한국수학사학회지 제19권 제1호(2006년 2월), 17-32

# 위상수학의 시조 Euler

충북대학교 수학과 김상욱
swkim@chungbuk.ac.kr

충북대학교 수학과 이승온
solee@chungbuk.ac.kr

위상수학은 기하학, 대수학, 해석학 등 수학의 다른 분야에 비하여 비교적 늦게 연구되기 시작하였고 Euler는 위상수학의 시조로 알려져 있다. 우리는 먼저 위상수학의 기원과 발달에 대해 살피고 Euler의 삶과 업적에 대해 알아본다.

주제어 : 위상수학의 역사, Euler.

## 0. 서론

위상수학(topology)의 개념은 오늘날 수학의 거의 모든 분야에서 찾아볼 수 있는데 점집합위상수학(point set topology), 대수적 위상수학(algebraic topology), 미분위상수학(differential topology) 등 비교적 공통점이 없는 분야들로 구성되어 있다. 우리는 다양한 상황들 속에서의 위상수학의 기원을 추적하고, 그 기원을 구축한 Leonhard Euler(1707-1783)를 소개한다.

## 1. 위상수학의 역사

위상수학의 기원으로 여길 만큼 가치가 있는 최초의 연구는 Euler에 의한 것으로 알려져 있다. Euler는 1736년에 'Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis (The solution of a problem relating to the geometry of position)'으로 명명된 'Königsberg bridge problem'에 관한 논문을 발표하였다. 이 논문에서 Euler는 Königsberg 다리 문제를 거리와는 무관한 서로 다른 형태의 도형의 문제로 인식하였다([2, 5]).

수학을 측량(measurement)에 관한 문제로부터 벗어나게 한 후의 발전 단계도 역시 Euler에 의하여 이루어졌다. 1750년에 Euler는 그 당시 평론가이며 책을 파는 일을 하

던 Goldbach(1690-1764)에게 다면체(polyhedron, connected planar graph)에 관한 Euler의 유명한 공식인 $v-e+f=2$ ($v$는 다면체의 꼭지점의 개수, $e$는 변의 개수, $f$는 면의 개수)를 알리는 편지를 썼다. 이 공식을 다면체에 관하여 다양하게 연구하던 Archimedes(287-212 B.C.)와 Descartes(1596-1650)가 그냥 지나쳐버렸다는 것은 매우 흥미롭다. 즉 Euler 이전의 모든 사람들에게는 측량을 포함시키지 않고 기하학적인 성질들을 생각하는 것은 불가능하였다는 것이 그 이유일 것이다.

1752년 Euler는 위의 공식에 관하여 자세히 설명한 두 편의 논문을 발표하였다. 첫 번째 논문에서 그는 그 결과를 증명할 수 없음을 인정했으나, 두 번째 논문에서 사면체의 조각들로 절개한 입체(solid)를 기초로 증명하였다. 그러나 Euler는 이 증명에서 입체들이 convex임을 가정하는 등 몇 가지 문제들을 간과하였다.

Euler에 의한 다면체 공식으로부터 시작된 방법은 그 당시 비교적 알려진 수학자인 Simon Lhuilier(1750-1840)가 연구를 계속하였는데 그는 삶의 대부분을 Euler의 공식과 관련된 문제들을 연구하는데 보냈다. 1813년 그는 구멍(hole)이 있는 입체에 대하여 Euler의 공식이 잘못되었음을 발표하였는데, 만약 어떤 입체가 $g$개의 구멍을 가지면 $v-e+f=2-2g$임을 보였다. 이것은 위상적 불변성(topological invariant)에 관하여 최초로 알린 결과였다.

Möbius(1790-1868)는 1865년에 Möbius 띠에 관하여 발표하였다. 그는 비가향성(non-orientability)이라는 용어로 Möbius 띠의 외향성(one-sided property)을 묘사하려고 시도하였다. 그는 Möbius 띠를 가향삼각형(oriented triangle)들에 의해 덮인 곡면(surface)으로 생각했으나 Möbius 띠가 꼬임 없이 가향삼각형들로 채워질 수 없음을 발견하였다(Möbius band could not be filled with compatibly oriented triangles).

Listing(1808-1882)은 위상수학이라는 말을 처음으로 사용한 인물이다. Listing의 위상적 사고는 Gauss(1777-1855)에 의해 영향을 받았지만, 정작 Gauss 자신은 위상수학에 관한 어떠한 연구 결과도 만족스럽게 발표하지 못하였다. Listing은 이미 지난 10년간 서신을 왕래 한 중에 위상수학이란 말을 사용해 왔음에도 불구하고, 1847년에서야 'Vorstudien zur Topologie'라는 제목의 논문에서 복소수의 개념을 도입하였으나 그 내용이 극히 기본적이어서 큰 의미가 있는 것은 아니었다. 그 후 Listing은 1861년에 발표한 논문에서 Möbius 보다 4년 먼저 Möbius 띠를 묘사했으며, 곡면과 연결성(connectivity)에 관한 내용들을 연구하였다.

Listing이 곡면의 연결성을 고찰한 첫 번째 인물은 아니었는데, 1851년에 Riemann(1826-1866)이 곡면의 연결성에 관한 개념을 연구했으며, 1857년에 Riemann surface를 도입하였다. 연결성에 관한 문제는 다항방정식 $f(w,z)=0$을 연구하면서 $w$와 $z$이 변함에 따라 해가 어떻게 변하는지를 살피던 중에 생겼다. Riemann은 방정식 $f(w,z)=0$에 의해 정의된 함수 $w(z)$이 해당 곡면 상에서 유일한 값을 갖도록 함수 $f(w,z)$에 의해 결정되는 Riemann surface를 도입하였다.

Jordan(1838-1922)은 곡면의 연결성을 살피기 위한 다른 방법을 소개했는데 완전독

립집합(complete independent set)에 있는 회로들의 개수는 그 곡면이 갖는 위상불변성임을 증명하였다.

Listing은 3차원 Euclidean 공간에서의 연결성을 고찰하였고, Betti(1823-1892)는 Listing의 생각을 $n$ 차원으로 확장했는데 생각만큼 그렇게 간단하지 않았다. 그 이유는 3차원에서 조차도 곡면상의 폐곡선들이 하나의 점으로 축소될 수 있음에도 불구하고, 여전히 하나의 점으로 축소될 수 없는 어떤 곡면을 가질 수 있기 때문이었다. Betti의 연결성에 관한 정의는 미진한 점이 있었고, Heegaard(1871-1948)가 이 점을 지적하였다.

연결성에 관한 개념은 1895년 논문집 'Analysis situs'에서 Poincaré(1854-1912)에 의해 확고한 위치를 차지하게 되었다. Poincaré는 homology 개념을 소개했고, Betti가 정의했던 것보다 공간과 관련하여 더 명확한 Betti number를 정의하였다.

Euler의 convex polyhedra formula는 1890년 Jonquières(1820-1901)에 의해 convex polyhedra일 필요가 없는 것으로 일반화 되었으며, 그 때 이미 Poincaré는 그것을 $p$-차원 다양체의 일반적인 위치에 두었다. 또한 Poincaré가 연결성을 다루면서 다양체의 기본군(fundamental group)을 소개했으며, homotopy 개념은 1895년에 발표된 여러 논문들에 소개되었다.

위상수학을 발전시킨 두 번째 동기는 수렴 개념의 일반화에서 비롯되었다. 사실 이 일반화는 Bolzano(1781-1848)가 수열의 수렴에 대한 연관성을 배제하고, 수렴을 실수들의 유계무한부분집합과 관련지었던 1817년에 시작되었다.

1872년에 Cantor(1845-1918)는 처음으로 the first derived set의 개념, 즉 limit point들의 집합을 소개하였다. 또한 Cantor는 the first derived set을 포함하는 부분집합으로 실직선의 폐부분집합을 정의했고 점집합 위상수학의 기본 개념인 개집합의 개념도 소개하였다. 1887년에 Weierstrass(1815-1897)는 비공개 강연 중에

『실수로 이루어진 유계무한집합 $S$는 적어도 한 개의 limit point $p$를 갖는다. 즉 임의의 $\epsilon > 0$ 에 대하여 $|p - p_n| < \epsilon$ 이 되는 $S$의 점들로써 $p$로 수렴하는 수열 $(p_n)$ 이 존재한다.』

고 알려진 Bolzano-Weierstrass 정리를 증명했는데, 여기에서 점의 근방에 관한 개념을 소개하였다.

Hilbert(1862-1943)는 자신의 문제들 중 하나였던 '연속 변환군은 미분가능한가?'의 질문에 긍정적으로 답했을 때인 1902년에 근방 개념을 사용하였다.

1906년에 Fréchet(1878-1973)는 어떤 공간에 대해 유계무한부분집합이 limit point를 포함하면 그 공간을 컴팩트공간(compact 공간)이라 불렀다. 또한 Fréchet는 거리공간을 정의하여 유클리드공간으로부터 수렴성의 개념을 일반화하였고 Cantor의 개집합과 폐집합의 개념이 거리공간으로 자연스럽게 확장됨을 보였다.

Riesz(1880-1956)는 'International Congress of Mathematics in Rome(1909)'에 게재된 논문에서 거리 개념을 완전히 배제하고 위상수학에 대한 새로운 공리적 접근을 제안하였다. 이러한 정의는 거리의 개념 없이 집적점에 관한 확고한 정의에 근거를 두었다.

1914년에 Hausdorff(1868-1942)는 다시 거리 개념이 없는 네 개의 공리에 의한 근방을 정의하였다. Riesz와 Hausdorff의 이러한 연구는 실제로 추상적 위상공간의 정의를 가능하게 하였다.

위상적인 개념이 수학에 들어가게 된 세 번째 수단은 바로 함수해석학을 통해서이다. 함수해석학은 고전적인 해석 방법들이 문제를 다루는데 다소 불충분하기 때문에 야기되었던 수리물리학과 천문학으로부터 생겨난 하나의 논제였다.

Jacob Bernoulli(1654-1705)와 Johann Bernoulli(1667-1748)는 적분 값이 적분될 함수들의 한 함수로 간주되는 변분법(calculus of variations)을 고안하였다.

Hadamard(1865-1963)는 linear functional

$$F(f)=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)g_n(x)dx$$

를 연구하던 1903년에 'functional'이란 단어를 소개하였다.

Fréchet는 1904년에 functional의 도함수를 정의함으로써 functional을 발전시켰다.

1907년 Schmidt(1876-1959)는 Hilbert가 Fourier(1768-1830) 급수의 개념을 일반화하기 위한 적분방정식의 연구에 사용했던 방법들을 확장시키기 위해 수열공간에서의 수렴성 개념을 고찰했는데, 이 과정에서 거리를 내적을 이용하여 정의하였다. 수열공간에 관한 Schmidt의 연구는 제곱합가능 함수에 관한 이론과 유사하며, 이 연구는 Schmidt에 의해 1907년에 행해졌고, 독립적으로 Fréchet에 의해서도 연구되었다.

추상적 개념으로 확장하는 단계는 내적공간으로부터 노름공간으로 옮겨갈 때인 1932년에 Banach(1892-1945)에 의해 이루어졌다. Banach는 Fréchet의 선형 functional을 받아들였고, 그들이 노름공간에서 자연스러운 위치를 가짐을 보였다.

Poincaré는 어떤 천문학적인 문제들에 관한 연구로부터 비롯된 상미분방정식(ordinary differential equation)들을 연구하던 중에 다양한 위상적 방법들을 개발하였다. Poincaré의 자율계(autonomous system)

$$\frac{dx}{dt}=f(x,\ y),\quad \frac{dy}{dt}=g(x,\ y)$$

에 관한 연구는 이것이 이미 연구되었던 특별한 궤적에서 보다는 오히려 모든 해 전체를 고찰하는 내용을 필요로 하였다.

Poincaré에 의해 개발된 일련의 방법들은 1912년에 Brouwer(1881-1966)에 의해 완전한 위상적 이론으로 정립되었다.

## 2. Leonhard Euler(1707-1783)

Leonhard Euler의 아버지는 Paul Euler이다. Paul은 Basel 대학에서 신학을 공부했으며, 그 곳에서 Jacob Bernoulli의 강의를 들었다. 사실 Paul과 Johann Bernoulli는 Basel에서 대학을 다니는 동안 Jacob Bernoulli의 집에서 함께 생활하였다. Paul은 신교의 목사가 되었으며, 목사 딸인 Margaret Brucker와 결혼하였다. 그들의 아들인 Leonhard는 Basel에서 태어났지만, 가족은 그가 1살 때 Basel에서 가까운 Riehen으로 이사하였다. 앞서 언급했듯이, Paul은 대학 시절에 약간의 수학 교육을 받았으므로 아들에게 다른 과목들과 더불어 기본적인 수학을 가르칠 수 있었다.

Basel에서 학교를 다니는 동안 Leonhard는 외할머니와 함께 생활하였다. 이 학교는 재정이 아주 어려웠고 Leonhard는 학교에서 수학을 배울 기회가 전혀 없었다. 그러나 수학에 대한 그의 관심은 아버지의 가르침에 의해 확실히 고무되었으므로 스스로 수학을 공부하면서 개인지도를 받았다. Euler의 아버지는 아들이 자신을 따라 교회에 들어오기를 원했으므로, 그를 목사로 만들기 위해 *Basel대학에* 보냈다. *Leonhard는* 그의 나이 14살 때인 1720년 심화학습에 들어가기 전의 교양교육을 이수하기 위해 이 대학에 입학하였다. Johann Bernoulli는 Euler 자신이 기획한 개인지도 방법에 따라 그를 지도하면서 Euler의 수학에 대한 뛰어난 잠재력을 발견하였다. Euler는 자신의 출판되지 않은 자전적 기록에서 다음과 같이 적고 있다.

나는 유명한 교수인 Johann Bernoulli에게 배울 수 있는 기회를 곧 찾아냈다. 사실, 그는 매우 바빠서 내게 개인지도 해 주기를 단호히 거절하였다. 그러나 그는 내가 혼자 힘으로 어려운 수학 책들을 공부할 수 있도록 의미 있는 조언들을 해 주었다. 내가 어려움에 처하면 매주 일요일 오후 자유롭게 그를 방문하도록 허락했으며, 혼자 이해할 수 없었던 모든 것들에 대해 친절하게 설명해 주었다.

1723년에 Euler는 Descartes와 Newton(1643-1727)의 철학적 개념들을 비교 분석한 내용으로 철학 석사학위를 받은 후, 아버지의 희망에 따라 1723년 가을에 신학 공부를 시작하였다. 그가 평생토록 독실한 신자였음에도 불구하고, 수학에서 발견했던 열정을 신학이나 그리스어, 히브리어 공부에서는 찾을 수 없었다. Euler는 Johann Bernoulli가 그의 아버지를 설득하고 나서야 비로소 전공을 수학으로 바꿀 수 있었다. 아마도 Euler의 아버지가 대학 시절에 Johann Bernoulli와 친구였으므로 그의 아버지를 쉽게 설득할 수 있었을 것이다.

Euler는 1726년 Basel 대학을 졸업하였다. Calinger는 Euler가 Johann Bernoulli의 조언으로 읽었던 수학적 업적의 대부분을 재구성했는데, Varignon(1654-1722), Descartes, Newton, Galileo(1564-1642), Van Schooten(1615-1660), Jacob Bernoulli, Hermann(1678-1733), Taylor(1685-1731), Wallis(1616-1703) 등의 업적이 포함되었다

([1]). 1726년 Euler는 저항 매체가 갖는 isochronous curve에 관한 짧은 논문을 발표했고, 1727년 reciprocal trajectory에 관한 논문을 발표했으며, 선상 돛대의 가장 좋은 배치에 관한 내용으로 1727년 파리 Academy의 그랜드 상에 도전하였다. 1727년의 그 상은 배와 관련한 수학 분야의 전문가였던 Bouguer(1698-1758)가 수상했지만, Euler는 젊은 졸업생으로서는 좋은 성적이었던 2등 상을 수상하였다. 그럼에도 불구하고 그 당시에 Euler는 혼자 힘으로 연구직을 찾아야 하였다. 1726년 7월에 Nicolaus(II) Bernoulli(1695-1726)가 St. Petersburg에서 사망하여 그 곳에 결원이 생기자, Euler는 수학의 응용과 생리에서의 역학을 가르치는 자리를 제안 받았다. Euler는 1726년 11월에 그 제안을 받아들였지만, 이듬 해 봄까지 러시아 쪽으로 이주하는 것을 원치 않았다. 그는 결정을 미루어야할 두 가지 이유가 있었는데 새로운 지위와 관련한 주제들을 공부할 시간을 원했고, 또 한편으로는 Basel대학의 물리학 교수가 사망하여 그 자리를 얻을 기회가 생겼기 때문이다. Euler는 Basel대학에 선발되기 위한 노력으로 역사적으로 길이 남을 만큼 훌륭한 음향학에 관한 논문을 썼지만, 나이(19세)가 너무 어렸기 때문에 그 자리를 얻는 일에 실패하였다. 그러나 이 결과에 대해 Calinger는 다음과 같이 말한다([1]).

이 결과는 궁극적으로 Euler에게 잘 된 일이었다. 왜냐하면 그를 작은 사회로부터 뛰어난 연구와 과학 기술적인 일을 위해 보다 더 적절한 위치로 나아가도록 했기 때문이다.

자신이 물리학 교수에 임명되지 않으리라는 것을 안 후 Euler는 곧장 1727년 4월 5일 Basel을 떠났다. 그는 배편으로 Riehen으로 내려와 우편마차로 독일 영토를 가로질러, 다시 배편으로 Lübeck으로부터 1727년 5월 17일에 St. Petersburg에 도착하였다. 그는 Peter 대왕의 아내인 Catherine I세에 의해 발탁되어 2년간 St. Petersburg Academy of Sciences에 합류하였다. Euler는 Daniel Bernoulli(1700-1782)와 Hermann의 요청으로 그가 처음에 지원했던 생리학 분야가 아닌 수학물리분과에 임명되었다. St. Petersburg에서 Euler는 자신에게 이례적인 환경을 제공한 많은 동료들을 만났다. 여기에는 분석가이자 기하학자로 친척인 Hermann, 응용수학분야에서 개인적인 친목뿐 아니라 공통의 이익으로 관련되었던 Daniel Bernoulli, 해석학과 정수론에 관한 수많은 문제들을 토의했던 다재다능한 학자인 Goldbach, 삼각법을 연구한 Maier, 그리고 천문학자이자 지리학자인 Delisle(1688-1768)과 같은 학자들이 포함되어 있었는데, 일찍이 다른 어느 곳에서도 Euler 자신이 이렇게 저명한 과학자들의 무리에 의해 둘러싸여 본 적이 없었다.

Euler는 1727년부터 1730년까지 러시아 해군의 의무부관으로 복무하였다. St. Petersburg에서 Euler는 Daniel Bernoulli와 함께 생활했는데, 러시아에서의 생활이 어려웠으므로 Daniel Bernoulli는 Euler에게 스위스로부터 차, 커피, 브랜디와 음식들을 부탁하였다. Euler는 1730년 St. Petersburg 과학Academy의 물리학 교수가 되었으므

로 러시아 해군 직을 그만둘 수 있었다.

St. Petersburg 과학Academy에서 수학분과의 선임자였던 Daniel Bernoulli가 1733년에 Basel로 돌아가기 위해 St. Petersburg를 떠나면서 Euler가 수학분과의 선임자로 임명되었다. 이러한 지위가 가져다준 경제적 안정으로 Euler는 St. Petersburg Gymnasium 출신 화가의 딸인 Katharina Gsell과 1734년 1월 7일에 결혼할 수 있었다. Katharina는 Euler와 마찬가지로 스위스 출신이었고 그들은 모두 열 세 명의 자녀를 두었지만, 다섯 명만이 유년 시절 이후까지 살아남았다. Euler는 자신의 발치에서 놀고 있는 자녀들과 더불어 한 자녀를 팔에 안고 있는 동안 자신의 가장 위대한 수학적 발견들의 일부를 이룩하였다고 주장하였다.

우리는 뒤에서 Euler의 수학적 업적들을 고찰하겠지만, 일단 그의 경력 중 이 기간 동안의 업적을 요약해 볼 가치가 있다. 1730년 이후 그는 지도 작성, 과학교육, 자기학, 화력엔진, 기계, 조선 등을 다루는 정부의 연구 과제들을 수행하였다. 그의 연구 프로그램의 핵심은 그 때 이미 정수론과 그 당시 막 생겨난 분야인 미분방정식과 변분법을 포함한 무한해석학, 그리고 유리역학 등이었다. 그는 이들을 서로 밀접한 관련이 있는 세 영역으로 보았다. 정수론에 관한 연구는 미적분의 토대로 필수적이었으며, 특정한 함수들과 미분방정식들은 구체적인 문제들이 제기 된 유리역학에 필수적이었다. Euler의 많은 논문 발표와 Newton의 역학을 처음으로 수학적 해석의 형태로 광범위하게 표현했던 책인 'Mechanica(1736-1737)'의 출판은 Euler의 수학적 연구를 본 궤도에 진입시키는 계기가 되었다.

Euler의 건강상의 문제는 심한 열병으로 위독했던 1735년에 발생하였으나 그는 이러한 사실을 병세가 회복될 때까지 자신의 부모와 Basel로 돌아온 Bernoulli 일가에게 알리지 않았다. Euler의 자전적 기록에서 자신의 시력 문제는 지도를 작성하는 일로 너무 과로한 탓에 1738년에 발생했으며, 1740년에 이르러 한 쪽 시력을 잃었고 나머지 한 쪽도 같은 위험에 처할지도 모른다고 적었다. 그러나 Calinger는 Euler의 시력에 관한 문제는 좀 더 일찍부터 시작되었으며, 1735년의 심한 열병은 눈의 피로에 의한 증상이었다고 주장하였고 1753년에 그려진 Euler의 한 초상화는 그의 오른쪽 눈의 시력이 좋지는 않았지만 완전히 멀지는 않은 데 반하여, 그 당시까지 그의 왼쪽 눈의 시력은 여전히 좋았음을 보여준다고 하였다. Calinger는 Euler의 왼쪽 시력은 눈의 피로 때문이라기보다는 오히려 좀 더 시간이 흐른 후의 백내장이 원인이 되어 멀게 되었다고 주장하였다([1]).

Euler는 1738년과 1740년에 파리 Academy의 그랜드 상을 수상하면서 1740년까지 좋은 평판을 받았다. 그의 첫 번째 상은 다른 사람들과 공동으로 수상하였다. Euler의 평판은 베를린으로 갈 기회를 제공했지만, 그는 St. Petersburg에 남기를 더 원하였다. 그러나 러시아에서의 정치적 혼란은 외국인들의 지위를 어렵게 만들었으며, 이것은 Euler가 자신의 마음을 바꾸는 계기가 되었다. 더 나은 제안을 받아들인 Euler는 Frederick 대왕의 초청으로 일종의 Academy of Science를 Society of Sciences로 바

꾸기로 계획한 베를린으로 건너갔다. Euler는 1741년 6월 19일 St. Petersburg를 떠나, 같은 해 7월 25일 베를린에 도착하였다. 친구에게 보낸 한 통의 편지에서 Euler는 다음과 같이 썼다.

나는 비로소 내가 원하는 연구를 할 수 있다. 왕은 나를 자신의 선생으로 불러주니, 내가 세상에서 가장 행복한 사람이라고 생각된다.

베를린에 있는 동안에도 Euler는 계속해서 러시아로부터 보수를 받았다. 이 돈으로 그는 St. Petersburg Academy를 위한 책과 기구들을 구입하고, 그들을 이용하여 과학 보고서들을 썼으며, 젊은 러시아인들을 가르쳤다.

Maupertuis(1698-1759)는 1744년에 설립된 Berlin Academy의 우두머리였으며, Euler는 이곳의 수학분과 위원장이었다. Euler는 Maupertuis가 자리를 비울 경우 그를 대신했으며, 두 사람은 절친한 친구가 되었다. Euler는 Berlin Academy에서 아래와 같이 믿을 수 없을 만큼의 과중한 업무를 떠맡았다.

그는 천문대와 식물원을 관리하고 직원을 선발하며, 재정적 문제들을 감독하였다. 특히, 다양한 달력과 지리학적인 지도의 출판을 감독하고, Berlin Academy의 수입원이었던 판매를 관리하였다. 또한 왕은 Euler에게 Finow 운하의 높이를 수정하는 문제를 맡겼다. 그 당시 Euler는 왕의 여름 별장인 Sans Souci에서 수력시스템의 펌프와 파이프에 관한 일을 감독하기도 하였다.

이것이 그의 임무의 전부는 아니었다. 그는 도서관과 관련된 Berlin Academy위원회와 과학출판위원회에서도 일을 했고 정부복권, 보험, 연금과 연금지급, 포병에 관한 정부의 조언자로도 근무하였다. 그럼에도 불구하고 이 기간에 이룩한 그의 과학적 업적은 경이적이었다. 25년간 Berlin에서 생활하는 동안에 Euler는 약 380편의 논문을 썼으며 변분법, 행성의 궤도, 포술과 탄도학1), 해석학, 조선술과 항해술, 달의 운동, 미분법에 관한 강의록과 일반인들을 위한 과학출판물인 'Letters to a Princess of Germany(3권. 1768-1772)' 등의 책을 펴냈다.

1759년에 Berlin Academy의 장이였던 Maupertuis가 죽자, Euler는 장의 직함을 갖지는 않았지만, Berlin Academy의 지도자 임무를 맡았다. 왕은 총체적인 책임을 맡았는데 Euler는 그 당시 Frederick 대왕과 좋은 관계가 아니었다. 과학적인 문제들에 관하여 D'Alembert(1717-1783)와 논의하곤 했던 Euler는 1763년에 Frederick 대왕이 D'Alembert에게 Berlin Academy의 장을 제안했을 때 마음의 상처를 받았다. D'Alembert는 베를린으로 옮기는 것을 거절했지만, Berlin Academy의 운영과 관련한

1) Robins(1707-1751)가 쓴 책을 확장함.

Frederick 대왕의 계속적인 간섭은 Euler로 하여금 그 곳을 떠날 결심을 하도록 만들었다.

1766년 Euler는 St. Petersburg로 돌아갔고, Frederick 대왕은 그의 이러한 이탈에 크게 진노하였다. 러시아로 돌아온 후 얼마 되지 않아 Euler는 병을 앓은 후 거의 완전히 실명하였다. Euler는 1771년에 자신의 집이 화재로 파괴되면서 자신과 수학 원고들만을 겨우 구할 수 있었고, 이 화재가 있은 지 얼마 후 받은 백내장 수술은 그의 시력을 며칠 동안 회복시켰지만, 몸조리를 하는데 실패하여 시력을 완전히 잃게 되었다. 그럼에도 불구하고 그의 뛰어난 기억력 덕택에 광학, 대수학, 달 운동에 관한 연구 등을 계속할 수 있었다.

Euler가 St. Petersburg로 돌아온 후(59세), 놀랍게도 그는 완전한 실명에도 불구하고 그의 전체 업적의 거의 절반을 수행하였다. 물론 실명으로 인하여 Euler가 이러한 주목할 만한 수준의 연구 결과를 누군가의 도움 없이 이룩하지는 못하였다. 그는 1766년에 St. Petersburg Academy의 물리학 분야에 임명되어 1769년에 그 Academy의 사무관이 되었던 아들 Johann Albrecht와 직업 군인이었던 아들 Christoph의 도움을 받았다. 또한 Euler는 St. Petersburg Academy 회원인 Krafft와 Lexell(1740-1784)의 도움을 받았으며, 1772년에 스위스로부터 St. Petersburg Academy에 초청된 젊은 수학자였던 Fuss(1755-1826)의 도움을 받았다. Euler의 외손자였던 Fuss는 1776년에 그의 조수가 되었고, 이 때의 상황을 Yushkevich(1906-1993)는 다음과 같이 적고 있다.

Euler를 돕던 과학자들은 더 이상 비서가 아니었다. Euler는 연구의 일반적인 개요를 그들과 함께 토의했으며, 그들은 Euler의 생각을 발전시켰고 표를 계산하고 때로는 예제들을 수집하기도 하였다.

예를 들어, Euler는 1772년에 출판된 달의 운동에 관한 775쪽 분량의 연구에서 Albrecht, Krafft, 그리고 Lexell을 신뢰하였다. Fuss는 1776년에 출판된 보험에 관한 중요한 연구를 포함하여 자신이 Euler의 조수로 일했던 약 7년여 동안 Euler가 250편 이상의 논문을 준비하는 것을 도왔다. Yushkevich는 Euler가 죽던 날을 다음과 같이 묘사하고 있다.

1783년 9월 18일, Euler는 평소와 같이 오전을 보냈다. Euler는 자신의 손자들 중 한 명에게 수학을 가르쳤고, 기구의 운동에 관하여 칠판 두 개 분량의 계산을 했으며, Lexell과 Fuss와 함께 최근에 발견된 행성인 천왕성에 대해 토론하였다. 오후 5시 경에 Euler는 뇌출혈이 있었고, 의식을 잃기 전에 “I am dying.”이라고만 말하였다. Euler는 그날 저녁 11시 경에 죽었다.

Euler가 죽고 난 후에도 St. Petersburg Academy는 Euler의 출판되지 않은 연구들을 출판하는 일을 거의 50년 동안 계속하였다. Euler는 함수 기호로 $f(x)$ (1734), 자연로그의 밑수 $e$ (1727), $-1$의 제곱근 $i$ (1777), 원주율 $\pi$, 합기호 $\sum$ (1755), 유한 차분 기호인 $\triangle y$ 와 $\triangle^2 y$ 등을 정의하였다.

Euler의 업적 중 일부를 좀 더 자세히 살펴보자. 먼저 정수론에서의 그의 연구는 Goldbach에 의해 고무된 듯이 보이지만, 아마도 처음에는 Bernoulli가 정수론에서 가졌던 관심에서 기인했을 것이다. 1729년에 Goldbach는 Euler에게 "$n$ 이 2 의 거듭제곱수이면 $2^n+1$ 은 소수(prime)이다."라는 Fermat(1601-1665)의 추측에 대해 어떻게 생각하는지를 물었다. 이에 대해 Euler는 $n=1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16$ 일 때 성립함을 보였고, 1732년에 그 다음의 경우에 해당하는 $2^{32}+1=4294967297$ 이 641 으로 나누어져서 소수가 아님을 보였다. 또한 Euler는 Fermat의 또 다른 증명되지 않은 결과들을 연구하던 중에 $k$ 와 $n$ 이 서로 소(coprime)이면서 $1 \leqq k \leqq n$ 을 만족시키는 양의 정수 $k$ 의 개수를 대응시키는 Euler phi 함수인 $\phi(n)$ 을 소개하였다. 1749년에 Euler는 Fermat의 주장들 중 하나를 증명했는데, 그 내용은 "$a$ 와 $b$ 가 서로 소이면 $a^2+b^2$ 은 더 이상 $4n-1$ 로 나누어지지 않는다."는 것이다.

무엇보다도 젊은 시절 Euler에게 가장 훌륭한 명성을 가져다준 결과는 이른바 Basel 문제에 관한 그의 해법일 것이다. 이 문제는 무한급수 $\zeta(2)=\sum\ (1/n^2)$ 의 합을 위한 닫힌 형식을 찾는 것이었는데, Jacob Bernoulli, Johann Bernoulli, Daniel Bernoulli를 포함한 다수의 최고의 수학자들을 굴복시켰던 문제였다. 또한 이 문제는 Leibniz(1646-1716), Stirling(1692-1770), De Moivre(1667-1754) 등에 의해서도 연구되었지만 모두 실패하였다. 1735년에 Euler는 $\zeta(2)=\pi^2/6$ 임을 보였고, 그 이후 계속된 연구를 통하여 $\zeta(4)=\pi^4/90$, $\zeta(6)=\pi^6/945$, $\zeta(8)=\pi^8/9450$, $\zeta(10)=\pi^{10}/93555$, $\zeta(12)=691\pi^{12}/638512875$ 를 증명하였다. 1737년에 Euler는 유명한 관계식

$$\zeta(s)=\sum\ (1/n^s)=\prod(1-p^{-s})^{-1}$$

에서 소수들의 급수와 관련한 zeta 함수의 연관성을 증명하였다. 위의 관계식에서 곱은 소수 전체에 대해서인 데 반하여, 합은 자연수 전체에 대한 합을 의미한다. 1739년 Euler는 Bernoulli number들의 항으로 $\zeta(2n)=C\pi^{2n}$ 을 만족시키는 유리계수 $C$를 발견하였다.

무한급수에 관한 Euler의 또 다른 연구로써 1735년에 $n \to \infty$ 일 때

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log_e n$$

의 극한이 존재함을 보이는데 그의 유명한 Euler 상수를 도입하였다. Euler는 이 상수를 소수점 이하 16자리까지 계산하였다. 또한 Euler는 Fourier 급수를 연구했으며, 1744년에 Goldbach에게 보낸 편지에서 대수적 함수를

$$\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}=\sin x+\frac{(\sin 2x)}{2}+\frac{(\sin 3x)}{3}+\cdots$$

의 급수로 표현한 최초의 인물이었다. 대부분의 Euler의 연구에서처럼 그 결과가 발표되기 까지는 어느 정도의 유예 기간이 있었지만, 이 결과는 1755년이 되어서야 비로소 발표되었다. Euler는 멱들의 역수들의 합, 조화급수, Euler의 상수 및 급수와 관련한 자신의 또 다른 연구 결과들을 Stirling에게 알리기 위해 1736년 6월 8일 편지를 다음과 같이 상세히 적었다([3]).

매우 느리게 수렴하는 급수의 합과 관련하여, 지난 해 나는 아주 다양한 급수들의 합을 별 어려움 없이 충분히 정확하게 구할 수 있는 특별한 방법에 관해 강의한 적이 있다.

그러면서 그는 오늘날 'Euler-Maclaurin(1698-1746)의 합 공식'으로 불리고 있는 바에 관한 설명을 계속하였다. 그로부터 2년 뒤에 Stirling은 Euler에게 다음과 같은 답신을 하였다.

……. Maclaurin은 유율(fluxions)에 관한 책을 출판하려고 한다. …… 그는 각 항들을 미분하는 방법으로 급수의 합을 계산하는 두 개의 정리를 갖고 있는데, 그 중에 하나는 당신이 내게 보낸 것과 같은 결과이다.

Euler는 다음과 같이 답장을 하였다.

……. 나는 저명한 Maclaurin의 명성을 손상시키고 싶지 않다. 왜냐하면 그는 아마도 나보다 먼저 급수의 합에 관하여 나와 똑같은 정리를 생각해 냈을 것이기 때문이다. 따라서 그는 이 정리의 최초 발견자로 명명될 가치가 있다. 나는 그 정리를 약 4년 전쯤에 발견했고, 또한 그 때쯤에 나는 그 정리의 증명과 응용에 대하여 좀 더 상세히 다룬 적이 있다.

Euler의 정수론의 결과들 중의 일부는 이미 위에서 언급한 바 있다. Euler에 의한

정수론에서 보다 중요한 결과들은 Euler가 $n=3$인 경우에 대한 'Fermat의 마지막 정리'를 증명하는데 쓰였다. 여기서 그 결과보다 더 주목 받는 것은 아마도 Euler가 정수 $a$와 $b$에 대하여 $a+b\sqrt{-3}$와 같은 형태의 수를 이용한 증명을 소개하였다는 사실이었다. 비록 이러한 접근에 문제가 있었지만, 이것은 궁극적으로 Fermat의 마지막 정리에 관한 Kummer(1810-1893)의 주요 연구와 환(ring)의 개념을 도입하는 계기가 되었다.

해석학(Analysis)이 Euler에 의해 시작되었다고 주장하는 사람들도 있다. 1748년 'Introductio in analysin infinitorum'에서 Euler의 함수의 정의는 Johann Bernoulli의 생각을 보다 더 명확하며, 그는 해석학이 함수들에 관한 연구임을 명확히 밝혔다. 이 연구는 이미 행해졌던 기하학적인 곡선 상에서 보다 오히려 초등함수(elementary function)론에서의 미적분학에 기초하며 이 연구에서 Euler는 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ 임을 발견하였다.

1727년에 Euler는 $\ln(-1)=\pi i$ 임을 발견했음에도 불구하고, 'Introductio in analysin infinitorum'에서 양의 값만을 갖는 1변수 로그함수를 다루었다. 그는 1751년에 복소로그함수에 관한 이론을 발표하였다.

Euler는 복소변수해석함수들의 직교절선(orthogonal trajectory)과 지도 작성을 포함한 내용들을 연구하였다. D'Alembert가 수력동력학(hydrodynamics)을 연구하던 때인 1752년에 이미 Cauchy(1789-1857)-Riemann 방정식들을 발견하였으나, Euler는 1777년에 이들을 발견하였다.

1755년 Euler는 유한차분법에 관한 'Institutiones calculi differentialis'를 출판하였다. 이 연구에서 치환을 통한 미분이 어떻게 이루어지는지에 대하여 철저한 조사가 이루어졌다. 'Institutiones calculi differentialis(1768-1770)'에서 Euler는 초등함수들의 항들로 표현될 수 있는 적분에 관하여 연구하였고, beta함수와 gamma함수를 연구했는데, 1729년에 처음으로 이들을 소개하였다. Legendre(1752-1833)는 이들을 각각 1종과 2종의 Euler의 적분이라 불렀지만, Binet(1786-1856)와 Gauss는 여기에 각각 beta 함수와 gamma 함수라는 이름을 붙였다. 이러한 연구 중에 Euler는 이중적분을 연구했을 뿐만 아니라 상미분방정식과 편미분방정식을 고찰하였다.

변분법은 Euler가 기초적인 발견들을 이룩한 또 다른 영역이다. 그의 'Methodus inveniendi lineas curvas ……'는 변분법에 관하여 연구하기 시작한 1740년에 출판되었다. Carathéodory(1873-1950)는 이것을 "지금까지 쓴 가장 아름다운 수학적 업적들 중의 하나"라고 생각하였다([4]).

수리물리학에서의 문제들은 Euler로 하여금 미분방정식에 관한 폭넓은 연구를 하도록 이끌었다. Euler는 상수계수를 갖는 선형방정식, 변수계수를 갖는 2계 미분방정식, 미분방정식의 멱급수 해, 상수의 변분방법, 적분인자, 근사해방법 등을 비롯한 많은 것들을 고찰하였다. Euler는 진동하는 얇은 막을 연구하던 중에 자신이 Bessel(1784-1846) 함수들을 고안하여 해결한 Bessel 방정식에 심취되기도 하였다.

Euler는 곡면에 관한 이론과 곡면의 곡률을 연구하는 미분기하학에 상당한 기여를 하였다. 이 영역에서 Euler에 의하여 출판되지 않은 많은 결과들은 Gauss에 의해 재발견되었다. 다른 기하학적인 연구들은 Euler를 다면체에 관한 Euler 지표와 같은 위상수학에서의 기본적인 사고로 이끌었다.

1736년에 Euler는 역학 분야에 큰 발전을 가져온 'Mechanica'를 출판하였다. Yushkevich는 이에 대해 다음과 같이 기술하였다.

이전의 것들과 비교해서 역학 분야에서의 Euler의 연구의 두드러진 특징은 해석학에 관한 체계적이고 성공적인 응용이다. 이전의 역학에 관한 방법들은 대부분 통합적이고 기하학적이었다. 그들은 지나치게 개별적이어서 문제들을 세분하여 접근하는 것을 필요로 하였다. Euler는 역학에 일정한 해석적 방법들을 도입함으로써, 역학 문제들이 분명하고도 직접적인 방법으로 해결될 수 있도록 하는 것의 중요성을 올바르게 인식한 첫 번째 인물이었다.

'Mechanica'에서 Euler는 진공 상태와 저항이 있는 상태에서의 매체의 점 질량(point mass)의 운동을 고찰하였다. Euler는 중심력(central force)하에 점 질량의 운동을 분석했으며, 또한 곡면 상의 점 질량의 운동을 고찰하였다. 이 이후의 논제에서 Euler는 미분기하와 측지선에 관한 다양한 문제들을 해결해야만 하였다. 'Mechanica'와 관련한 다음의 기록이 있다([1]).

이론역학과 응용역학에서 주목할 만한 이것은 Euler가 배의 추진력 문제에 관해서 열정을 다한 일이다. 이것은 최적의 배의 모양을 결정하는데 변분원리를 적용하고, 정수역학의 원리를 처음으로 수립하였다. …… 또한 여기서 Euler는 단단한 물체의 운동에 관한 미분방정식을 부분적으로 받아들여 단단한 물체의 운동학과 역학을 발전시키기 시작한다.

물론 정수역학은 Archimedes 이후로 계속 연구되어 왔지만, Euler에 의해 완성되었다. 1765년에 Euler는 역학에 관한 또 다른 주요 연구인 'Theoria motus corporum solidorum'을 발표했는데, 여기에서 Euler는 고체의 운동을 직선운동과 회전운동으로 분해 시켰다. Euler는 Euler의 각을 고려하여 춘분점 세차운동에 관한 문제에 의해 유발되었던 회전 문제를 연구하였다. 또한 유체역학에 관한 Euler의 연구는 매우 주목할 만하다. Euler는 1750년대에 연속방정식, Laplace(1749-1827) 속도 퍼텐셜 방정식, 그리고 무점성의 압축할 수 없는 유체의 운동에 관한 Euler 방정식과 같은 주제에 적합한 주요 공식들을 제안하는 연구물들을 다수 발표하였다. 1752년에 Euler는 다음과 같이 적었다.

유체에 관한 연구들은 Messrs Bernoulli, Clairaut(1713-1765), D'Alembert에 의해 절정에 이르렀음에도 불구하고, 이러한 연구들이 너무도 자연스럽게 나의 두 개의 일반적인 공식들로부터 유도되므로, 나의 두 개의 방정식을 이끌었던 원리들의 단순성과 그들의 깊은 심사숙고의 이러한 일치에 심히 감탄하지 않을 수 없다.

Euler는 다른 영역의 학문에도 기여했으며, 그 모든 영역에서 자신의 수학적 지식과 기술을 사용하였다. Euler는 천문학 분야에서도 적은 관측으로 혜성과 행성들의 궤도 결정, 태양의 시차 계산 방법, 대기차 이론, 혜성의 물리적 성질에 관한 고찰 등과 같은 중요한 업적을 남겼다. 그가 파리 과학 Academy로부터 많은 상을 수상토록 한 가장 뛰어난 연구들은 천체역학과 관련되어 있는데, 이것은 그 시대에 과학자들을 특히 매료시켰다. 사실 Euler의 달 이론은 Mayer(1723-1762)에 의해 그의 달 표(tables of the moon)를 작성하는데 사용되었다. 1765년에 Mayer의 미망인은 황경(黃經)을 결정하는 문제에서 만들어진 달 표에 기여한 공로로 영국으로부터 3000 파운드를 받았지만, Euler는 그 일에 대한 이론적 기여로 영국 정부로부터 300 파운드를 받았다.

Euler는 음악 이론에 관해서도 연구하였다. 특히 그는 1739년에 'Tentamen novae theoriae musicae'를 출판했는데, 여기에서 그는 음악을 수학의 일부로, 그리고 적절한 일체감과 뒤섞임으로 만족스러운 음색을 만들 수 있는 모든 것을 정확한 원리에 의거하여 규칙적인 방법으로 추론하도록 만들려고 노력하였다. 그러나 이러한 연구는 음악가들에게는 너무 수학적이고 수학자들에게는 너무 음악적이었다.

지도 작성은 Euler가 1735년에 St. Petersburg Academy의 지리학 분과의 감독관으로 임명되었을 때에 관여했던 또 다른 영역이다. Euler는 Delisle이 러시아 제국의 전체 지도를 준비하는 일을 돕는 특별한 임무를 수행하였다. 'Russian Atlas'는 이러한 공동 연구의 결과로 1745년에 출판된 것으로 전체 20장의 지도로 이루어져 있다. 이것의 출판이 있던 때까지 영국에 있었던 Euler는 이러한 연구가 지도 작성이라는 기술에서 러시아 사람들을 독일 사람들 보다 훨씬 앞선 위치에 있도록 했음을 자랑스럽게 여겼다.

## 3. 결론

Euler는 전무후무하게 많은 업적을 남긴 수학자로 알려져 있다. 그는 현대해석기하와 삼각법의 영역을 개척했으며, 기하학, 미적분학, 정수론의 결정적인 기틀을 마련하는데 기여한 바가 크다. Euler는 Leibniz(1646-1716)의 미분법과 Newton의 유율법을 수학적 분석으로 통합했으며, beta 함수, gamma 함수, 그리고 미분방정식을 위한 적분인자들을 소개하였고 연속체 역학, 달에 관한 이론, 3차원 문제, 탄성, 음향학, 빛의 파장 이론, 수리학, 음악 등의 광범위한 분야에서 괄목할 만한 업적을 이루었으며, 위상수학과 해석적 역학의 기초를 구축하였다.

**감사의 글** 끝으로 수학자의 이름과 외래어의 표기는 원어로 통일하였음을 알려드리며, 이 논문을 수정하고 보완하여 주신 심사 위원께 깊은 감사를 드립니다.

## 참고 문헌

1. Calinger, R., *Leonhard Euler*: The first St Petersburg years (1727~1741), Historia Mathematica 23 (1996)121-166.
2. Euler, L., *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis(The solution of a problem relating to the geometry of position)*, Commentarii Academiae Scinetiarum Imperialis Petropolitanae 8, 1736.
3. Loeffel, H., *Leonhard Euler (1707-1783)*, Mitt. Verein. Schweiz. Versicherungs math. (1)(1984) 19-32.
4. Thiele, R., *Leonhard Euler*, Leipzig, 1982.
5. Wilson, R. J. and Watkins J. J., *Graphs : an introductory approach : a first course in discrete mathematics*, New York Wiley, 1990.

*The Korean Journal for History of Mathematics* Vol. 19 No. 1 (Feb. 2006), 17-32

# Leonhard Euler, the founder of topology

Dept. of Math., Chungbuk National University **Sang Wook Kim**
Dept. of Math., Chungbuk National University **Seung On Lee**

Topology began to be studied relatively later than the other branches of mathematics, such as geometry, algebra and analysis. Leonhard Euler is generally considered to be the founder of topology. In this paper we first investigate the beginning of topology and its development and then study Euler's life and his achievements in mathematics.

*Key words*: History of Topology, Leonhard Euler.

2000 Mathematics Subject Classification: 01A05, 01A50, 01A70, 01A85.

ZDM Subject Classification: A30

논문접수 : 2005년 12월 23일 심사완료 : 2006년 1월