한국수학사학회지 제19권 제1호(2006년 2월), 65-78

굴절의 법칙의 수학적 증명과 그 교수학적 의의

공주교육대학교 수학교육과 강흥규
unitolpes@hanmail.net

물리학에서 Snell의 법칙으로 불리는 굴절의 법칙은 수학사적으로 매우 중요한 의미를 가진다. Snell이 많은 관찰 자료를 바탕으로 굴절의 법칙 $\frac{v_1}{\sin\theta_1}=\frac{v_2}{\sin\theta_2}$를 발견한 이후 많은 수학자들은 '최소 시간의 원리'를 사용하여 이 식을 수학적으로 증명하려 시도하였으며 이러한 노력은 미분의 발명을 촉진한 주요한 동력 중의 하나였다. Fermat는 자신만의 방법을 개발하여 이 문제를 최초로 해결하였으며, 이때 Fermat가 사용한 극대·극소 방법은 현대의 미분을 통한 방법과 유사한 것으로 이후 Leibniz의 무한소 방법의 기원이 되었다. 역사적으로 수학과 물리학은 밀접하게 상호작용하면서 과학의 발전을 이끌었다. 굴절의 법칙은 이러한 수학과 물리학의 관계를 잘 보여준다. 물리학은 수학에 질문을 제기하고 수학은 보편적인 원리로 그것을 해결함으로써 처음의 현상보다 더 넓은 현상까지 포괄적으로 설명한다. 수학교육의 목적은 완성된 수학을 배우는 것뿐만 아니라 수학을 응용할 줄 아는 능력이라는 Freudenthal의 말을 생각할 때, 굴절의 법칙은 고등학교의 우수한 학생이나 대학의 수학 교육과정에 적합한 소재이다. 대학의 수학이나 물리학 전공과정에서는, 미분을 통한 현대적인 방법뿐만 아니라 Fermat의 방법(미분을 명시적으로 사용하지는 않았지만 원시적인 미분의 방법을 쓰고 있는)을 동시에 다루면서 양자를 비교하는 기회를 가지는 것은 교육적으로 가치 있는 일이라 생각된다.

주제어 : 굴절의 법칙, 최소시간의 원리, 수학의 응용, Snell, Fermat, Freudenthal

0. 서론

빛은 광학적 밀도가 서로 다른 두 매질의 경계선을 지날 때 굴절한다. 예를 들어 빛은 물속에서 밖으로 나오면서 꺾이게 되는데, 그로 인하여 물속에 있는 물체는 실제보다 더 수면 가까이에 있는 것처럼 보이게 된다. 빛의 경로가 이렇게 꺾이는 이유는 물과 공기에서의 빛의 속도가 서로 다르기 때문이다. 그 속도를 각각 v_1, v_2라고

하고 입사각과 굴절각을 각각 θ_1, θ_2라고 한다면, 빛의 굴절 정도는 공식 $\frac{v_1}{\sin\theta_1} = \frac{v_2}{\sin\theta_2}$를 따르며, 이것을 굴절의 법칙 혹은 Snell(1591-1626)의 법칙이라고 부른다.

빛의 경로가 꺾이는 것은 그렇다 치더라도 그것이 왜 하필 사인 함수를 따르는지는 놀라운 일이다. 이것은 자연 법칙이 수학으로 기술될 수 있으며 신은 수학을 통해 자연을 설계했다는 주장을 수긍할 수 있게 해주는 단순하면서도 인상적인 사례가 아닐 수 없다. 굴절의 법칙 $\frac{v_1}{\sin\theta_1} = \frac{v_2}{\sin\theta_2}$는 실험으로도 확인할 수 있지만 순수 수학적으로도 다양하게 증명될 수 있는데, 이것 또한 순수한 수학적인 논증의 세계와 자연의 세계가 서로 부합한다는 믿음을 뒷받침하는 사례이다. 특히 굴절의 법칙 $\frac{v_1}{\sin\theta_1} = \frac{v_2}{\sin\theta_2}$은 형식적으로는 사인법칙 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$과 유사한데, 얼핏 보기에는 v_1, v_2는 속력이고 a, b는 변의 길이이므로 공통의 의미가 없는 것처럼 보여 그 유사성이 우연한 결과인 것으로 단정하기 쉽다. 곧 이어서 다루겠지만, 그 유사성은 매우 본질적인 것이다.

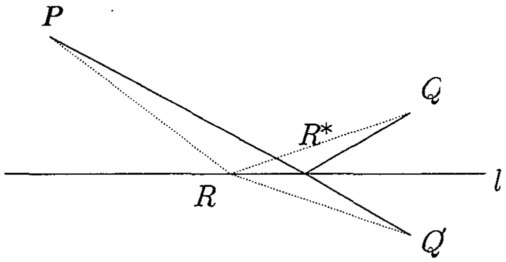
굴절의 법칙을 수학적으로 최초로 증명한 사람은 Fermat(1601~1665)로서, 그는 '최소의 원리(minimum principle)'를 이용하였다. 최소의 원리는 많은 자연 현상을 설명하는 수학의 중요한 원리로서, 굴절의 법칙은 그 중의 한 사례이다. 이 논문에서는 최소 원리를 통한 굴절의 법칙에 대한 수학적 증명의 역사와 다양한 증명을 고찰하고, 그것이 가지는 수학 교수학적 의의를 도출하고자 한다.

1. 굴절의 법칙의 역사적 발달

최대·최소의 원리에 의해서 수학과 물리학은 통합을 이루지만, 역사상 최초의 것이면서 가장 단순하고 가장 인상적인 통합이 바로 빛의 반사 현상과 최소의 원리의 결합이다[10, p.145]. 빛의 반사 현상은 거울에 비추인 빛은 입사각과 반사각이 같게 되도록 반사된다는 것으로서, 경험적으로는 오래전부터 인정되던 것이었는데, 알렉산드리아의 Heron(130?~75?)이 최소의 원리에 의해서 수학적으로 처음 증명하였다([5, p.331]). Heron은 보다 구체화된 최소의 원리, 즉 빛은 두 지점 사이를 진행할 때 가장 짧은 경로로 진행한다는 '최단 거리의 원리'를 사용하였다. 이 원리는 흔히 'Heron의 원리'라고 불리는데 이것을 사용해서 빛의 반사의 법칙을 수학적으로 재진술하면 다음과 같다.

◆ 반사의 법칙

점 P 에서 l축을 거쳐 점 Q에 도착하는 최단 경로는 입사각과 반사각이 같은 경로이다.



<그림 1>

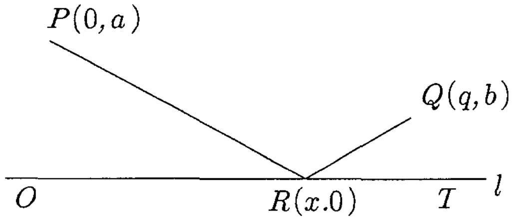
(증명) 입사각과 반사각이 같게 되는 점을 R^*라고 하고, Q'은 l축에 대한 Q의 대칭점이라고 하자. 그러면 P, R^*, Q' 은 한 직선 위에 있게 된다.

R은 x축 위의 R^*와는 다른 점이라고 하면

$$PR^* + R^*Q = PR^* + R^*Q' = PQ' < PR + RQ' = PR + RQ.$$

따라서 $PR^* + R^*Q$은 P에서 l축을 거쳐 점 Q에 도착하는 최단경로이다([5, p.331]). ■

헤론의 정리는 다음과 같이 부등식을 이용하여 대수적으로 증명될 수도 있다([3, p.84]).



<그림 2>

좌표를 $P(0,a), Q(q,b), R(x,0)$라고 하자. 그러면

$PR + RQ = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (q-x)^2}$이 최소가 되도록 r을 정하면 된다.

삼각부등식에 의해서,

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{b^2+(q-x)^2} &\geq \sqrt{(a+b)^2 + (x+q-x)^2} \\ &= \sqrt{(a+b)^2 + q^2}\end{aligned}$$

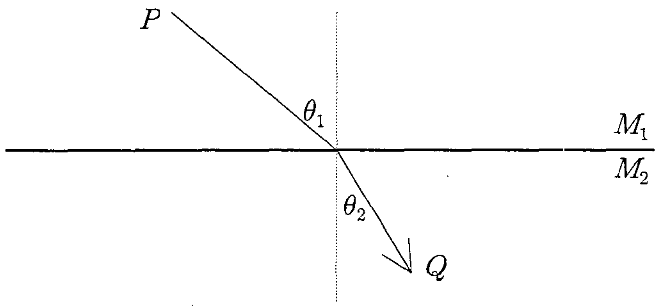
등호가 성립할 때 최소값은 $\sqrt{(a+b)^2+q^2}$이 된다. 등호가 성립할 필요충분 조건은 (a,x)과 $(b,q-x)$이 한 직선 위에 있는 것이다. 즉 $\frac{a}{x} = \frac{b}{q-x} > 0$이다.

이것은 각 PRO와 각 QRT가 같다는 것, 즉 입사각과 반사각이 같다는 것이다. ■

빛의 반사와 굴절은 유사한 현상처럼 보이지만 사실은 매우 다르다. 반사 현상은 빛이 경계선에 부딪히고 반사하여 동일한 매질 속을 진행하는 것이고, 굴절 현상은 경계선을 통과하여 다른 매질 속으로 진행하는 것이다. 반사 현상을 설명했던 헤론의 정리가 굴절 현상에도 똑같이 적용된다고 한다면 입사각과 굴절각은 같아져야만 한다. 그러나 사실은 그렇지 않다. 입사각과 굴절각의 관계는 다음과 같이 주어진다.

◆ 굴절의 법칙

빛이 매질 M_1에서부터 경계선을 지나 매질 M_2로 진행한다. 매질 M_1에서의 빛의 속력은 v_1이고 매질 M_2에서의 빛의 속력은 v_2라 하면 입사각과 굴절각은 식 $\frac{v_1}{\sin\theta_1} = \frac{v_2}{\sin\theta_2}$을 성립시킨다.



<그림 3>

역사적으로 빛의 굴절은 설명하기 매우 어려운 현상으로서 Kepler를 포함한 많은 대가들의 시도를 좌절시켰다. Snell은 수많은 관찰 자료를 바탕으로 하여 1621년에 최초로 굴절의 법칙을 발견하였으며, 이로 인하여 그것을 Snell의 법칙이라고 부르게 되었다. 최초의 출판은 Descartes에 의해서 1637년에 이루어졌으며, 최초의 수학적인 증명은 Fermat에 의해서 1661년에 이루어졌다([8. p.1224]). Fermat는 최초로 굴절의 법칙을 증명하는데 있어서, 그 자신만의 독특한 방법을 개발하여 증명하였는데, 이 방법은 훗날 미분의 발명으로 이어지는 방법이다. 널리 알려져 있지 않지만 수학사에서 Fermat의 성공을 포함하여 굴절의 법칙을 수학적으로 증명하려 했던 모든 시도는 미적분학의 발달을 촉진한 주요 동력 중의 하나였다([8. p.1225]).

굴절 현상은 반사 현상과 비슷한 자연현상으로서 동일한 법칙의 지배를 받을 것으로 생각하기 쉽지만, 따져보면 큰 차이가 있다. 입사각과 반사각은 같았지만 입사각과 굴절각은 같지 않았다. 더구나 특이한 것은 Heron이 반사의 법칙을 수학적으로 증명할 때 사용했던 Heron의 원리, 즉 최단 거리의 원리와도 부합되지 않는다는 점이다.

최단거리의 원리에 의한다면 빛은 P와 Q 사이의 가장 가까운 거리 즉 직선 PQ를 따라가야 할 텐데, 그보다는 꺾인 직선 모양의 에움길을 택하기 때문이다. 굴절 현상을 수학적으로 증명하기 위해서는 새로운 원리가 필요했다. Fermat는 '최소시간의 원리(least time principle)'이라는 새로운 유형의 최소 원리를 착안하고 이를 토대로 수학사상 최초로 굴절의 법칙을 증명했다([10, p.149]). 이 원리는 흔히 'Fermat의 원리' 라고 불리며 그 내용은 "빛은 시간이 가장 적게 걸리는 경로를 택하여 진행한다"는 것이다. 빛이 하나의 매질이 아니라 광학적 밀도가 서로 다른 두 매질 안을 진행할 때 적용될 수 있다.

이 원리의 중요성은 그것이 Heron의 원리를 일반화시킨 것이라는 점이다. 속력이 다른 두 매질이 아니라 한 매질 안에서만 생각을 한다면, 그 매질 안에서의 빛의 속력은 일정하므로 '최소 시간의 원리'는 '최단 거리의 원리'와 일치하게 된다. 결국 Fermat는 1600년 전에 Heron의 원리를 확장시킨 새로운 원리를 만들어, 전혀 다른 현상인 것처럼 보였던 빛의 반사와 굴절 현상을 통합적으로 설명한 셈이다. 최소 시간의 원리라는 단순한 수학적 원리에 의해서 여러 자연 현상이 하나가 된 것이다([10, p.145]).

2. 굴절의 법칙의 수학적인 여러 증명

이 장에서는 굴절의 법칙에 대한 다양한 수학적 증명을 고찰한다. 먼저 굴절의 법칙을 수학적으로 명료하게 진술하면 다음과 같다.

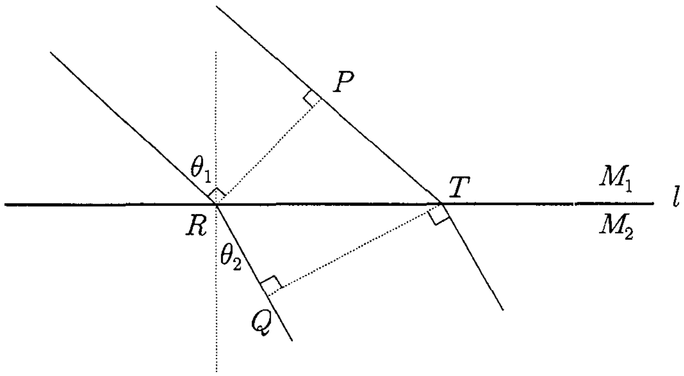
평면이 직선 l에 의해서 M_1과 M_2의 두 부분으로 나뉜다. M_1 안의 점 P에서 직선 l을 지나서 M_2 안의 점 Q까지 가려고 한다. M_1에서는 속력 v_1으로, M_2에서는 속력 v_2로 진행한다. 최소의 시간이 걸리는 경로는 식 $\frac{v_1}{\sin\theta_1} = \frac{v_2}{\sin\theta_2}$을 성립시킨다.

앞서 말했듯이 굴절의 법칙을 수학적으로 최초로 증명한 사람은 Fermat인데, 그는 그 자신만의 독특한 방법, 이른바 극대·극소의 방법을 통해서 굴절의 법칙을 증명하였다. Fermat의 극대·극소 방법은 기하학적이기보다는 대수적인 것이었다. 그 방법은 비록 극한 개념을 사용하지는 않았지만 현대의 미분과 유사한 것으로서 Leibniz의 무한소 방법의 근원이 되었다([8, p.1225]; [11, p.84]).[1] 매우 길고 복잡한 Fermat의 증명을 현대적으로 비교적 간단하게 개조한 증명은 [8, p.1225]과 [11, p.82-84]에 제시되어 있다.

먼저 가장 평이한 증명으로서 현재 우리나라 고등학교 물리 교과서에 제시된 증명부터 살펴보자.

1) 이런 점에서 Laplace는 Fermat가 미분의 발견자라고 칭송한다([4, p.567]).

2.1. 사인법칙을 이용한 직관적인 증명([2, p.163]).

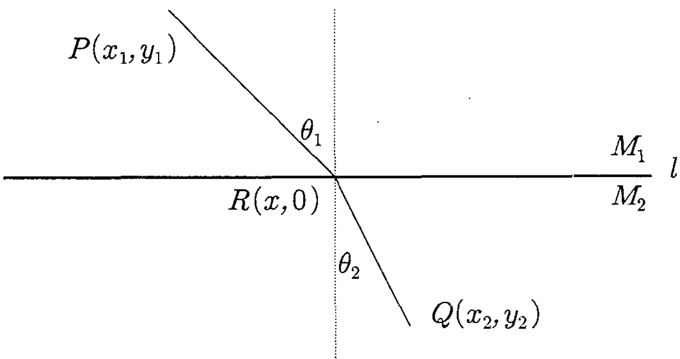


<그림 4>

입사각이 θ_1이고 굴절각이 θ_2라 하자. 선분 RP는 매질 M_1에서의 파동의 전면이고 선분 QT는 매질 M_2에서의 파동의 전면이라고 하자. 빛이 PT를 진행하는데 걸리는 시간과 RQ를 진행하는데 걸리는 시간은 같아야만 한다. 그 시간을 t라고 하면 $PT=tv_1$이고 $RQ=tv_2$이다. 직각 삼각형 RTP와 RTQ에 사인법칙을 적용하면 $\dfrac{PT}{sin\theta_1}=\dfrac{RQ}{sin\theta_2}=RT$이다. 따라서 $\dfrac{v_1}{\sin\theta_1}=\dfrac{v_2}{\sin\theta_2}$이다. ■

위의 증명은 굴절의 법칙 $\dfrac{v_1}{\sin\theta_1}=\dfrac{v_2}{\sin\theta_2}$과 사인법칙 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$과의 유사성이 형식적인 차원에만 그치는 것이 아님을 보여준다. 또한 위 증명의 특징은 그 과정에서 Fermat의 원리가 사용되지 않는다는 점이다. 다음에 제시될 모든 증명은 Fermat의 원리에 근거하는 엄격한 수학적 증명들이다.

2.2. 미분을 이용한 증명



<그림 5>

P, Q, R의 좌표를 (x_1, y_1), (x_2, y_2), $(x, 0)$이라 하자. 단, $x_1 < x < x_2$, $y_1 > 0$, $y_2 < 0$이다. 문제는

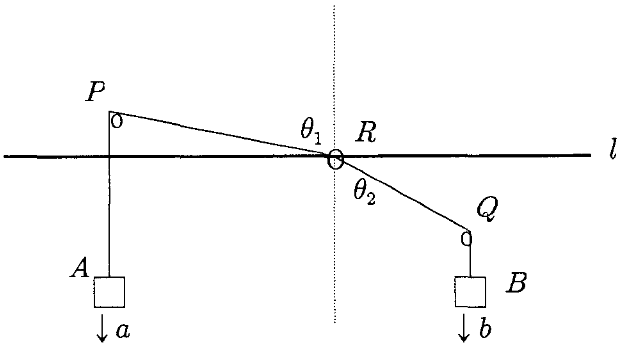
$t(x) = \dfrac{\sqrt{(x-x_1)^2+y_1^2}}{v_1} + \dfrac{\sqrt{(x_2-x)^2+y_2^2}}{v_2}$가 최소가 될 때의 x의 위치를 찾는 것이다.

$$t'(x) = \frac{1}{v_1}\left(\frac{x-x_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+y_1^2}}\right) - \frac{1}{v_2}\left(\frac{x_2-x}{\sqrt{(x_2-x)^2+y_2^2}}\right) = 0\text{으로부터}$$

$$\frac{1}{v_1}\left(\frac{x-x_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+y_1^2}}\right) = \frac{1}{v_2}\left(\frac{x_2-x}{\sqrt{(x_2-x)^2+y_2^2}}\right).\ \text{즉}\ \frac{sin\theta_1}{v_1} = \frac{sin\theta_2}{v_2}\text{이다.}$$

따라서 $t'(x) = 0$이 되는 x의 위치는 $\dfrac{v_1}{\sin\theta_1} = \dfrac{v_2}{\sin\theta_2}$ 가 된다. ■

2.3. 역학적 증명([10, p.151]).



<그림 6>

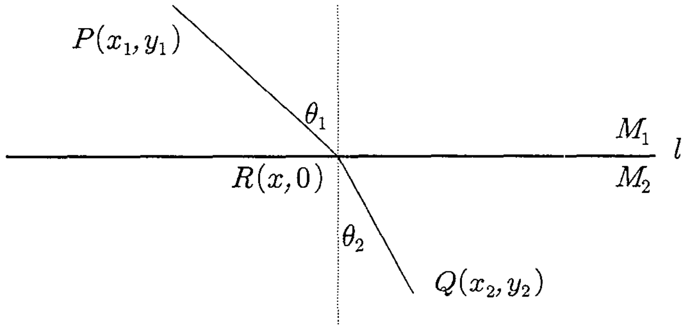
<그림 6>과 같은 역학적 상황이 있다. 고정된 수평축 l을 따라서 자유롭게 움직일 수 있는 고리 R에 줄 두개가 연결되어 있는데, 하나는 P 도르래에 걸쳐서 무게 a의 추가 달려있으며 다른 하나는 Q 도르래에 걸쳐서 무게 b의 추가 달려있다. 무게 a와 b가 서로 다르다고 하면 고리 R은 적당한 위치에서 평형을 이룰 것이다. 고리 R은 수직 방향으로는 움직일 수 없으므로 수평방향의 힘에 의해서만 움직이게 되므로 평형을 이루었다는 것은 수평 방향의 힘이 같다는 것이다. 즉 $a\sin\theta_1 = b\sin\theta_2$ 이다.

위의 역학적 상황에서 두 물체는 가능한 낮게 즉 위치에너지가 적게 되려 할 것이다. 즉 $PA \cdot a + QB \cdot b$ 가 최대가 되려 한다. 끈의 길이는 일정하므로, 이는 $PR \cdot a + QR \cdot b$가 최소가 되려하는 것과 같은 뜻이다. 이 역학 문제는 결국 $PR \cdot a + QR \cdot b$가 최소가 되도록 도르래 R의 위치를 정하는 것이 된다.

<그림 5>와 같은 굴절 상황으로 돌아가자. 굴절 상황에서의 문제는 $\frac{PR}{v_1}+\frac{QR}{v_2}$ 이 최소가 되는 조건을 찾는 것이었다.

따라서 $\frac{1}{v_1}=a, \frac{1}{v_2}=b$ 로 놓는다면 이 문제는 $PR \cdot a+QR \cdot b$를 최소화시키는 문제가 되고, 따라서 <그림 6>의 역학 문제와 같게 된다. 역학 문제의 답이 $a\sin\theta_1=b\sin\theta_2$ 였으므로 이 식에 $a=\frac{1}{v_1}, b=\frac{1}{v_2}$을 대입하면 굴절 문제의 답이 된다. 따라서 $\frac{v_1}{\sin\theta_1}=\frac{v_2}{\sin\theta_2}$가 된다. ■

2.4. 대수적 증명([7. pp.541-543]).



<그림 7>

P, Q, R의 좌표를 (x_1, y_1), (x_2, y_2), $(x, 0)$이라 하자. 단, $x_1 < x < x_2$, $y_1 > 0$, $y_2 < 0$이다. 문제는 $t(x)=\frac{\sqrt{(x-x_1)^2+y_1^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{(x_2-x)^2+y_2^2}}{v_2}$가 최소가 될 때의 x의 위치를 찾는 것이다. θ_1, θ_2가 임의의 실수라면, Cauchy의 정리에 의하여

$\pm(x_i-x)\sin\theta_i \pm y_i\cos\theta_i \le \sqrt{(x_i-x)^2+y_i^2}$ $(i=1,\ 2)$. 따라서,

$$t(x)=\frac{\sqrt{(x-x_1)^2+y_1^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{(x_2-x)^2+y_2^2}}{v_2}$$
$$\ge \frac{(x-x_1)sin\theta_1+y_1cos\theta_1}{v_1}+\frac{(x_2-x)sin\theta_2-y_2cos\theta_2}{v_2}$$

여기서 x를 고정시키고 θ_1, θ_2를 변수라고 하자. 등호가 성립할 필요충분 조건은 $(x-x_1, y_1)$과 $(cos\theta_1, sin\theta_1)$ 그리고 $(x_2-x, -y_2)$와 $(cos\theta_2, sin\theta_2)$가 한직선 위에 있는 것이다. 즉

$$sin\theta_1 = \frac{x - x_1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2}},\ cos\theta_1 = \frac{y_1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2}},$$

$$sin\theta_2 = \frac{x_2 - x}{\sqrt{(x_2-x)^2 + y_2^2}},\ cos\theta_2 = \frac{-y_2}{\sqrt{(x_2-x)^2 + y_2^2}} \quad \cdots\cdots (*)$$

즉 θ_1, θ_2는 입사각과 굴절각이 된다.

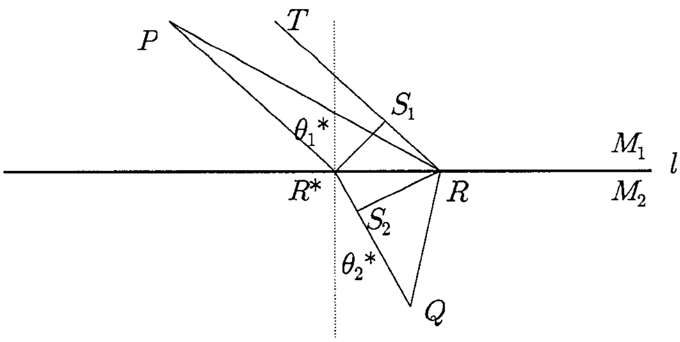
이제 점 x를 직선 l을 따라서 x_1에서부터 x_2까지 움직이면 식 (*)로부터

$$sin\theta_1 : 0 \to u_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_{1)}^2 + y_1^2}}, \quad sin\theta_2 : u_2 = \frac{x_2 - x_1}{(x_2 - x_1)^2 + y_2^2} \to 0\text{이다.}$$

따라서 $\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$는 0부터 ∞까지의 값을 가질 수 있다.

$\dfrac{v_1}{v_2} > 0$이므로 $\dfrac{sin\theta_1^*}{sin\theta_2^*} = \dfrac{v_1}{v_2}$을 성립시키는 $x^*, \theta_1^*, \theta_2^*$가 존재한다.

단 $x_1 < x^* < x_2$, $0 < \theta_1^* < arcsinu_1$, $0 < \theta_2 < arcsinu_2$.



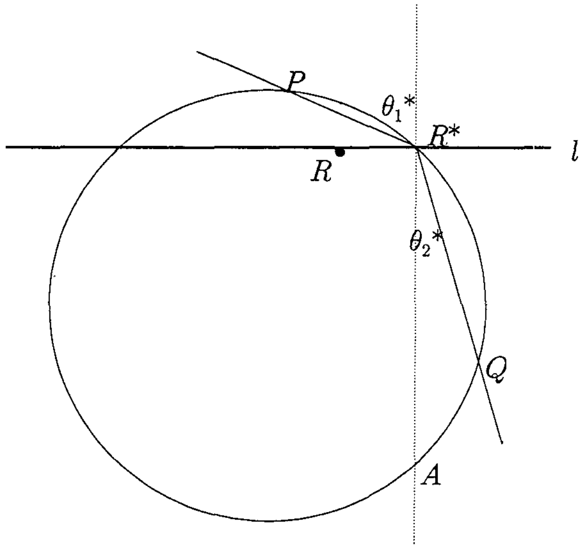
<그림 8>

이제 $R^*(x^*,0)$을 지나는 경로, 즉 $PR^* + R^*Q$이 다른 경로보다 더 적은 시간이 걸린다는 것을 증명하면 된다. 일반성을 잃지 않고 $v_1 > v_2$, $x > x^*$라고 가정할 수 있다. 그러면 $\dfrac{S_1R}{S_2R^*} = \dfrac{\sin\theta_1{}^*}{\sin\theta_2{}^*} = \dfrac{v_1}{v_2}$ 이다. 따라서, 만약, 선분 AB를 진행하는데 걸리는 시간을 $|AB|$로 나타낸다면 $|S_1R| = |S_2R^*|$이다. 따라서

$$\begin{aligned} |PR^*| + |R^*Q| &= |TS_1| + |S_1R| - |S_2R^*| + |R^*Q| \\ &= |TR| + |S_2Q| \\ &\le |PR| + |RQ|. \end{aligned}$$

등호가 성립한 필요충분 조건은 $R = R^*$이다. $x < x^*$인 경우도 유사하게 증명 가능하다. ■

2.5. 기하학적 증명([9, pp.543-544])



<그림 9>

l이 두 매질을 분리시키는 직선이고 P, R^*, Q가 빛의 실제 진행 경로라고 하자. 즉 $\dfrac{\sin\theta_1^*}{\sin\theta_2^*}=\dfrac{v_1}{v_2}$이다. 우리가 증명하고자 하는 것은 직선 l위의 R^*와 다른 임의의 점 R에 대하여 $\dfrac{PR}{v_1}+\dfrac{RQ}{v_2}>\dfrac{PR^*}{v_1}+\dfrac{R^*Q}{v_2}$임을 증명하는 것이다. 점 P, R^*, Q를 지나는 원을 그리고 R^*를 지나는 l의 수선이 원과 만나는 점을 A라 하자. 원 P, R^*, Q의 반지름을 L이라 하면 사인법칙에 의하여 $AP=2L\sin\theta_1^*$, $AQ=2L\sin\theta_2^*$이다. 따라서 $\dfrac{AP}{AQ}=\dfrac{v_1}{v_2}$, 즉 적당한 상수 k에 대하여 $AP=\dfrac{k}{v_2}$이고 $AQ=\dfrac{k}{v_1}$이다. 원 위의 점 P, R^*, Q, A에 대하여 Ptolemy의 정리를 적용하면

$$PQ\cdot AR^*=PR^*\cdot AQ+AP\cdot R^*Q \qquad \cdots\cdots (1)$$

만약 l위에 R^*와 다른 임의의 점을 R이라 한다면 일반화된 Ptolemy의 정리([1, p.55])에 의하여 다음을 얻을 수 있다.

$$PQ\cdot AR<PR\cdot AQ+AP\cdot RQ \qquad \cdots\cdots (2)$$

$AP=\dfrac{k}{v_2}$과 $AQ=\dfrac{k}{v_1}$를 식 (1)과 (2)에 대입하면,

$k(\dfrac{PR^*}{v_1}+\dfrac{R^*Q}{v_2})=PQ\cdot AR^*$이고 $k(\dfrac{PR}{v_1}+\dfrac{RQ}{v_2})>PQ\cdot AR$이다.

$AR>AR^*$이므로 $\dfrac{PR}{v_1}+\dfrac{RQ}{v_2}>\dfrac{PR^*}{v_1}+\dfrac{R^*Q}{v_2}$가 된다. ■

3. 결론

빛의 굴절의 공식 $\frac{v_1}{\sin\theta_1} = \frac{v_2}{\sin\theta_2}$을 최초로 발견한 사람은 Snell로서, 그는 무수한 관찰 자료에 근거하여 경험적으로 이를 얻었다. Snell 이후 많은 수학자들이 '최소 시간의 원리'로부터 굴절의 법칙을 도출하려고 노력했으나 쉽게 이룰 수 없었는데 그 이유는 굴절의 법칙의 본질이 '미분'이었기 때문이다. Fermat는 자신만의 극대·극소 방법을 발명하여 이러한 장벽을 넘을 수 있었으며, 그의 방법은 훗날 미분으로 이어지게 된다. 수학사에서 Fermat의 성공을 포함하여 굴절의 법칙을 수학적으로 증명하려는 모든 시도는 미적분학의 발달을 촉진한 동력 중의 하나였으며 Leibniz의 미적분의 맹아가 되었다([8, p.1225]).

역사에 나타나 있듯이 수학은 물리학에게 도구가 되며, 물리학은 수학에 내용을 제공하고, 수학적인 구조를 함유하는 기반이 된다. 그러나 현재 수학과 물리의 교육과정은 수학과 물리학의 역사가 함의하는 만큼 밀접하지는 못하다. 물리 측면에서 본다면, 수학적인 측면을 배제하고 실험적으로만 다루다 보니 그 법칙이 함의하는 수학적인 중요성을 간과하고 있는 실정이다. [6, p.138]에 의하면 이것은 물리 교육과정의 '탈수학화(de-mathematized)' 현상의 대표적인 사례이다. 현재 대부분의 고교 물리학 교재들은 가급적 수학을 덜 사용하려 하며 특히 물리학과 수학 사이의 밀접한 관련을 드러내는 소재일수록 거기에 사용되는 수학의 수준을 최대한 낮추려 하고 있다. 그 결과 물리학에서 사용되는 수학이라는 것은 기껏해야 문자가 나오는 공식을 읽을 수 있고 그 변수에 수치를 대입하는 것에 지나지 않게 되었다.

수학교육에서 이러한 물리교육과정의 탈수학화에 대응하는 것은 전통적인 연역주의 수학교육이다. 이 철학에서 중시하는 것은 관념의 정교한 체계로서의 수학을 논리적인 방법으로 가르치는 것이며, 따라서 수학과 현실과의 관계는 부차적인 교육적 가치를 가진다. 전통적인 수학 교재에서 처음에는 공리적이고 연역적인 방법으로 수학을 익히고 마지막에 이른바 '응용문제'라는 것을 덧붙이는 방식이 여기에 해당한다. 즉, 수학이 먼저 있고 그것이 현실에 찾아들어가는 식인 것이다. 그러나 이 경우의 응용문제라는 것은 기계적인 특수화, 즉 변수에 특정한 값을 대입하는 낮은 차원에 그치기 쉬우며 그것은 바로 탈수학화된 물리 문제와 유사하게 된다. 수학교사들은 물리학자들에게 도움을 청할 필요를 느끼지 않으며 물리 현상을 도입함으로써 수학적 개념이 더욱 생생한 의미를 갖게 만들려고 시도하지 않는다. [6, p.137]에 의하면 이것은 자칫하면 수학과 물리학을 완전히 단절시킬 수도 있는 악순환 고리이다.

물론 사정이 이렇게 된 데에는 그만한 이유가 있다. 교육에서 수학과 물리학의 밀접한 관련을 이룩하기 위해서는 수학교사와 물리교사에게 현재보다 더 큰 부담을 부과하게 되기 때문이다. 가르쳐야할 소재가 많은 상황에서는 응용적인 것보다는 그 교과 본래의 소재에만 치중하는 경향은 어찌 보면 당연한 일일 것이다. 또한 각 교과의

교육과정을 재정비하여 현대화해야만 하는 상황에서 두 교과를 관련지음으로써 일을 더욱 어렵게 만든다는 이유로서 반대하는 사람도 많을 것이다.

그러나 이러한 현실적인 어려움이 본질적인 필요성을 대치할 수는 없다. 수학과 물리의 교육과정이 상호 조정되어야만 할 본질적인 이유가 있으며 수학 쪽에서 특히 그러하다. 수학의 많은 개념들이 물리 현상과의 관련을 통해서 생생하게 이해될 수 있고, 특히 어떤 수학 개념은 그 발생적 기원이 물리 현상에 있기 때문이다. 예를 들어 수학에서의 벡터 개념은 물리학에서의 힘과 관련지을 때 가장 생생하게 이해될 수 있으며, 벡터의 내적은 일의 개념으로부터, 외적은 토크의 개념으로부터, 미분은 속도와 가속도로부터 유의미하게 이해될 수 있다. 그러나 이러한 방법론적이고 수단적인 이유 이외에 수학 수업이 물리적인 상황을 채용해야만 하는 근본적인 이유가 있다. 그것은 수학의 본질은 유용성이고, 수학교육의 목적은 수학을 현실에 응용하는 것을 배우는 것이기 때문이다. Freudenthal은 다음과 같이 말한다.

수학은 유용한 활동으로서 출발했으며, 오늘날에는 과거 어느 때보다도 더욱 유용하다. 그러나 이 말은 줄잡아 하는 말이다. 우리는 다음과 같이 말해야만 한다. 만약에 수학이 유용하지 않았다면 그것은 존재하지 않았을 것이다([6. p.16]).

나는 어느 누구도 지금까지의 나의 논의로부터 학교에서는 응용수학을 가르쳐야만 한다는 결론을 도출하는 것을 원치 않는다. … 나는 학생들이 응용수학을 배워야만 한다고 촉구하지 않으며, 대신에 내가 원하는 것은 학생들이 수학을 응용하는 방법을 배우는 것이다. 이것은 실용주의가 아니다. 따라서 응용 수학이라는 용어 대신에 나는 '다면적으로 관계된 수학(multi-related mathematics)'이라는 용어를 선호한다([6. p.75]).

이 글에서는 이러한 관점을 견지한 채로 빛의 굴절의 법칙의 발달과 그것의 수학적 증명의 역사를 살펴보았다. 현재 우리나라 교육과정에서 굴절의 법칙은 수학에서는 다루어지지 않고 있으며 고교 1학년이 배우는 『물리 I』에서만 다루어지고 있다. 그 방법은 우선 사인법칙을 통해서 직관적으로 증명하고 난 후, 구체적인 실험을 통하여 $\frac{v_1}{\sin\theta_1} = \frac{v_2}{\sin\theta_2}$을 확인하는 '준경험적인' 형태이다([2, p.163]). 사인법칙을 통한 직관적인 증명은 굴절의 법칙의 여러 증명 방법 중 가장 단순한 것으로서, 최소 시간의 원리로부터 연역적으로 도출하는 형식이 아니라는 점에서 여타의 방법과 본질적으로 구별되는 방법이다. 미분을 이용하는 방법도 비교적 쉬운 방법에 속하지만 고교에서 『물리 I』을 배우는 단계는 수학에서 미분을 배우지 않은 단계이기 때문에 정상적인 물리 교육과정에서는 도입하기 어렵다. 따라서 현재 교육과정에서 굴절의 법칙을 다루는 방법은 건전하다고 판단된다. 하지만 물리나 수학 경시대회를 준비하는 우수한 학생에게는 직관적인 증명 방법보다는 최소시간의 원리로부터 연역적으로 도출하는 '수학적인' 방법이 좋은 훈련 소재가 될 수 있다고 생각된다.

대학의 수학이나 물리학 전공 과정에서도 굴절의 법칙에 대한 다양한 수학적 증명과 함께 현대적인 미분을 통한 방법과 Fermat가 발견한 원시적인 미분을 통한 방법

을 같이 다루는 것이 교육적 가치가 높을 것으로 생각된다. 그 이유는 수학자들로 하여금 미분이라는 탁월한 도구를 만들도록 자극한 것은 물리학적인 필요였다는 것, 원시적인 미분의 방법은 매우 복잡했지만 현대적인 미분은 누구나 이해할 수 있을 정도로 간단하다는 것, 즉 미분이 얼마나 우수한 도구인지를 느낄 수 있도록 해주기 때문이다. 굴절 법칙의 증명 방법의 발견 과정에는 수학과 물리학이 상호 작용함으로써 과학의 발전을 이끄는 패턴이 잘 드러나 있다. 자연 현상은 수학자들에게 문제를 던져주었고 수학은 그것을 추상적인 원리를 통해서 해결함으로써 원래의 현상뿐만 아니라 다른 현상까지도 포괄하는 더 넓은 물리 영역을 하나로 종합한다.

감사의 글 이 논문을 심사하신 심사위원님들의 지적과 조언에 감사드립니다.

참고 문헌

1. 윤옥경, 수학 올림피아드: 평면 기하학, 서울: 재능교육, 1992.
2. 장준성외, 물리 Ⅰ, 지학사, 2003.
3. Beckenbach, E. & Bellman, R., *An introduction to inequalities*, New York: Random House, 1961.
4. Boyer, C. B & Merzbach, U. C., *A history of mathematics*, 1968, 양영오 · 조윤동 역, 수학의 역사, 서울: 경문사, 2000.
5. Courant, R. & Robbins, H., *What is mathematics*, Oxford University Press, 1941.
6. Freudenthal, H., *Mathematics as an educational task,* Dordrecht: D, Reidel Publishing Company, 1973.
7. Golomb, M., *Elementary proofs for the equivalence of Fermat's principle and Snell's law*, American mathematical monthly, Vol.71(1964), pp.541-543.
8. Helfgott, H., Helfgott, M., *A noncalculus proof that Fermat's principle of least time implies the law of refraction*, American journal of physics, Vol. 70(2002), No.12, pp.1224-1225.
9. Pedoe, D., *A geometric proof of the equivalence of Fermat's principle and Snell's law*, American mathematical monthly, Vol.71(1964), pp.543-544.
10. Polya, G., *Mathematics and plausible reasoning: Induction and analogy in mathematics*, Princeton University Press, 1954.
11. Schiffer, M. M., Bowden, L., *The role of mathematics in science*, Mathematical Association of America, 1984.

The Korean Journal for History of Mathematics Vol. 19 No. 1 (Feb. 2006), 65-78

The mathematical proofs of refraction law and its didactical significances

Kongju National University of Education **Heung Kyu Kang**

The law of refraction, which is called Snell's law in physics, has a significant meaning in mathematics history. After Snell empirically discovered the refraction law $\frac{v_1}{\sin\theta_1} = \frac{v_2}{\sin\theta_2}$ through countless observations, many mathematicians endeavored to deduce it from the least time principle, and the need to surmount these difficulties was one of the driving forces behind the early development of calculus by Leibniz. Fermat solved it far advance of others by inventing a method that eventually led to the differential calculus.

Historically, mathematics has developed in close connection with physics. Physics needs mathematics as an auxiliary discipline, but physics can also belong to the lived-through reality from which mathematics is provided with subject matters and suggestions. The refraction law is a suggestive example of interrelations between mathematical and physical theories.

Freudenthal said that a purpose of mathematics education is to learn how to apply mathematics as well as to learn ready-made mathematics. I think that the refraction law could be a relevant content for this purpose.

It is pedagogically sound to start in high school with a quasi-empirical approach to refraction. In college, mathematics and physics majors can study diverse mathematical proof including Fermat's original method in the context of discussing the phenomenon of refraction of light. This would be a ideal environment for such pursuit.

Key words: refraction law, least time principle, applied mathematics, Snell, Fermat, Freudenthal

2000 Mathematics Subject Classification: 97D30

ZDM Subject Classification: D34

논문접수: 2005년 10월 11일 심사완료: 2005년 11월