

## 비 비례적 감쇠를 갖는 선형 이산 구조동력학 모델에 대한 FFT-활용 스펙트럴해석법

### FFT-based Spectral Analysis Method for Linear Discrete Structural Dynamics Models with Non-Proportional Damping

이우식<sup>†</sup> · 조주용<sup>\*</sup>

U-sik Lee · Joo-yong Cho

#### Abstract

This paper proposes a fast Fourier transform(FFT)-based spectral analysis method(SAM) for the dynamic responses of the linear discrete dynamic models with non-proportional damping. The SAM was developed by using discrete Fourier transform(DFT)-theory. To verify the proposed SAM, a three-DOF system with non-proportional viscous damping is considered as an illustrative example. The present SAM is evaluated by comparing the dynamic responses obtained by SAM with those obtained by Runge-Kutta method.

**Keywords :** Spectral analysis method(스펙트럴해석법), Non-proportional damping(비 비례적 감쇠), Linear discrete structural dynamics model(선형 이산 구조동력학 모델), fast Fourier transforms(고속 푸리에 변환)

#### 1. 서론

건축, 철도, 조선, 항공, 원자력, 해양 등 수많은 공학분야에서 사용되는 다양한 구조물의 동특성을 파악하기 위해서 이들 구조물을 선형화 이산 구조동력학 모델로 나타낸 후 적절한 해석기법을 적용하는 경우가 많다. 이러한 경우 지배방정식은 일반적으로 상미분 행렬방정식으로 표현되며 이를 다루기 위해 일반적으로 Runge-Kutta법과 같은 다양한 직접 적분법이 사용되고 있다. 이러한 직접 적분법은 시간영역에서 수행되는 수치해석법으로서 구조동력학 해석에 가장 널리 사용되고 있으나 다음과 같은 경우에는 직접적인 적용이 어렵다. 즉, 가진력이 너무 복잡하여 수치 적분법을 사용해야 하는 경우, 외력이 아날로그-디지털(A/D) 변환기를 사용하는 계측장비에 의해 디지털 데이터의 형태로 특정되어 제공되는 경우, 재료의 물성치가 주파수의 함수로 제공되어 시간영역(time-domain) 해석이 불가능한 경우, 주파수의 함수인 스펙트럴요소모델(spectral

element model)을 구조모델로서 사용하는 경우[1,2] 등이다. 따라서, 이러한 특별한 경우에는 시간영역 해석법을 대신하여 주파수영역(frequency-domain) 해석법의 하나인 FFT(fast Fourier transform)를 활용하는 스펙트럴해석법(SAM, spectral analysis method)의 사용이 필요하다[3,4].

스펙트럴해석법의 과정은 일반적으로 다음과 같다[1,2]. 먼저 DFT(discrete Fourier transforms) 이론을 이용하여 종속변수를 시간영역에서 주파수영역으로 변환시킴으로써 주어진 미분방정식을 주파수를 매개변수로 하는 대수방정식으로 변환시킨다. 다음으로 이와 같이 유도된 대수방정식을 풀어서 각 이산주파수(discrete frequency)에서의 푸리에 계수(Fourier coefficient)를 구한다. 마지막으로 IDFT(inverse DFT) 알고리즘을 활용하여 시간영역에서의 응답을 계산한다. 스펙트럴해석 과정에서 필요로 하는 DFT 및 IDFT 연산에는 매우 효율적인 컴퓨터 알고리듬인 FFT가 사용된다.

기존의 문헌을 살펴보면 FFT-활용 스펙트럴해석법은 정상상태응답(steady-state response)뿐만 아니라, 초기조건이 모두 영(0)인 경우 가진력에 의한 과도응답(transient response)을 구하는데 이용되어 왔고, 영이 아닌 초기조건을 갖는 경우에도 비례적 감쇠(proportional damping)를 갖는 동력학계에 대해서는 정상상태응답과 과도응답을 구

† 책임저자 : 정회원, 인하대학교 기계공학부  
E-mail : ulee@inha.ac.kr  
TEL : (032)860-7318 FAX : (032)866-1434  
\* 인하대학교 기계공학과 대학원

하기 위한 FFT-활용 스펙트럴해석법이 잘 소개되어 있다 [1,2,4,5]. 그러나, 비 비례적 감쇠(non-proportional damping)를 갖는 동력학계가 영이 아닌 초기조건을 갖는 경우의 과도응답을 구하기 위한 FFT-활용 스펙트럴해석법은 아직 문헌에 소개되지 않고 있다.

따라서, 본 연구에서는 비 비례적 감쇠를 갖는 선형 이산 구조동력학 모델의 정상상태응답과 과도응답을 동시에 구하기 위한 FFT-활용 스펙트럴해석법을 개발하였다. 본 연구에서 개발한 FFT-활용 스펙트럴해석법을 수치해석적으로 검증하기 위해서 비 비례적 점성 감쇠(viscous damping)를 갖는 3자유도계 진동문제를 예제로 다루었다.

## 2. DFT 이론

DFT 이론[3,4]은 FFT-활용 스펙트럴해석법의 유도에 사용되는 핵심이론이므로 여기에 간단히 요약하여 소개한다.

주기가  $T$ 인 함수  $x(t)$ 를 생각하면, 이 주기함수는 다음과 같이 푸리에 급수로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n t}{T} \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{i\omega_n t} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $i = \sqrt{-1}$ 이고,  $\omega_n = n(2\pi/T) = n\omega_1$ 는 이산주파수이며,  $X_n$ 은 푸리에 계수로서 다음과 같다.

$$X_n = a_n - i b_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-i\omega_n t} dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots, \infty) \quad (2)$$

식 (2)는 주기함수  $x(t)$ 에 대한 푸리에 변환을 나타내고 식 (1)은 연속 역푸리에 변환을 나타낸다.

식 (2)의  $x(t)$ 가 연속함수로 주어지지 않고 이산 시간(discrete time)에 측정된 샘플링(sampling) 값들로 주어지는 경우에 식 (2)는 달리 표현되어야 한다.  $N$ 을 샘플링 수(sampling number)라 하면 샘플링 시간 간격은  $\Delta = T/N$ 이고 샘플링 시간은  $t_r = r\Delta$  ( $r = 0, 1, 2, \dots, N-1$ )로 주어진다. 따라서 샘플링 시간  $t_r$ 에 특정된 샘플링 값은  $x_r = x(t_r)$ 에 해당한다. 식 (2)의 적분은 다음과 같은 형태로 근사화하여 표현할 수 있다.

$$X_n = \sum_{r=0}^{N-1} x(t_r) e^{-i\omega_n t_r} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (3)$$

식 (3)은 샘플링 데이터  $\{x_r\}$ 에 대한 DFT를 나타낸다. 식 (1)과 유사하게 샘플링 데이터  $\{x_r\}$ 은 푸리에 계수  $\{X_n\}$ 으로부터 다음과 같이 계산된다.

$$x(t_r) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{i\omega_n t_r} \quad (r = 0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (4)$$

식 (4)는 IDFT를 나타낸다. DFT 이론에 의하면, 비록 식 (3)이 식 (2)에 대한 근사적 표현이지만 식 (3)을 통하여 샘플링 데이터  $\{x_r\}$ 로부터 푸리에 계수  $\{X_n\}$ 을 정확하게 구할 수 있다[3].

푸리에 계수  $X_n$ 은  $X_{N-n} = X_n^*$  ( $n = 0, 1, 2, \dots, N/2$ )와 같이 배열된다. 본 논문에서 기호 (\*)는 공액 복소수(complex conjugate)를 나타낸다. 따라서,  $X_n^*$ 은  $X_n$ 의 공액 복소수이다. 또한  $X_{N/2}$ 는 최대 주파수  $\omega_n = (N/2)\omega_1$ 에 대응하는 푸리에 계수이며 이때의 주파수를 나이퀴스트(Nyquist) 주파수라 한다[3]. 식 (3)과 식(4)의 DFT 및 IDFT 연산은 FFT를 사용함으로써 매우 효율적으로 수행할 수 있다.

## 3. FFT를 활용한 스펙트럴해석법

비 비례적 점성감쇠를 갖는  $m$ -자유도 선형 이산화 구조동력학계의 지배방정식과 초기조건은 다음과 같은 형태로 주어진다.

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) = f(t) \quad (5)$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \quad (6)$$

여기서  $u(t)$ 는 자유도 벡터이고  $f(t)$ 는 외력 벡터이다.  $M$ 은 질량행렬,  $C$ 는 비 비례적 감쇠행렬,  $K$ 는 강성행렬이다. 식 (5)의 일반해는 정상상태응답  $u_p(t)$ 와 과도응답  $u_h(t)$ 의 합으로서 다음과 같이 구할 수 있다.

$$u(t) = u_p(t) + u_h(t) \quad (7)$$

### 3.1. 정상상태응답

DFT 이론을 이용하여 외력 벡터  $f(t)$ 와 정상상태응답  $u_p(t)$ 를 스펙트럴 형태(spectral form)로 나타내면 다음과 같다.

$$f(t_r) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i\omega_n t_r}, \quad u_p(t_r) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} P_n e^{i\omega_n t_r} \quad (8)$$

여기서  $F_n$ 과  $P_n$ 은 각각 외력과 정상상태응답에 대한 푸리에 급수 벡터이다. 식 (8)을 식 (5)에 대입하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$P_n = [K + i\omega_n C - \omega_n^2 M]^{-1} F_n = [D(\omega_n)]^{-1} F_n \quad (9a)$$

$$P_{N-n} = P_n^* \quad (n = 1, 2, \dots, N/2) \quad (9b)$$

여기서  $[D(\omega)]$ 는 동강성행렬(dynamic stiffness matrix)을 나타낸다. 식 (8b)를 시간에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$\dot{u}_p(t_r) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (i\omega_n) P_n e^{i\omega_n t_r} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{P}_n e^{i\omega_n t_r} \quad (10)$$

여기서, DFT 이론에 의해  $\bar{P}_{N-n} = \bar{P}_n^* (n=1, 2, \dots, N/2)$ 이다.

외력 벡터의 스펙트럴 형태  $F_n$ 이 주어지면 식 (9)로부터 푸리에 계수 벡터  $P_n$ 을 구한 후, 시간영역에서의 정상상태 응답은 IFFT를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$u_p(t) \Leftarrow \text{IFFT}\{P_n\} \quad (11)$$

### 3.2. 과도응답

과도응답  $u_h(t)$ 은 다음의 제자방정식(homogeneous equation)으로부터 구한다.

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) = 0 \quad (12)$$

식 (12)의 해  $u_h(t)$ 를 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$u_h(t) = A e^{\lambda t} \quad \text{또는} \quad u_{hk}(t) = a_k e^{\lambda t} \quad (13)$$

식 (13)을 식 (12)에 대입하여 정리하면 다음의 고유치 문제를 얻을 수 있다.

$$(\lambda^2 M + \lambda C + K)A = 0 \quad (14)$$

식 (14)이 비 자명해(non-trivial solution)를 갖기 위해서는 다음 조건 식을 만족해야 한다.

$$\det(\lambda^2 M + \lambda C + K)A = 0 \quad (15)$$

식 (15)은 특성방정식으로서  $m$ -자유도계의 경우  $\lambda$ 에 대한  $2m$ 차 대수방정식이다. 따라서, 식 (15)은  $m$ 개의 공액 복소수 근을 갖는다. 즉,

$$\lambda_j, \lambda_j^* \quad (j=1, 2, \dots, m) \quad (16)$$

비례적 감쇠를 갖는 선형 이산계의 경우와 달리 비 비례적 감쇠를 갖는 선형 이산계의 경우에는 정규모드(normal mode)의 직교성을 이용하여 식 (12)를 비 연성화(decoupling) 할 수 없다. 식 (14)를 일반적인 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} m_{11} \lambda^2 + c_{11} \lambda + k_{11} & \cdots & m_{1m} \lambda^2 + c_{1m} \lambda + k_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{m1} \lambda^2 + c_{m1} \lambda + k_{m1} & \cdots & m_{mm} \lambda^2 + c_{mm} \lambda + k_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (17)$$

여기서,  $m_{ij}$ ,  $c_{ij}$ ,  $k_{ij}$ 는 각각  $M$ ,  $C$ ,  $K$ 의 성분을 나타낸다. 식 (17)에  $j$ -번째 고유치  $\lambda = \lambda_j$ 를 대입하면  $j$ -번째 고유벡터의 성분  $a_k$  사이의 비를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{a_1}{C_{j1}} = \frac{a_2}{C_{j2}} = \cdots = \frac{a_m}{C_{jm}} = z_j \quad (18)$$

여기서  $C_{jk}$ 는 식 (15)의 행렬식에서  $j$ -번째 행에 대한 여인자 (cofactor)를 나타내고  $z_j$ 는 임의의 복소수이다. 따라서  $j$ -번째 과도응답 진동모드의  $k$ -번째 성분은 다음과 같이 주어진다[6].

$$u_k^j = a_k e^{\lambda_j t} = z_j C_{jk} e^{\lambda_j t} \quad (19)$$

식 (19)를 중첩하면 과도응답의  $k$ -번째 성분은 다음과 같이 유도된다.

$$u_{hk}(t) = \sum_{j=1}^{2m} b_j u_k^j = \sum_{j=1}^{2m} b_j z_j C_{jk} e^{\lambda_j t} = \sum_{j=1}^m B_j C_{jk} e^{\lambda_j t} + \sum_{j=1}^m B_j^* C_{jk}^* e^{\lambda_j^* t} \quad (20a)$$

$$\dot{u}_{hk} = \sum_{j=1}^m B_j C_{jk} \lambda_j e^{\lambda_j t} + \sum_{j=1}^m B_j^* C_{jk}^* \lambda_j^* e^{\lambda_j^* t} \quad (20b)$$

여기서, 상수  $B_j$ 와  $B_j^*$ 는 초기조건으로부터 결정된다.

DFT 이론을 이용하여  $u_{hk}(t)$ 와  $\dot{u}_{hk}(t)$ 을 다음과 같이 스펙트럴 형태로 나타낼 수 있다.

$$u_{hk}(t_r) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H_{kn} e^{i\omega_n t_r}, \quad \dot{u}_{hk}(t_r) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{H}_{kn} e^{i\omega_n t_r} \quad (21)$$

또한, DFT 이론으로부터 푸리에 계수  $H_{kn}$ 와  $\bar{H}_{kn}$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$H_{kn} = \sum_{r=0}^{N-1} u_{hk}(t_r) e^{-i\omega_n t_r}, \quad \bar{H}_{kn} = \sum_{r=0}^{N-1} \dot{u}_{hk}(t_r) e^{-i\omega_n t_r} \quad (22)$$

식 (20)을 식 (22)에 대입하면 다음과 같다.

$$H_{kn} = \sum_{j=1}^m [B_j X_{jkn} + B_j^* X_{jkn}] \quad (23a)$$

$$\bar{H}_{kn} = \sum_{j=1}^m [B_j \lambda_j X_{jkn} + B_j^* \lambda_j^* X_{jkn}] \quad (23b)$$

여기서,

$$\begin{aligned} X_{jkn} &= C_{jk} \frac{1 - e^{(\lambda_j - i\omega_n)\Delta N}}{1 - e^{(\lambda_j - i\omega_n)\Delta}} \\ X_{jkn} &= \bar{C}_{jk} \frac{1 - e^{(\lambda_j^* - i\omega_n)\Delta N}}{1 - e^{(\lambda_j^* - i\omega_n)\Delta}} \end{aligned} \quad (24)$$

식 (23)을 식 (21)에 대입하고 정리하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$u_h(t_r) = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} H_n e^{i\omega_n t_r} \quad (25a)$$

$$\dot{u}_h(t_r) = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} \bar{H}_n e^{i\omega_n t_r} \quad (25b)$$

식 (7)의 일반해를 식 (6)과 같이 표현된 초기조건에 대입하면 다음과 같다.

$$u_0 = u_p(0) + u_h(0) \quad (26a)$$

$$\dot{u}_0 = \dot{u}_p(0) + \dot{u}_h(0) \quad (26b)$$

식 (8b), (10), (25)를 식 (26)에 대입하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$u_0 = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} (P_n + H_n) \quad (27a)$$

$$\dot{u}_0 = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} (\bar{P}_n + \bar{H}_n) \quad (27b)$$

식 (23)에서  $H_{kn}$ 와  $\bar{H}_{kn}$ ( $k = 1, 2, \dots, m$ )을 자유도에 대하여 벡터 형태로 간단히 표현하면 다음과 같다.

$$H_n = X_n B + Y_n B^* \quad (28a)$$

$$\bar{H}_n = X_n \bar{A} B + Y_n \bar{A}^* B^* \quad (28b)$$

여기서

$$X_n = \begin{Bmatrix} X_{11n} & \cdots & X_{mn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{1mn} & \cdots & X_{mmn} \end{Bmatrix}, Y_n = \begin{Bmatrix} Y_{11n} & \cdots & Y_{mn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{1mn} & \cdots & Y_{mmn} \end{Bmatrix} \quad (29)$$

$$B = \{B_1 \ B_2 \ \cdots \ B_m\}^T$$

$$B^* = \{B_1^* \ B_2^* \ \cdots \ B_m^*\}^T$$

$$\Lambda = diag\{\lambda_1 \ \lambda_2 \ \cdots \ \lambda_m\}$$

$$\Lambda^* = diag\{\lambda_1^* \ \lambda_2^* \ \cdots \ \lambda_m^*\} \quad (30)$$

식 (28)를 식 (27)에 대입하면 다음 식이 유도된다.

$$\bar{X}B + \bar{Y}B^* = d, \quad \tilde{X}B + \tilde{Y}B^* = v \quad (31a)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \sum_{n=0}^{N-1} X_n, & \bar{Y} &= \sum_{n=0}^{N-1} Y_n \\ \tilde{X} &= \bar{X}\Lambda, & \tilde{Y} &= \bar{Y}\Lambda^* \\ d &= N u_0 - \sum_{n=0}^{N-1} P_n, & v &= N \dot{u}_0 - \sum_{n=0}^{N-1} \bar{P}_n \end{aligned} \quad (32)$$

식 (31)을 상수 벡터  $B$ 와  $B^*$ 에 관하여 풀면 그 결과는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} B &= (\tilde{X} - \tilde{Y}\bar{Y}^{-1}\bar{X})^{-1}(v - \tilde{Y}\bar{Y}^{-1}d) \\ B^* &= \bar{Y}^{-1}(d - \bar{X}B) \end{aligned} \quad (33)$$

식 (33)으로부터 초기조건을 이용하여  $B$ 와  $B^*$ 를 구한 후, 식 (28)을 이용하여  $H_n$ 을 구하고, 이로부터 다음과 같이 IFFT를 사용하여  $u_h(t)$ 를 구할 수 있다.

$$u_h(t) \leftarrow IFFT\{H_n\} \quad (34)$$

식 (34)와 식 (11)을 이용하여 시스템의 초기조건을 고려한 동적응답을 식 (7)과 같이 구할 수 있다.

#### 4. 수치예제 및 검토

본 연구에서 유도된 FFT-활용 스펙트럴해석법을 검증하기 위해 두 가지 3자유도 진동계를 예제로 다루었다. 첫 번째는 모드 해석법(modal analysis method)으로 염밀해를 쉽게 구할 수 있는 비례적 감쇠를 갖는 진동계이고, 두 번째는 비 비례적 감쇠를 갖는 진동계이다.

##### (a) 비례적 감쇠의 경우

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3c & -2c & 0 \\ -2c & 3c & -c \\ 0 & -c & 3c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3k & -2k & 0 \\ -2k & 3k & -k \\ 0 & -k & 3k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (35)$$

## (b) 비 비례적 감쇠의 경우

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3c & -2c & 2c \\ -2c & 3c & -c \\ 2c & -c & 3c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f(t) \end{Bmatrix} \quad (36)$$

식 (35)과 식 (36)에서  $m=10\text{kg}$ ,  $c=40\text{Ns/m}$ ,  $k=1000\text{N/m}$ 이고  $f(t)=4-4s(t-1.2)\text{ N}$ 이며  $s(t)$ 는 단위 계단함수(unit step function)이다. 진동계의 초기 조건은 다음과 같이 가정하였다.

$$\begin{Bmatrix} u_1, u_2, u_3 \end{Bmatrix} = \{1, 0, 0\}(\text{mm})$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{u}_3 \end{Bmatrix} = \{0, 1, 0\}(\text{mm/s}) \quad (37)$$

Fig. 1은 비례적 감쇠를 갖는 진동계에 대하여 본 연구의 스펙트럴해석법을 이용하여 얻은 동적응답을 모드해석법으로 이론적으로 구한 염밀해와 Runge-Kutta를 이용하여 얻은 수치해석 결과를 비교하여 보여주고 있다. 염밀해를 기

준으로 하여 시간평균 오차가 0.1% 이내로 수렴하도록 하기 위하여 스펙트럴해석법의 경우 주기  $T=4.8(\text{s})$ , 샘플링 수  $N=4096$ 로 하였으며, Runge-Kutta의 경우 시간 증분(time increment)  $\Delta t=0.00234(\text{s})$ 를 사용하였다. Fig. 1로부터 본 연구의 스펙트럴해석법으로 구한 결과가 염밀해와 Runge-Kutta로 구한 해와 거의 일치함을 확인할 수 있다.

Fig. 2은 비 비례적 감쇠를 갖는 진동계의 경우에 대해 본 연구의 스펙트럴해석법과 Runge-Kutta를 이용하여 구한 동적응답을 비교한 것이다. 본 연구의 스펙트럴해석법이 Runge-Kutta와 거의 동일한 수준의 해석 결과를 제공함을 알 수 있다.

Fig. 3은 비 비례적 감쇠를 진동계의 경우, 샘플 수  $N$ 을 증가시키면서 구한 스펙트럴해석법의 결과가 Runge-Kutta를 이용하여 충분히 정확하게 구한 결과를 기준으로 하여 어느 정도의 오차를 갖는지를 보여준다. 주기를  $T=4.8(\text{s})$ 로 고정했을 때 샘플 수  $N$ 이 증가함에 따라 해석 결과의 정확성이 향상함을 알 수 있다.

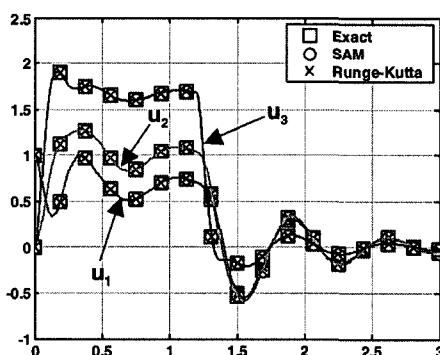


Fig. 1. Comparison of the dynamic responses of the vibration system with proportional viscous damping obtained by the present SAM, the modal analysis method (exact) and the Runge-Kutta method

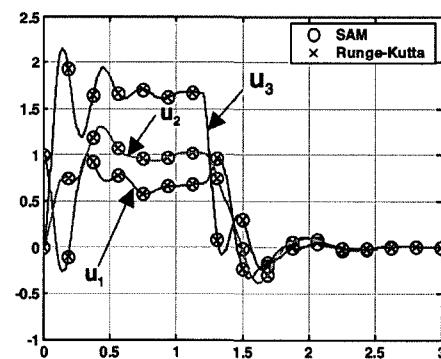


Fig. 2. Comparison of the dynamic responses of the vibration system with non-proportional viscous damping obtained by the present SAM and the Runge-Kutta method

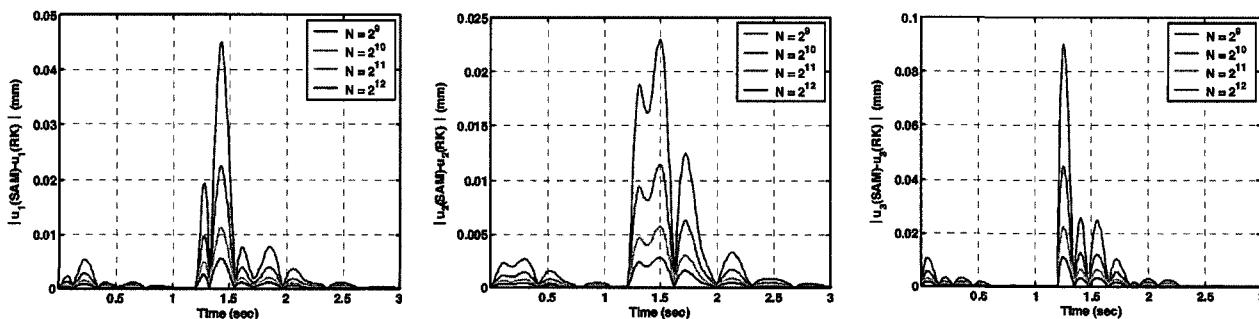


Fig. 3. Convergence of the dynamic response of the vibration system with non-proportional viscous damping obtained by the present SAM as the sampling number  $N$  is increased

## 5. 결론

본 연구에서는 선형 이산계의 동적응답을 구하기 위한 FFT-활용 스펙트럴해석법을 소개하였다. 본 연구의 FFT-활용 스펙트럴해석법은 선형 이산계가 비 비례적 감쇠를 갖는 경우, 그리고 영이 아 닌 초기조건을 갖는 경우의 과도응답을 구하는데 적용할 수 있다. 본 연구의 FFT-활용 스펙트럴해석법을 평가하기 위하여 비 비례적 점성감쇠를 갖는 3자유도 진동계를 예제로 다루었다. 그 결과, 본 연구의 FFT-활용 스펙트럴 해석법이 FFT조건을 잘 선택함으로써 염밀해나 Runge-Kutta법으로 구한 수치해석 결과와 거의 동일한 수준의 해석 결과를 제공함을 확인하였다.

## 후기

이 논문은 2004년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음(KRF-2004-041-D00034).

## 참고문헌

1. Doyle, J. F. (1997) *Wave Propagation in Structures, Spectral Analysis Using Fast Discrete Fourier Transforms*, 2nd, Springer, New York.
2. Lee, U., Kim, J. and Leung, A.Y. T. (2000) The Spectral Element Method in Structural Dynamics, *The Shock and Vibration Digest*, vol.32, No.6, pp.451-465.
3. Newland, D. E. (1993) *Random Vibrations, Spectral and Wavelet Analysis*, 3rd, Longman, New York.
4. Ginsberg, J. H. (2001) *Mechanical and Structural Vibrations, Theory and Applications*, John Wiley & Sons, New York.
5. Lee, U. and Kim, S. (2005) Dynamic Analysis of the Linear Discrete Dynamic Systems Subjected to the Initial Conditions by Using an FFT-based Spectral Analysis Method, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.288, No.1-2, pp.293-306.
6. Sun, C. T. and Bai, M. J. (1995) Vibration of Multi-Degree -of-Freedom Systems with Non-Proportional Viscous Damping, *International Journal of Mechanical Sciences*, 37(4), pp.441-455.