/2에 위치한 중앙점이며, 이 중앙점의 높이가 설계변수이다. 유한요소모델은 Fig. 4(a)와 같이 맵메쉬를 이용하여 생성하였다. 해석결과 모델

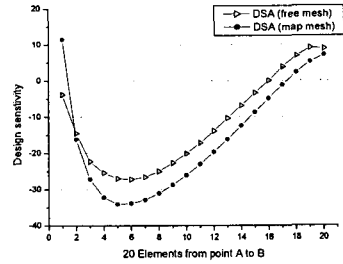


Fig. 5 Comparison of DSA sensitivity by mapped and free mesh model in the fillet problem

은 A에서 응력집중이 발생하였다. 식 (18)을 활용하여 Fig. 4(a)에서 나타낸 1 ~ 20번까지의 요소에 발생하는 평균등가응력(stress at domain elements, MPa)에 대한 민감도를 계산하였으며 이를 Table 1에 나타내었다. 식 (18)에 있는 영역적분 속의 속도장은 앞서 언급한 것처럼 상수로 가정하고 경계에서의 속도 평균을 활용하였다. 유한차분법(FDM)으로 구한 설계민감도를 기준으로 DSA의 설계민감도를 비교한 결과(ratio)가 100% 근방에서 비교적 잘 일치함을 알 수 있다. 한편 이 표에서 우측에 DSA(domain velocity) 열이 추가로 있는데 이것은 영역적분 속에 있는 속도장을 경계면위법을 활용하여 정확하게 구한 것을 반영한 결과이다. 당연히 상수로 가정하여 구한 것 보다 정확도는 더 향상되지만 그 정도가 그리 크지 않으므로 노력에 비해 큰 효과가 없음을 알 수 있다. 따라서 영역의 속도장을 구하는 것은 불필요한 일이다.

이제, 유한요소모델 생성이 더 쉬운 자동메쉬 기능을 사용해 민감도를 계산해 보자. 유한요소모델은 Fig. 4(b)와 같다. 이 경우에는 작은 형상변화에도 메쉬의 형태가 크게 바뀌므로 자동메쉬모델을 가지고 유한차분법에 의해 민감도를 구하게 되면 매우 부정확한 값을 얻는다. 그러므로 DSA와 FDM의 민감도를 비교하지 않고, 앞에서 구한 맵메쉬모델의 민감도 값과 비교하여 Fig. 5에 나타내었다. 그래프의 수평축은 A, B사이의 요소를, 수직축은 응력의 민감도 크기를 나타낸다. DSA를 이용한 민감도는 메쉬 방법에 따라 값의 크기는 차이가 발생하지만 경향은 매우 흡사하게 나타났다. 그러므로 DSA를 이용한 민감도 계산에서 자동메쉬기능을 사용해도 큰 문제가 없음을 알 수 있다.

#### 4.2.3 3차원 필렛

앞 절의 2차원 모델을 x축 기준으로 회전하여 3차원 모델을 생성하였고, 유한요소모델 생성의 편

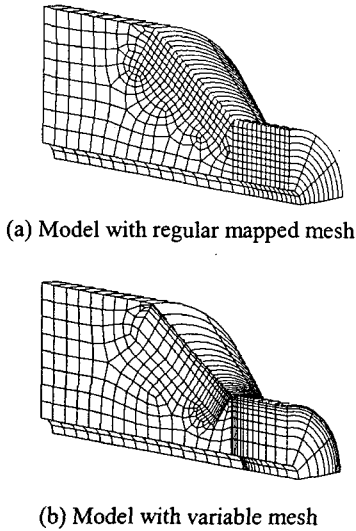


Fig. 6 Quadrant finite element model of 3-D fillet problem: mapped mesh

의를 위해 축을 따라 작은 구멍을 만들었다. Fig. 6은 3차원 필렛문제에 사용된 유한요소모델로써 1/4 모델만을 나타내었다. 재료상수는 4.1절의 2차원 문제와 동일하며 오른쪽 단면에 100 lbf의 전단하중이 아래 방향으로 작용한다. 맵메쉬모델의 민감도 비교 결과를 Table 2에 나타내었다. DSA방법으로 구한 응력의 민감도가 FDM에 근접한 결과를 나타내기는 하지만, 만족할 수준은 아니다. 그래서 Fig. 6(b)와 같이 필렛의 경계를 중심으로 조밀 메쉬를 생성하여 민감도 구했다. 그 결과 Table 3과 같이 정확도가 많이 향상된 것을 볼 수 있었다.

3차원 필렛에도 자동메쉬를 생성하여 민감도를 구해보았다. 이 경우, 필렛 표면의 메쉬 형상은 맵메쉬모델과 동일하다. 그러나 표면을 제외한 부피요소(volume element)들은 Fig. 7(a)처럼 사면체로 구성되어 있다. 민감도 계산의 대상으로 고려한 요소는 Fig. 7(b)와 같다. 먼저 응력을 비교하기 위해 맵메쉬모델의 응력값과 함께 Fig. 8(a)에 나타내었다. 자동메쉬 모델의 응력은 진동하는 경향을 볼 수 있는데 이는 Fig. 7(b)에서 보는 것처럼 각 요소의 형상이 매우 불규칙하기 때문으로 판단된다. 민감도의 경우는 이것이 훨씬 심화되어 Fig. 8(b)에 나타난 것처럼 맵메쉬의 결과와 큰 차이를 보이고 있다. 특히 Fig. 7(b)의 10<sup>th</sup> 및 15~17<sup>th</sup>의 요소들이 다른 요소에 비해 크기가 매우 작거나 찌그러져 있는데, 이러한 사실이 응력 및 민감도에 영향을

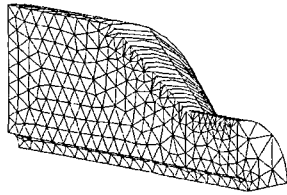
Table 2 Sensitivity comparison of domain stress in the 3-D fillet problem

ID	stress at domain elements	FDM	DSA	Ratio
1	7.40E+00	-5.33E-02	3.62E-02	-67.92
2	6.26E+00	-1.02E+00	-9.40E-01	92.48
3	5.56E+00	-1.53E+00	-1.48E+00	96.66
4	5.05E+00	-1.79E+00	-1.71E+00	95.4
5	4.65E+00	-1.89E+00	-1.83E+00	96.61
6	4.31E+00	-1.90E+00	-1.84E+00	96.44
7	4.02E+00	-1.85E+00	-1.79E+00	96.4
8	3.75E+00	-1.76E+00	-1.70E+00	96.29
9	3.51E+00	-1.64E+00	-1.58E+00	96.15
10	3.28E+00	-1.50E+00	-1.44E+00	96.03
11	3.07E+00	-1.34E+00	-1.28E+00	95.83
12	2.87E+00	-1.16E+00	-1.11E+00	95.66
13	2.68E+00	-9.80E-01	-9.35E-01	95.43
14	2.49E+00	-7.89E-01	-7.51E-01	95.23
15	2.30E+00	-5.93E-01	-5.62E-01	94.84
16	2.12E+00	-3.96E-01	-3.73E-01	94.25
17	1.93E+00	-2.02E-01	-1.89E-01	93.33
18	1.73E+00	-2.20E-02	-1.83E-02	83.49
19	1.53E+00	1.31E-01	1.23E-01	93.89
20	5.86E+00	-6.63E-01	-4.96E-01	74.85

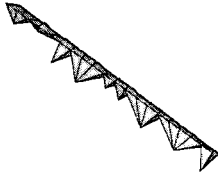
Table 3 Sensitivity comparison of domain stress in the 3-D fillet problem

ID	stress at variable elements	FDM	DSA	ratio
1	1.09E+01	2.09E+00	2.18E+00	104.06
2	9.02E+00	5.67E-01	5.60E-01	98.86
3	7.90E+00	-4.26E-01	-4.33E-01	101.49
4	7.14E+00	-1.04E+00	-9.81E-01	94.6
5	6.58E+00	-1.44E+00	-1.42E+00	99.02
6	6.14E+00	-1.71E+00	-1.69E+00	98.76
7	5.77E+00	-1.92E+00	-1.89E+00	98.94
8	5.43E+00	-2.06E+00	-2.03E+00	98.83
9	5.13E+00	-2.14E+00	-2.12E+00	98.77
10	4.83E+00	-2.18E+00	-2.16E+00	98.7
11	4.55E+00	-2.18E+00	-2.15E+00	98.57
12	4.26E+00	-2.13E+00	-2.09E+00	98.41
13	3.97E+00	-2.02E+00	-1.99E+00	98.3
14	3.68E+00	-1.87E+00	-1.83E+00	98.12
15	3.37E+00	-1.66E+00	-1.62E+00	97.91
16	3.06E+00	-1.39E+00	-1.36E+00	97.68
17	2.73E+00	-1.07E+00	-1.04E+00	97.13
18	2.36E+00	-6.70E-01	-6.46E-01	96.29
19	1.94E+00	-2.12E-01	-2.27E-01	107.02
20	9.31E+00	6.64E-01	9.55E-01	143.83

준 것으로 판단된다. 이 문제를 해결하기 위해 Fig. 9와 같이 크기와 형상이 균일한 개선된 유한요소모델을 생성하여 민감도를 구하였다. 그 결과 Fig. 10과 같이 응력 및 민감도의 정확도가 크게 향상되었다. 따라서 자동메쉬생성 기능을 이용하여 민감도를 계산해도 비교적 정확한 민감도를 얻을 수 있으나, 이 경우 요소의 형상특성이 찌그러지지 않거나 균일한 크기를 갖도록 생성해야 한다. 이런 점을 감안한다 하더라도 이러한 특징은

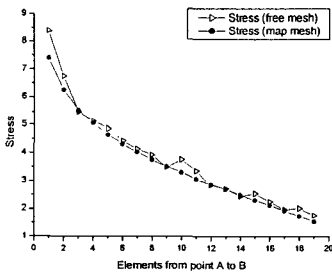


(a) Quadrant mesh model

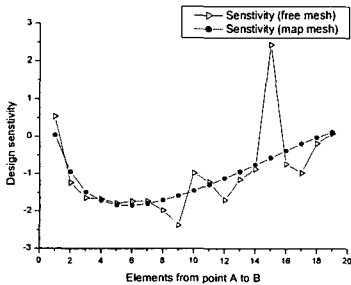


(b) Domain elements for stress under consideration

Fig. 7 Quadrant finite element model of 3-D fillet problem: free mesh



(a) Stress comparison along fillet boundary



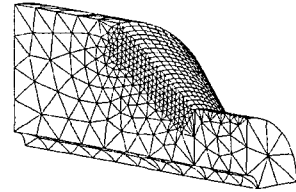
(b) Sensitivity comparison along fillet boundary

Fig. 8 Comparison of results from the mapped and free mesh model in the 3-D fillet problem

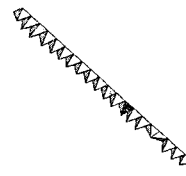
실제 유한요소해석에서 맵메쉬모델 생성에 소비하는 많은 노력과 시간에 비해 훨씬 큰 장점이다.

### 5. 결론

한때 유한요소 해석을 통해 연구되었던<sup>(8,9)</sup> 경계방법에 의한 설계민감도법은 그 당시 경계에서의 해가 정확하지 않아 쓸모 없는 것으로 간주되

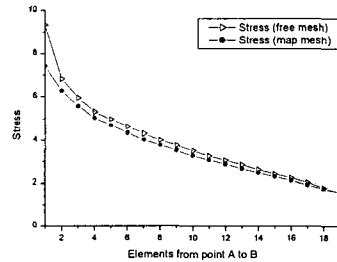


(a) Model with regular mapped mesh

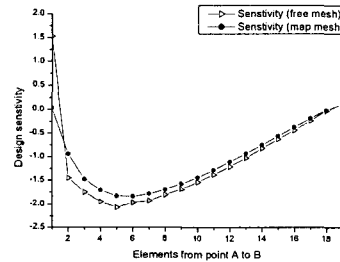


(b) Domain elements for stress under consideration

Fig. 9 Quadrant finite element model of 3-D fillet problem: free mesh with better quality



(a) Stress comparison along fillet boundary



(b) Sensitivity comparison along fillet boundary

Fig. 10 Comparison of results from the mapped and better quality free mesh model in the 3-D fillet problem

었고, 그 이후, 영역방법에 기반한 민감도 해석으로 관심이 옮겨졌다. 그러는 동안 경계방법은 경계요소법을 근간으로 하는 소수 학자들에 의해 독자적으로 연구되어 극히 제한된 분야에서만 성공을 이루었다. 그러나 유한요소법은 메쉬생성 기능, 정확도, 계산 능력 등의 모든 면에서 꾸준히 발전해 왔고, 오늘날에도 해석의 도구로서 여전히 지배적이다. 그리고, 형상설계민감도의 계산에서는

영역 전체를 고려하고 설계속도장을 결정해야 하는 불편함이 있음에도 불구하고 영역적분법이 사용되고 있다. 본 논문에서는 유한요소 해석을 이용하되, 경계 방법에 기반한 설계민감도의 계산이 가능하다는 것을 말하고 있다. 또한 경계방법은 경계적분을 통해 민감도를 구하지만 경계뿐 아니라 영역에서 정의된 성능함수에도 적용될 수 있다. 응용 예로 고려한 펠렛문제에서는 미소영역, 즉 하나의 유한요소를 대상으로 평균등가응력을 고려하였고, 민감도공식은 경계적분으로 계산하였다. 그리고 이를 바탕으로 응력의 민감도를 구한 결과, 영역에서의 속도벡터 없이도 좋은 결과를 구할 수 있었다. 또한, 경계부근의 메쉬가 조밀하면 정확도는 더욱 증가한다는 사실을 알 수 있었다. 한편 자동메쉬모델의 민감도와 맵메쉬모델의 민감도가 비교적 잘 일치하였는데, 이는 민감도 해석에 편리한 자동메쉬가 사용될 수 있다는 것을 뜻한다. 다만 자동메쉬를 사용할 때에는 경계메쉬를 더 조밀하게 하되 메쉬 형상이 찌그러지지 않게 하는 것이 중요하다.

#### 참고문헌

- (1) Haftka, R. T. and Grandhi, R. V., 1986, "Structural shape optimization - a survey," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 57, pp. 91~106.
- (2) Kwak, B. M., 1994, "A Review on Shape Optimal Design and Sensitivity Analysis," *Journal of Structural Mechanics and Earthquake Engineering, JSCE*, Vol. 10, pp. 1595~1745.
- (3) Zolesio, J.P., 1981, "The Material Derivative (or Speed) Method for Shape Optimization," in *Haug EJ and Cea J (eds.), Optimization of Distributed Parameters Structures, Sijthoff-Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands*, pp. 1152~1194.
- (4) Rousselet, B. and Haug E. J., 1981, "Design Sensitivity Analysis of Shape Variation," in *Haug EJ and Cea J, (eds.), Optimization of Distributed Parameter Structures, Sijthoff-Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands*, pp. 1397~1442.
- (5) Choi, K. K. and Haug, E. J., 1983, "Shape Design Sensitivity Analysis of Elastic Structures," *Journal of Structural Mechanics*, Vol. 11, No. 2, pp. 231~269.
- (6) Dems, K. and Mroz, Z., 1984, "Variational Approach by Means of Adjoint Systems to Structural Optimization and Sensitivity Analysis—II," *Structure Shape Variation. International Journal of Solids and Structures*, Vol. 20, No. 6, pp. 527~552.
- (7) Yang, R.J. and Choi, K. K., 1985, "Accuracy of Finite Element Based Shape Design Sensitivity Analysis," *Journal of Structural Mechanics*, Vol. 13, No. 2, pp. 223~239.
- (8) Choi, K. K. and Seong, H. G., 1986, "Domain Method for Shape Design Sensitivity Analysis of Built-up Structures," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 57, No. 1, pp. 1~15.
- (9) Yang, R. J. and Botkin, M. E., 1987, "Accuracy of the Domain Material Derivative Approach to Shape Design Sensitivities," *AIAA Journal*, Vol. 25, No. 12, pp. 1606~1610.
- (10) Yao, T. M. and Choi, K. K., 1989, "3-D Shape Optimal Design and Automatic Finite Element Regriding," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 28, pp. 369~384.
- (11) Chang, K. H., Choi, K. K., Tsai, C. S., Chen, C. J., Choi, B. S. and Yu, X., 1995, "Design Sensitivity Analysis and Optimization Tool (DSO) for Shape Design Applications," *Computing Systems in Engineering*, Vol. 6, No. 2, pp. 151~175.
- (12) Hardee, E., Chang, K. H., Tu, J., Choi, K. K., Grindeanu, I. and Yu, X., 1999, "A CAD-Based Design Parameterization for Shape Optimization of Elastic Solids," *Advances in Engineering Software*, Vol. 30, pp. 185~199.
- (13) Ródenas, J. J., Fuenmayor, F. J. and Tarancón, J. E., 2004, "A Numerical Methodology to Assess the Quality of the Design Velocity Field Computation Methods in Shape Sensitivity Analysis," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 59, pp. 1725~1747.
- (14) Burczynski, T. and Adamczyk, T., 1985, "The Boundary Element Formulation for Multiparameter Structural Shape Optimization," *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 9, No. 3, pp. 195~200.
- (15) Choi, J. H. and Kwak, B. M., 1988, "Boundary Integral Equation Method for Shape Optimization of Elastic Structures," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 26, pp. 1579~1595.
- (16) Park, C. W., Yoo, Y. M. and Kwon K. H., 1989, "Shape Design Sensitivity Analysis of an Axisymmetric Turbine Disk Using the Boundary Element Method," *Computers & Structures*, Vol. 33, No. 1, pp.7~16.
- (17) Méric, R. A., 1995, "Differential and Integral Sensitivity Formulations and Shape Optimization by BEM," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 15, pp. 181~188.
- (18) Repalle, J., Grandhi, R. V. and Choi, J. H., "Boundary Integral Shape Design Sensitivity Analysis of Metal Forming Process - Application to Steady-State Extrusion," Submitted to ...
- (19) Haug, E. J., Choi, K. K. and Komkov, V., 1985, "Design Sensitivity Analysis of Structural Systems," *Academic press*, New York.