

---

# Max-Log-MAP 방식을 이용한 M-ary QAM Demapper의 성능

이상근\* · 이윤현\*\*

Performance of M-ary QAM demapper with Max-Log-MAP

Sang-Keun Lee\* · Yun-Hyun Lee\*\*

## 요 약

본 논문에서는 Max-Log-MAP 방식을 이용하여 M-ary QAM Demapper를 구성하고 이 출력을 터보 복호기에 입력시켜 반복 복호 결과를 보인다. Demapper는 일반적으로 널리 사용되는 Max-Log-MAP 방식과 이 방식의 구현 복잡도를 줄인 근사형 수식을 이용하고 실제 설계 방안도 제시한다. 컴퓨터 시뮬레이션 결과 Max-Log-MAP 방식에 비해 근사형 방식은 성능의 저하를 보이지만 설계 복잡도가 낮은 장점을 가지고 있다.

## ABSTRACT

In this paper, we present the performance of iterative decoding with a Turbo decoder and a M-ary QAM(Quadrature Amplitude Modulation) demapper. The demappers are designed with Max-Log-MAP algorithm and its approximated one. In addition, we provide implementing block for the approximated algorithm. From the results of computer simulations, the approximated algorithm of the Max-Log-MAP has little bit worse than the Max-Log-MAP but suggests low complexity for practical implementation.

## 키워드

Log likelihood ratio, QAM, demapper, Max-log-MAP

## I. 서 론

광대역 무선 전송을 위해서는 M-ary 변조 방식이 필수적이며 그 중에 QAM 방식은 무선 랜 802.11a/g 및 휴대 인터넷 WiBro 및 DVB-S 등에 표준으로 채택이 될 만큼 많은 주목을 받고 있고 널리 응용이 되고 있다. 그러나 QAM 전송은 페이딩이나 잡음들의 영향을 많이 받고 안정적인 수신 성능을 확보하기 위해서는 높은 신호대 잡음비(SNR: signal to noise ratio)을 요구한다. 이런 단점을 보완하기 위해서 반복 복호화 기법을 이용하면 터보 부호나

LDPC(low density product code) 등 채널 부호화의 높은 부호화 이득을 얻을 수 있기 때문에 광대역 전송에 적합한 전송시스템이 된다.

반복 복호기는 이진 데이터의 반복 복호에 적합한 이진 반복 복호기 등이 과거에 많이 연구되었다[1-3]. 그러나 M-ary 변조 방식을 사용하기 위해서는 이진 반복 복호기로 신호를 전달하기 전에 한개의 심벌을 구성하는 비트들에 대한 정보를 추출할 필요가 있다. 이 정보를 추출하는 방법에는 Log-MAP 계열 알고리즘과 신호 공간 분할 방법등을 이용할 수 있다[4-8]. 특히, Max-Log-MAP 방식

---

\* 청강문화산업대학 이동통신과 교수

\*\* 한국항공대학교 전자·정보통신·컴퓨터공학부 교수

[8-9]과 이 방식의 근사식[10]을 이용한 M-ary 부호화된 M-ary QAM 심벌에서 비트 정보를 추출할 수 있는 수식들이 발표되었다.

본 논문에서는 Gray 부호화된 M-ary QAM 신호를 위한 근사 Max-Log-MAP 알고리즘의 구현 방법을 제시하고, Log-MAP 알고리즘에서 대수(log) 계산의 복잡도를 혁신적으로 줄인 Max-Log-MAP 방식을 이용한 M-ary QAM Demapper 성능을 분석한다.

## II. 시스템 모델

송신되는 M-QAM 신호는  $m = \log_2 M$ 개의 비트들이 부호어 (codeword)를 형성하여 한개의 신호 심벌로 구성된다. 이때 심벌을 구성하는 비트들은 Gray 매핑 규칙에 따라 할당이 된다. 따라서 M-QAM의 신호 성상도는 I 채널과 Q채널을 따라 2차원으로 배치되며, I 채널과 Q 채널에 배치된 신호점의 수가 같으면 정사각 QAM, 서로 다르면 직사각 QAM이 된다. 그림 1은 16-QAM의 신호 성상도를 보여준다 [11].

그림 1에 표시된  $i_k$ 와  $q_k$ 는 I 채널과 Q 채널에 할당된 비트들 중  $k$ 번째 비트가 1인 경우를 나타낸다. 그림 1과 같이 만일 I 채널과 Q 채널에서 신호점을 배치할 때 동일한 간격으로 배치를 한다면, 각각의 채널은 독립적으로 Gray 부호화된 I 채널 PAM과 Q 채널 PAM으로 나누어 각 채널별로 해석을 한 후 그 결과들은 더하여 QAM에 적용하여도 일반성을 잃지 않는다. 따라서, 본 논문에서는 Gray 부호화된 PAM에 대해 분석을 한 후 이 결과를 QAM에 적용한다.

PAM 신호 공간상의 신호점 수가  $U$  개 이고  $K = \log_2 U$  비트로 구성된 부호어의 심벌 데이터는 1차원 신호의 성상도상의 한 점에 사상된다. 여기서 부호어  $c = \{b_0, b_1, \dots, b_{K-1}\}$ 이고, 이때 각 심벌에 비트 값들을 배정할 때 Gray 매핑 규칙을 적용하면 부호어를 구성하는 비트에 따라 특정값을 기준으로 좌/우 신호 공간은 선대칭 관계를 갖는다.

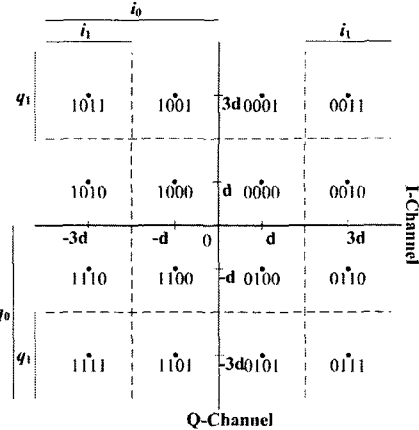


그림 1. Gray 부호화된 16-QAM의 신호 성상도  
Fig. 1 Signal constellation of a Gray coded 16-QAM

그림 2는 Gray 부호화된 8-PAM의 성상도와 각 비트별 그룹을 표시한 것이다.

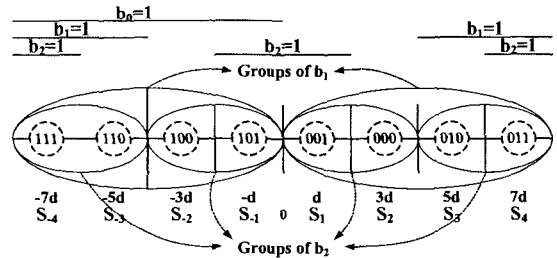


그림 2. 8-PAM의 성상도와 비트 그룹 정의 ( $b_0, b_1, b_2$ )

Fig. 2 8-PAM constellation and the definition of bit group ( $b_0, b_1, b_2$ )

예를 들어 그림 2에서 심벌을 구성하는 비트들 중  $b_1$  비트 값의 배치는 PAM 신호 공간에서 볼 때 원점 0을 기준으로 좌우 대칭이 된다. 또, 좌측 신호 공간에 존재하는  $b_1$ 의 신호 공간은  $-4d$  만큼, 우측의 신호공간은  $+4d$ 만큼  $b_0$  신호 공간을 원점을 기준으로 하여 좌측으로  $2d$ 만큼 좌표축 이동을 시킨 것과 동일함을 알 수 있다. 이때, 좌측과 우측 각각의 공간은 2-PAM의 신호 공간에서 비트 값의 배치와 동일하거나 선대칭임을 알 수 있고, 여기서 이들을 각각의 비트 그룹이라고 정의한다.

### III. Gray 부호화된 PAM 신호의 Demapper

#### 1. Max-Log-MAP을 이용한 Demapper

수신된 Gray 부호화된 PAM 신호의 비트 가정 (hypothesis)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$H_i: z = a \cdot s + n \quad (1)$$

여기서  $s, z, a$  그리고  $n$ 은 각각 송신된 신호, 수신된 심벌의 값, 채널 이득, 그리고 분산이  $\sigma^2$ 이고 평균이 영(0)인 AWGN이다. 송신된 U-PAM 심벌은 집합  $\{S_0, S_1, \dots, S_{U-1}\}$  중 하나이고,  $s = f(b_0, b_1, \dots, b_{K-1})$ 이다. 이때,  $f(\cdot)$ 는 Gray 부호 매핑 함수이다.

채널 이득  $a$ 가 상수인 경우는 AWGN 채널이 정의된다. 따라서, 정확한 채널 정보를 알 수 있을 경우 수신된 U-PAM 심벌을 구성하는  $K$  개의 비트 쌍 중에서  $k$  번째 비트의 LLR  $\Lambda(b_k)$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$\Lambda(b_k) = \left( \frac{\sum_A \Pr\{A|z\}}{\sum_B \Pr\{B|z\}} \right) \quad (2)$$

여기서  $A \in \{s: b_k = +1\}$ ,  $B \in \{s: b_k = -1\}$ 이다. 식 (2)에서 심벌에 포함되어 있는  $K$ 개의 비트들을 고려하여 Bayes 정리와 근사 정리  $\ln \sum_j \exp(-a_j) \approx \max(-a_j) = -\min(a_j)$ 를 적용하면 [12]

$$\begin{aligned} \Lambda(b_k) &\approx \frac{1}{2\sigma^2} \left[ \min_B |z - B|^2 - \min_A |z - A|^2 \right] \\ &= \frac{1}{2\sigma^2} \left[ \min_B (B^2 - 2Bz) - \min_A (A^2 - 2Az) \right] \end{aligned} \quad (3)$$

이 된다.

식 (3)를 Gray 부호화 특성을 적용하면

$$\Lambda(b_k) = P_k \cdot C_k \cdot d_{\max, k} \{d_{\min, k} - |y|^2\} \quad (4)$$

과 같이 쉽게 구할 수 있다[13]. 여기서

- 1)  $y$ 는 수신된 심벌 영역이  $k$ 번째 비트의 그룹을 좌표축 이동 거리만큼 보정한 값이다.
  - 2)  $P_k$  보정된 심벌값 보호값을 의미
  - 3)  $C_k$ 는 그룹의 비트 배열 형태가 2-PAM과의 일치여부(일치:+1, 불일치:-1)
  - 4)  $d_{\max, k}$ 는 수신된 신호가 속하는 해당 비트 그룹에서 비트 경계값과 가장 먼 거리 값
  - 5)  $d_{\min, k}$ 는 수신된 심벌이 가지는 그룹 영역에서 비트 경계값과 가장 먼 거리 값을 의미한다.
- 식 (4)의 결과는 식 (5)와 같이 얻어진다. 또한, Gray 부호화된 PAM 신호의 경우 식(4)는 식(3)과 동일한 결과를 제공한다 [13].

$$\begin{aligned} \Lambda(b_0) &= \begin{cases} -dz & , |z| \leq 2d \\ 2d(d-z) & , 2d < z \leq 4d \\ 3d(d-z) & , 4d < z \leq 6d \\ 4d(d-z) & , z > 6d \\ -2d(d+z) & , -4d \leq z < -2d \\ -3d(d+z) & , -6d \leq z < -4d \\ -4d(d+z) & , z < -6d \end{cases} \\ \Lambda(b_1) &= \begin{cases} -2d(3d-|z|) & , |z| \leq 2d \\ -d(4d-|z|) & , 2d < |z| \leq 6d \\ -2d(5d-|z|) & , |z| > 6d \end{cases} \quad (5) \\ \Lambda(b_2) &= \begin{cases} d(2d-|z|) & , |z| \leq 4d \\ -d(6d-|z|) & , 4d < |z| \end{cases} \end{aligned}$$

#### 2. 근사 Max-Log-MAP을 이용한 Demapper

식 (4)에서 새롭게 제시된 수식은 식(3)에 비해 실질적인 구현에 있어  $\max()$  함수를 대수식으로 풀 수 있기 때문에 구현 복잡도를 현저히 줄일 수 있다. 하지만 한 개의 심벌을 구성하는  $K$ 개의 비트에 대한 정보를 분리 추출하기 위해서는 단순히 보면  $K$ 개의 비트 정보 연산을 위한 경로가 필요함을 알 수 있다. 그러므로 좀더 구현 복잡도를 줄이기 위해 (3)과 (4) 식의 결과를 이용하여 수식을 좀더 단순화 시킨 방법이 제안되었다[10].

그림 2에 예로써 보인 8-PAM 신호를 수신할 때 수신된 신호를  $d=1$ 로 정규화 시켜 식(5)를 근사화 시키면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Lambda(b_0) &\approx -z \\ \Lambda(b_1) &\approx -(4-|z|) \\ \Lambda(b_2) &\approx -[|z|-4|+2] \end{aligned} \quad (6)$$

따라서, 식(6)을 일반 U-PAM에 적용할 수 있는 식으로 다시 정리하면

$$\Lambda(b_k) = \begin{cases} -z & , k=1 \\ -|\Lambda(b_k)| + \alpha_k & , k>1 \end{cases} \quad (7)$$

이 된다. 여기에서  $\alpha_k$ 는 비트 그룹 영역 길이의 절반이다. 예를 들어 그림 2에서 비트  $b_1$ 의 그룹은 각 그룹의 영역 길이가 8이므로  $\alpha_1 = 4$ , 비트  $b_2$ 의 그룹은 각 그룹의 영역 길이가 4이므로  $\alpha_2 = 2$ 이다.

식(7)과 식(4)를 비교했을 때 근사화 수식인 식(7)이 구현 복잡도 면에서 간결하게 되는 장점이 있지만, 이 수식은 순차적이고 반복적인 연산으로 인하여 동시에 각 비트별 정보 추출을 할 수 없고 식(4)에 비해 결과를 얻는데 좀더 많은 시간이 필요하다.

근사 Max-Log-MAP의 표현인 식(7)을 구현하기 위해서는 각 비트의 영역 길이를 연산하여  $\alpha_k$ 를 먼저 계산하여야 하고,  $k$  번째 비트의 정보를 추출하기 위해서는  $k-1$  번째 비트의 계산 결과와  $k$  번째 비트에 해당하는  $\alpha_k$ 를 계산하여 최종 비트가 출력이 될 때까지 재귀적으로 반복 계산 하는 구조로 설계가 되어야 한다. 그림 3은 재귀적 방식으로 설계된 근사형 Max-Log-MAP의 demapper를 보여준다.

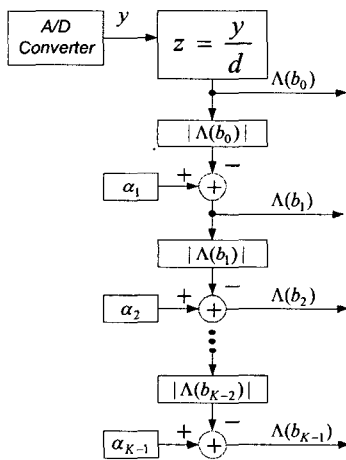


그림 3. Gray 부호화된 PAM의 Demapper 설계 구조  
Fig. 3 A demapper structure for a Gray coded 8-PAM signal with approximated Max-Log-MAP

#### IV. 수치 계산 및 결과

본 논문에서는 Max-Log-MAP 알고리즘과 이것의 근사형 알고리즘을 각각 이용하여 M-ary QAM 심벌 신호를 비트 정보로 변환하는 방법에 대해 논하였다. 이 장에 결과를 이용하여 터보 복호를 했을 경우의 비트율을 비교하고 이들 알고리즘간의 차이를 보인다.

그림 4와 5는 16-QAM과 64-QAM 신호들에 대하여 터보 복호의 결과들을 반복수에 따라 비교한 것이다. 그림 4에서 볼 수 있듯이 Max-Log-MAP과 그 근사형의 결과는 거의 같다. 그러나, 그림 5의 64-QAM의 경우에는 Max-Log-MAP 알고리즘이 근사형에 비해 BER이 10-4에서 약 0.2dB정도 성능이 좋음을 보인다. 이것은 Gray 부호화 결과의 특징에 따라 수신된 심벌을 구성하는 부호어의 비트

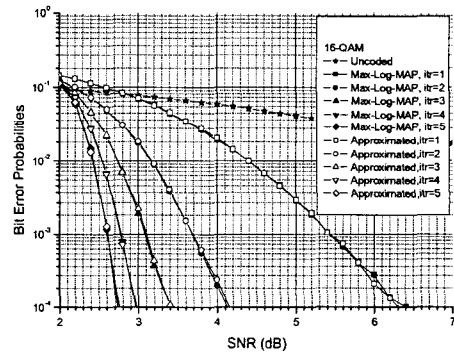


그림 4. 16-QAM의 성능 비교  
Fig. 4 Performance comparison of 16-QAM between Max-Log-MAP and its approximated algorithm

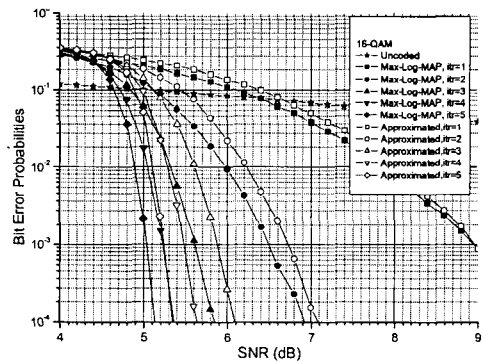


그림 5. 64-QAM의 성능 비교  
Fig. 5 Performance comparison of 64-QAM between Max-Log-MAP and its approximated algorithm

들 중 증가되는 비트들의 영역이 줄어들게 되고, 이러한 영향이 두 알고리즘의 성능의 차로 나타나게 된 것이다.

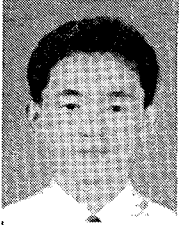
## V. 결 론

본 논문에서는 Max-Log-MAP과 그 근사 알고리즘들의 특성과 성능에 대해 논하였다. 또한, 근사형 알고리즘들의 실제 설계 방법을 제시하였다. Max-Log-MAP 알고리즘의 성능이 심벌을 구성하는 비트의 수가 증가 할수록 근사형에 비해 좋지만 해당되는  $K$ 개의 각각 서로 다른 비트 정보 추출하는 경로를 가져야 하기 때문에 복잡도가 근사형에 비해 큼을 알 수 있다. 그러나, 근사형 알고리즘은 복잡도가 낮은 대신 앞서 계산한 비트 정보 값을 다음 비트 정보 추출에 사용해야 하기 때문에 재귀적인 방식으로 계산을 할 때 필연적인 시간 지연이 문제가 될 수 있다.

## 참고문헌

- [1] P. Roberson and T. Worz, "A Novel Bandwidth Efficient Coding Scheme Employing Turbo Codes," *ICC 96*, pp. 962-967, June 1996.
- [2] S. Benedetto, D. Divsalar, G. Montorsi, and F. Pollara, "Parallel Concatenated Trellis Coded Modulation," *ICC 96*, pp. 974-978, June 1996.
- [3] C. Fragouli and R. Wesel, "Turbo-encoder design for symbol - interleaved parallel concatenated trellis - coded modulation," *IEEE Trans. on Comm.*, vol. 49, no. 3, pp. 425-435, Mar. 2001.
- [4] A. J. Viterbi, J. K. Wolf, E. Zehavi and R. Padovani, "A pragmatic approach to trellis-coded modulation," *IEEE Comm. Magazine*, vol. 27, no. 7, pp. 11-19, July 1989
- [5] S. Le Goff, A. Glavieux and C. Berrou, "Turbo-Codes and high spectral efficiency modulation," *ICC '94*, pp. 645-649, May 1994.
- [6] R. Pyndiah, A. Picart and A. Glavieux, "Performance of block turbo coded 16-QAM and 64-QAM modulations," *GLOBECOM '95*, pp 1039-1043, Nov. 1995.
- [7] C. C. Wang, "A Bandwidth-Efficient Binary Turbo Coded Waveform Using QAM Signaling," *ICCCS 02*, pp. 37-41, June 2002.
- [8] R. M. Pyndiah, "Near-Optimum Decoding of Product Codes: Block Turbo Codes," *IEEE Trans. on Comm.*, vol. 43, no. 8, pp. 2360-2369, Aug. 1995.
- [9] P. Robertson, E. Villebrun and P. Hoeher, "A comparison of optimal and sub-optimal MAP decoding algorithms operating in the log domain," *ICC 95*, pp. 1009-1013, June 1995.
- [10] F. Tosato and P. Bisaglia, "simplified soft-output demapper for binary interleaved COFDM with application to HIPERLAN/2," *ICC 2002*, vol. 2, pp. 664-668, 2002.
- [11] W. J. Weber III, "Differential encoding for multiple amplitude and phase shift keying systems," *IEEE Trans. on Comm.*, vol. 26, no. 7, pp. 385-391, Mar. 1978.
- [12] A. J. Viterbi, "An Intuitive Justification and a Simplified Implementation of the MAP decoder for Convolutional Codes," *IEEE J. on Sel. Areas in Comm.*, vol. 16, no. 2, pp. 260-264, 1998.
- [13] 유창완 외 4인, "Gray 부호화된 QAM 신호를 위한 소프트 Demapper," 대한전자공학회 통신소사이어티 하계학술대회 논문집, 제 28 권, 제 1 호, pp. 95-98, 2005.

저자소개



이 상 근(Sangkeun Lee)

1984년 2월 : 한국항공대학교  
항공전자공학과 (공학사)  
1986년 12월 : 한국항공대학교  
항공전자공학과 (공학석사)  
1985년 ~ 1989년 : 동양정밀  
중앙연구소 군통신개발

1989년 ~ 1996년: 삼성전자 통신연구소 cdma 시스템 개발  
1996년 10월 ~ 2002년 2월 : KTF 무선망기술팀장  
2002년 3월 ~ 현재 : 청강문화산업대학 이동통신과 교수  
※ 관심분야: 이동통신 무선접속기술, 이동통신 RF 시스템



이 윤 현(Yoon Hyun Lee)

1965년 2월 : 한국항공대학교  
전자공학과 (공학사)  
1985년 2월 : 경희대학교 대학원  
전자공학과 (공학박사)  
1980년 ~ 현재 : 한국항공대학교  
전자·정보통신·컴퓨터공  
학부 교수

※ 관심분야: 초고주파 회로 설계, 마이크로파 및 광통신,  
안테나 및 전파 전파, EMI/EMC