

수중 노즐에서 발생하는 기포의 형상 및 음향 특성 연구

Investigation on Shapes and Acoustic Characteristics of Air Bubbles Generated by an Underwater Nozzle

김 중 철* · 오 준 석* · 조 대 승**

Jong Chul Kim, Joon Seok Oh and Dae Seung Cho

(2005년 11월 22일 접수 : 2006년 2월 1일 심사완료)

Key Words : Air Bubble(기포), Underwater Nozzle(수중노즐), Acoustic(음향), Measurement(계측), Resonance Frequency(공진주파수)

ABSTRACT

It is well known that the acoustic characteristics of the sea are significantly affected by bubbles which have their own inherent characteristics at the undersea. In this study, the shape and acoustic characteristics of air bubbles generated by an underwater nozzle are calculated numerically, and are measured with a high speed camera and a hydrophone at various air flow rates in the experimental apparatus. As a result of analysis, the shape calculated numerically well matched with measured values at low flow rates, but in case of relatively higher flow rates, the use of correction coefficient is needed for more accurate estimation of the bubble shape. And also the rising velocity of a single bubble is constant regardless of both the bubble size and the flow rate, and the acoustic signal generated when the bubble is produced by an underwater nozzle has the same characteristic of natural frequency of the bubble pulsation, and is agreed with Minnaert's equation if the correction coefficient is considered in accordance with the flow rate.

1. 서 론

해양의 수중에는 많은 기포들이 다양한 형태로 발생한다. 주로 해수 표면 바로 아래에서 수면파가 부서져 생성되며, 강우에 의해서 또는 선박이 지나가거나 잠수함의 밸러스트 탱크의 배수에 의해 기포가 생성되어 장시간 소멸되지 않고 지속된다. 이러한 기포의 크기는 해수의 체적에 비하여 매우 미소하나, 기포 속의 공기가 해수와 비교하여 밀도 및 압축률에 많은 차이가 있기 때문에 해양의 음파 전달에 있어서

수면 근처에 분포한 기포의 영향을 무시하지 못하는 것으로 알려져 있다. 일반적으로 수중에서 발생하는 기포는 선박의 음향 센서나 장비의 성능 저하에 영향을 미치고 있으나 기포의 특성을 이용하여 유익한 분야에 적용할 수 있는 여러 가지 방안에 대한 연구도 진행되고 있다.^(1, 2)

수중에 있는 기포는 주위 해수와 기포의 유효질량과의 관계에 의해 맥동하는 고유한 주기를 가진다. 이것을 기포의 공진주파수라고 하는데, Minnaert가 기포를 둘러싸고 있는 유체의 동적 에너지와 기포내 압축공기의 포텐셜 에너지를 수식화하여 기포의 반경과 공진 주파수와의 관계를 정립하였다.⁽³⁾ 또한, 이러한 수중기포가 맥동하는 공진 특성을 이용하여 수중의 기포 크기가 어떻게 분포하고 있는지 예측 연구가 진행되어 해양의 음향자료를 이용하여 해수 내에 분포하고 있는 기포의 특성을 추정하는 기법에 대한 다

* 책임저자 : 정희원, 국방과학연구소 제2체계개발본부
E-mail : jckim@add.re.kr

Tel : (055) 540-6821, Fax : (055) 542-3737

* 국방과학연구소 제2체계개발본부

** 정희원, 부산대학교 조선해양공학과

양한 연구방법이 제안되기도 하였다.⁽⁴⁾

수중기포가 생성되면서 발생하는 음향에 대해서는 기포의 생성 형태 즉, 해양파의 운동, 계곡을 흐르는 물이나 강우에 의해 발생하는 기포에 대한 연구가 진행되어 왔으며,^(5, 6) 압축공기에 의해 생성되는 기포에 대한 형성 원리와 방사되는 음향에 대해서는 Strasberg와 Longuet-Higgins 등에 의해 연구가 되었다.^(7, 8) Strasberg는 기포 생성시 발생하는 음압을 반경방향으로 체적이 맥동하는 운동방정식으로 표현하여 기포가 형성될 때의 소요시간과 체적변화량으로 기포에서 방출되는 음압을 계산하기도 하였으며, Longuet-Higgins는 기포의 형상 변형에 따른 에너지의 이동에 따라 음향이 발생하는 원리에 대하여 설명하였다. 또한 Manasseh 등은 기포의 목(neck)이 노즐로부터 분리되는 과정에서 기포의 끝단이 수축되어 초기 음향신호의 압력강하 현상이 일어나고 이탈된 직후에는 기포를 관통하는 유체의 제트 현상에 의해 초기 피크가 일어남을 확인하였다.⁽⁹⁾

수중 노즐에서 방출되는 압축공기에 의해 생성되는 수중기포의 형상에 대한 연구는 공기 중에 수직으로 매달려진 튜브로부터 물방울이 떨어지는 원리와 기포의 형상이 유사하고 물방울과 수중 기포 두 경우에 있어서 단지 접촉각이 다르고 그에 따라 다른 해를 가진다는 것에 착안하여 Longuet-Higgins가 제안하였다.^(10, 11)

이 연구에서는 수중의 노즐에서 방출되는 압축공기에 의해 생성되는 기포의 형상과 음향 특성에 대하여 고찰하였다. 이를 위하여 물방울이 떨어지는 동일한 원리로 기포가 생성될 때의 압력과 표면장력을 고려하고 기포표면을 수식화하여 수치 계산하였다. 또한 실험을 위해 공급되는 압축공기의 유량이 정밀 제어되는 기포발생장치를 제작한 후 고속카메라를 이용하여 기포가 생성되는 장면과 상승 속도를 계측하였고, 이와 동시에 수중청음기를 설치하여 노즐에서 기포가 생성될 때 방출되는 음향신호를 수집·분석하여 수치 계산으로 예측된 기포의 형상에 따른 음향 주파수 특성과 비교 분석하였다.

2. 수중 기포의 음향주파수와 형상

2.1 기포의 음향주파수

수중의 단일 기포는 자체의 반경방향 운동에 의해 음향을 방출하며 기포내부의 기체와 주변 유체사이의

열교환이 없다고 가정한 단일기체의 관계를 이용하여 방출하는 음향의 주파수는 식 (1)과 같이 표현된다. 이 주파수를 기포의 공진주파수라고도 한다.⁽³⁾

$$f = \frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{3\gamma p}{\rho}} \quad (1)$$

여기서, p 는 기포주위 매질(유체)의 평형압력, γ 는 기포내부 기체의 비열비(the ratio of specific heats), ρ 는 기포주위 매질의 밀도, a 는 기포의 반경이다. 따라서 기포가 분포한 주변 해수 중의 압력이 1기압이라면, 기포의 공진 주파수는 약 $f=3.3/a$ 로 주어진다.

2.2 기포의 형상

수중의 노즐에서 발생하는 기포에 대하여 정적인 문제로 가정하여 유체의 속도를 무시할 수 있으며, Fig. 1과 같이 기포의 형성모양을 도시할 수 있다. Fig. 1의 원점 O를 기포의 상부 정점으로 잡고, 대칭인 x축과 원주방향을 y축으로 잡을 수 있다. 임의 기포막 M에서 유체상의 압력을 p_a 라 두면,

$$p = p_0 + \rho g x \quad (2)$$

여기서, p_0 는 원점 O에서의 압력이다. 기포를 둘러싸고 있는 막의 표면장력에 의한 압력 p_s 은

$$p_s = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (3)$$

여기서, R_1, R_2 는 각각 기포 표면 곡면상의 최소와 최대 곡률반경이고, σ 는 기포의 표면장력으로 1로

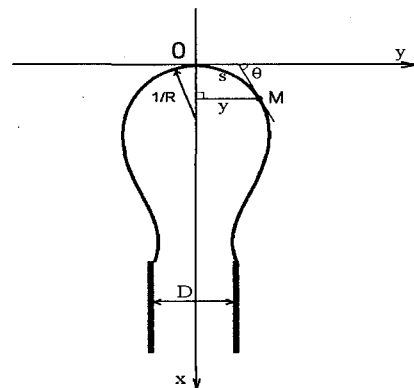


Fig. 1 Coordinates and axes for an bubble emerging from an underwater nozzle

가정하고 수치계산시 단위길이를 고려한다. 그리고 기포내부의 압력 p_B 는 식 (4)와 같이 표현된다.

$$p_B = p + p_\sigma = p + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (4)$$

만일, s 를 원점 O에서 M점까지 원주길이, θ 를 점 M에서의 접선과 y 축이 이루는 각이라 하면,

$$\frac{1}{R_1} = \frac{d\theta}{ds}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{\sin\theta}{y} \quad (5)$$

M이 원점 O에 근접함에 따라, $R_1=R_2$ 가 되고 원점 O에서 곡선의 반경 R 이 된다. 따라서

$$p_B = p_0 + \frac{2}{R} \quad (6)$$

식 (2)에서 식 (6)까지를 정리하면 식 (7)과 같이 된다.

$$\frac{d\theta}{ds} + \frac{\sin\theta}{y} = \frac{2}{R} - x \quad (7)$$

한편, x, y 는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$x = \int_0^s \sin\theta ds \quad (8)$$

$$y = \int_0^s \cos\theta ds \quad (9)$$

따라서, 식 (7)을 정리하여 미분하면,

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{2}{R} - x - \frac{\sin\theta}{y} \quad (10)$$

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = -\sin\theta - \frac{\cos\theta}{y} \left(\frac{d\theta}{ds} - \frac{\sin\theta}{y} \right) \quad (11)$$

식 (10)과 (11)을 이용하여 변수 s 를 미소증분 δ 로 표현하여 수치계산을 할 수 있다. 즉, s 의 초기값이 s_0 일 때, x, y, θ 는 각각 x_0, y_0, θ_0 로 표현되며, $s+\delta$ 에 대해서는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$y_1 = y_0 + \delta \cos\theta_0 - \frac{1}{2} \delta^2 \theta'_0 \sin\theta_0 + D(\delta^3) \quad (12)$$

$$x_1 = x_0 + \delta \sin\theta_0 + \frac{1}{2} \delta^2 \theta'_0 \cos\theta_0 + D(\delta^3) \quad (13)$$

또한, 새로운 θ_1 은 Taylor series로 표현하고, 식 (10)과 식 (11)을 이용하면 다음 식과 같이 된다.⁽¹¹⁾

$$\theta_1 = \theta_0 + \delta \theta'_0 + \frac{1}{2} \delta^2 \theta''_0 + D(\delta^3) \quad (14)$$

$$\theta'_1 = -y_1^{-1} \sin\theta_1 + 2 + x \quad (15)$$

$$\theta''_1 = y_1^{-1} \cos\theta_1 (y_1^{-1} \sin\theta_1 - \theta'_1) + \sin\theta_1 \quad (16)$$

$D(\delta^3)$ 항은 무시 가능하고, 식 (12)~식 (16)을 이용하여 수치 계산할 수 있다.

3. 수치계산 결과

수중노즐에서 생성되는 기포의 형상을 노즐 직경이 0.25 mm에서 3.0 mm 범위의 값에 대하여 수치계산을 수행하였다. 이때 기포를 이루는 막의 표면장력은 75 dyne/cm로 가정하였고, 기포의 공진 주파수 계산은 Minnaert의 식 (1)을 이용하여 해수가 아닌 청수

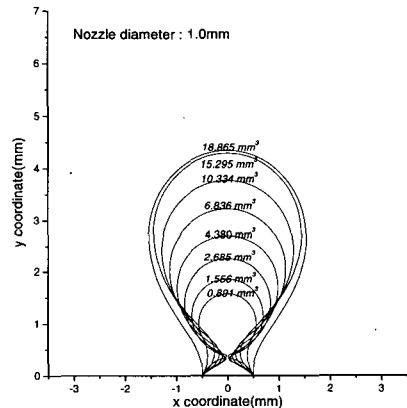


Fig. 2 Air bubble shapes for the nozzle diameter 1.0 mm

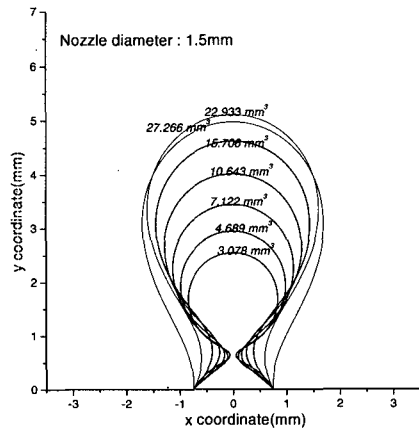


Fig. 3 Air bubble shapes for the nozzle diameter 1.5 mm

로 가정하였다.

기포의 형성시 압축공기의 공급에 의해 Fig.2~Fig.3에 도시된 것과 같이 표면장력과 노즐 직경이 허용하는 범위내에서 기포의 반경이 점점 증대하게 되고, 노즐의 직경을 초과하기 직전의 임계점까지 기포가 최대한 형성된 후 기포의 목(neck)에서 기포가 분리되는 현상을 계산으로 구현하였다.

Table 1에는 노즐의 직경에 따라 노즐에서 분리되기 직전의 기포의 체적과 그에 따른 기포의 반경 및 음향주파수를 표시하였다. 기포의 반경은 수치계산된 기포형상의 체적을 구(sphere)의 체적으로 가정하여 계산하였다.

Fig.4는 노즐에서 수중기포가 방출되는 시점에서의 기포형상을 노즐의 크기에 따라 도시한 것이다. 노즐의 크기가 작을 때에서 구(sphere)에 가까운 형상에서 노즐의 직경이 증가함에 따라 가로대 세로의 비가 점점 증가하여 타원형에 근접함을 알 수 있다.

Table 1 Calculated bubble data for nozzle diameters

Nozzle diameter (mm)	Surface radius (R,mm)	Volume of bubble (mm ³)	Notional radius (mm)	Acoustical frequency (Hz)
0.25	1.029	5.341	1.084	3082.2
0.5	1.235	10.086	1.340	2494.2
1.0	1.455	18.865	1.651	2024.7
1.5	1.587	27.266	1.866	1791.0
2.0	1.686	35.797	2.043	1635.8
2.5	1.766	44.355	2.194	1523.1
3.0	1.837	52.761	2.325	1437.6

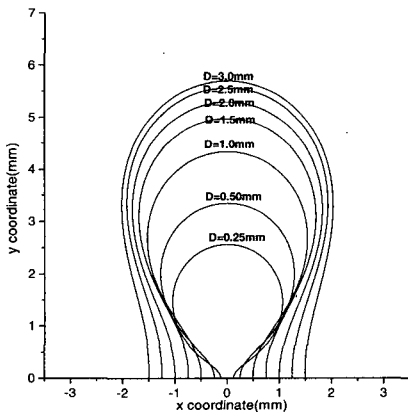


Fig. 4 Air bubble shapes for the nozzle diameter *D* from 0.25 to 3.0 mm

노즐의 직경이 점점 증가할수록 체적이 증가하고 그에 따른 기포의 등가반경이 증가함으로써 음향주파수는 감소하는 경향을 보이고 있다.

Fig.5~Fig.7에서는 노즐의 크기가 증가함에 따라 수중기포의 체적과 기포의 직경이 거의 비례적으로 증가하고 기포의 공진 주파수는 반비례적으로 감소함을 알 수 있다.

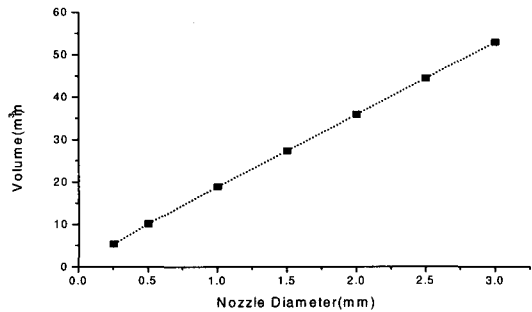


Fig. 5 Volume of the bubble for the nozzle diameter from 0.25 to 3.0 mm

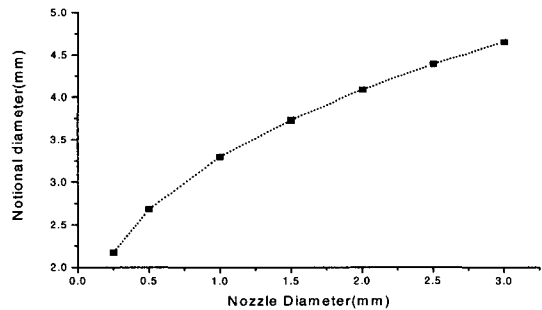


Fig. 6 Notional diameter of the bubble for the nozzle diameter from 0.25 to 3.0 mm

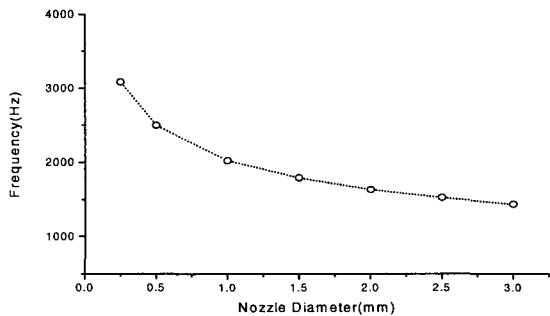


Fig. 7 Acoustical frequency of the air bubble for the nozzle diameter from 0.25 to 3.0 mm

4. 실험 및 결과분석

수중 노즐에서 기포가 생성될 때의 형상과 그에 따른 음향신호를 계측하기 위하여 Fig. 8와 Fig. 9와 같이 실험 설비를 제작하였다. 기포를 만들기 위한 고압의 압축공기는 공기압축기를 이용하여 생성하였으며, 고압의 공기는 감압기를 거쳐 압력이 저하되고 디지털 유량계를 이용하여 공기의 공급량이 정밀 제어되도록 하였다. 기포에서 발생하는 음향신호를 계측하기 위한 수중청음기는 B&K Type 8103을 사용하였다. 이 청음기는 기포가 방출되는 노즐에서 20 mm 떨어진 지점에서 위치시켜 수조벽에 의한 음파의 반사 영향이나 기포 형성에 영향을 미치지 않도록 하였다.⁽⁵⁾ 기포의 형상과 거동을 확인하기 위해서는 KODAK EKTPRO 고속카메라와 좌·우 및 전면에 3대의 조명장치를 설치하여 1,000 fps의 속도로 고속 촬영하였다. 노즐은 스테인레스강을 사용하여 내부직경이 1.0 mm, 1.5 mm 두 종류로 초음파 가공하여 교

환설치하였으며, 압축공기의 공급량은 5 cps~400 cps 까지 변화시키면서 계측하였다.

4.1 기포의 형상

기포가 발생하는 대표적인 형상은 노즐 직경 1.0 mm, 유량 20 cps에 대해 Fig. 10에 표시하였다. 기포가 방출되는 순간을 기준으로 각 촬영 사진의 프레임 간격은 기포가 이탈하기 전의 모습이 0.01 sec이고, 이탈 후에는 0.005 sec이다. 기포가 생성되는 초기의

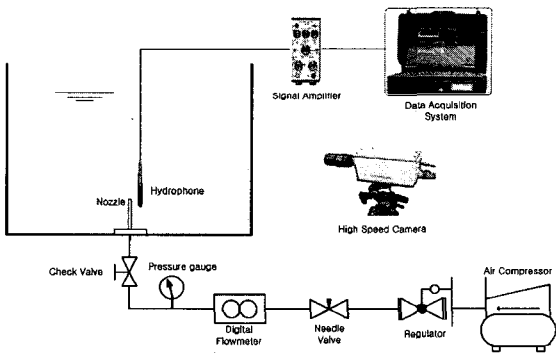


Fig. 8 Schematic diagram of the experimental arrangement

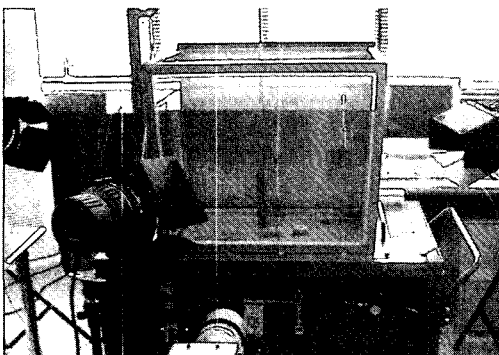


Fig. 9 Photograph of the experimental apparatus

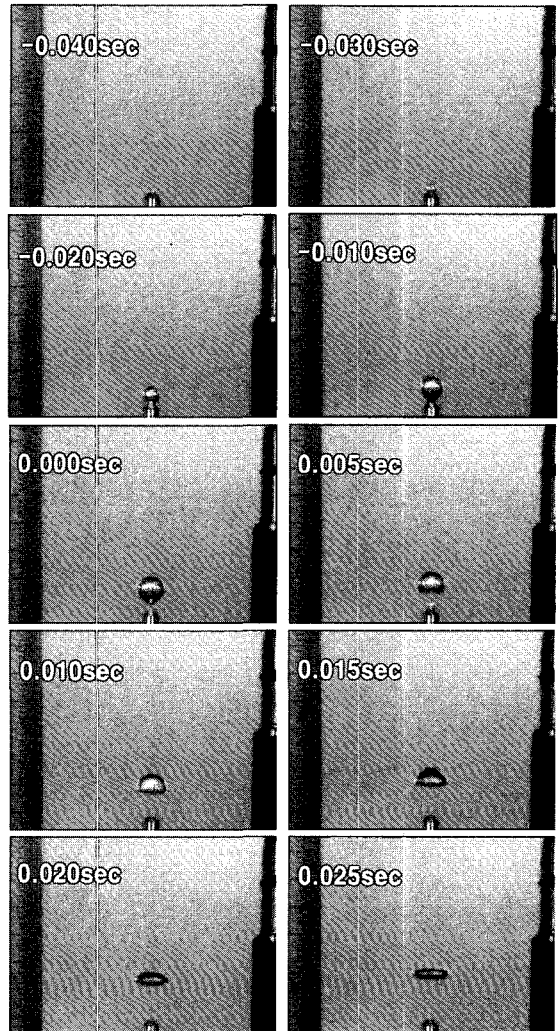


Fig. 10 A selection from a series of consecutive frames captured with high speed camera, showing a single bubble being blown into water from the underwater nozzle, for nozzle diameter 1.0 mm, flow rate 20 cps

모양은 수치계산 결과와 유사하게 성장하고 있으며, 기포가 노즐을 이탈하는 순간에는 기포의 후부 끝단에서 시작된 제트가 기포의 내부를 관통하고 그에 따라 기포가 변형되는 장면을 관찰할 수 있다.

기포의 크기는 가로직경 a, 세로직경 b 및 평균직경으로 표시될 수 있다. 고속카메라로 촬영한 각 기포의 형상을 가로와 세로 직경으로 표시할 수 있으며, 노즐 직경 1.0 mm와 1.5 mm인 경우에 측정된 기포 직경을 Table 1에 표시된 수치계산 결과로 나누어 측정값/계산값의 비로 나타내어 Fig. 11과 Fig. 12에 도시하였다. 노즐의 직경이 1.0 mm인 경우에 이 값이 유량의 증가에 따라 80 cps까지 급격하게 증가하다가 그 이후에는 평균직경이 1.6~1.9배의 값을 가지고, 노즐의 직경이 1.5 mm인 경우에는 평균직경이 1.6~2.0배의 값을 가진다. 즉, 유량이 적은 경우에는 수치계산 결과에 거의 근접하고 있으나 유량이 증가함에 따라 직경비가 점점 증가함을 확인할 수 있다. 이는 유량의 증가에 따라 기포내부의 동압력이 증가

하는 동적인 효과로 인한 것으로 볼 수 있으며 실제 예측에 있어서는 유량에 의한 동적효과를 고려한 수정계수를 고려하여야 함을 확인할 수 있다.

Fig. 13은 기포의 형상을 유추해 볼 수 있는 직경의 가로세로비를 표시한 것으로 0.92~1.18의 범위값을 가지며 유량이 증가함에 따라 가로세로비가 감소하다가, 즉 구에 가까운 형상으로 되다가 300 cps 이상의 유량에서 다시 가로세로비가 증가함을 알 수 있다.

4.2 기포의 상승속도

고속카메라를 이용하여 기포가 노즐에서 이탈된 후 일정한 시간동안 상승된 거리를 이용하여 속도를 측정할 수 있으며 Fig. 14에 도시하였다. 기포의 평균직경에 대하여 나타낸 속도 분포는 0.2~0.35 m/sec 범위의 값을 가지며 기포의 평균직경과 상관성이 거의 찾아보기 힘들었다. 즉 기포의 크기와 상관없이 거의 일정한 속도 분포를 가짐을 알 수 있다. 이는 빗방울이 떨어질 때 중력과 공기 중에서 받는 저항의 평형으로 빗방울의 크기에 상관없이 거의 일정한 속도로 떨어지듯이 기포도 수중에서의 부력과 상승에 따른

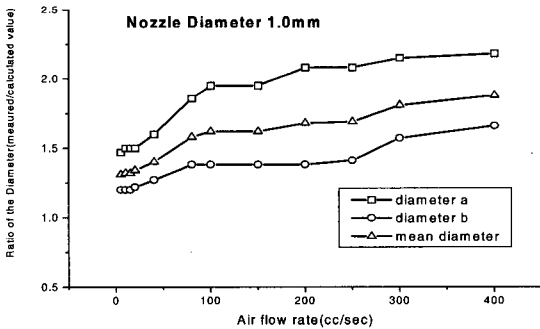


Fig. 11 Measured bubble size compared to calculated value for the nozzle diameter 1.0 mm

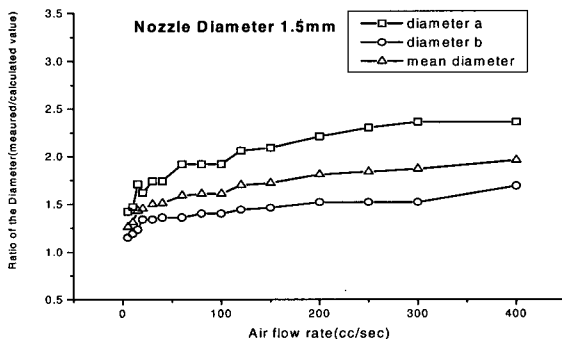


Fig. 12 Measured bubble size compared to calculated value for the nozzle diameter 1.5 mm

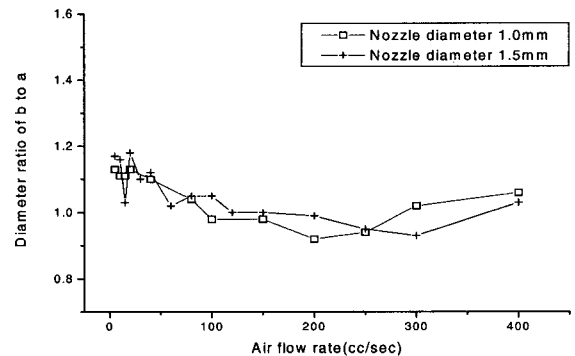


Fig. 13 Diameter ratio of 'b' to 'a' of the bubbles

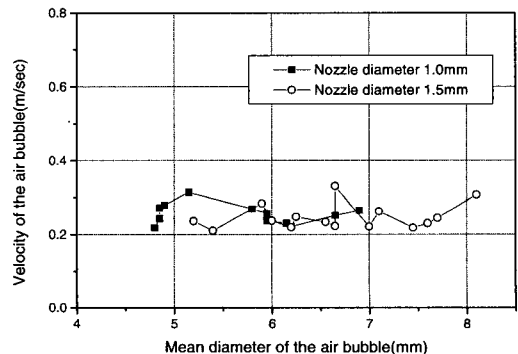


Fig. 14 Rising velocity of a single air bubble

저항의 평형을 이루어 크기하고는 상관성이 거의 없는 것으로 판단된다.

4.3 기포의 음향특성

노즐에서 기포가 성장하여 최종 순간에 이탈된 기포는 끝단에서 생성되는 제트에 의해 표면 형상이 상당히 변형되고 이로 인하여 변위가 상대적으로 큰 맥동운동을 하게 된다. 따라서 이에 따라 방출되는 음압은 Fig. 15와 같이 기포의 공진주파수가 지배적인 주기성 신호 형태가 되며 기포의 감쇠 특성에 의해 급격하게 감소하게 되고, 반경방향의 맥동현상이 계속적으로 일어나는 현상을 관찰할 수 있었다.

음향신호의 특성을 확인하기 위하여 노즐직경 1.0 mm와 1.5 mm인 경우에 대하여 유량을 각각 20 cps와 200 cps로 공급하여 기포에서 발생하는 음향신호를 수집하여 분석하여 기포형상의 수치계산 결과를 유량에 따른 형상 수정계수를 고려한 결과와 비교하였다.

노즐 직경이 1.0 mm와 1.5 mm인 경우에 기포형상

Table 2 Calculated and corrected acoustic frequency of the bubbles, nozzle diameter 1.0 mm and 1.5 mm

Nozzle Dia.(mm)	Frequency (Hz)	Nozzle Dia.(mm)	
		1.0	1.5
Calculated frequency(Hz)		2024.7	1791.0
Flow rate 20 cps	Correction factor, ca	1.34	1.45
	Corrected frequency(Hz)	1515.5	1231.4
Flow rate 200 cps	Correction factor, ca	1.68	1.81
	Corrected frequency(Hz)	1207.4	991.8

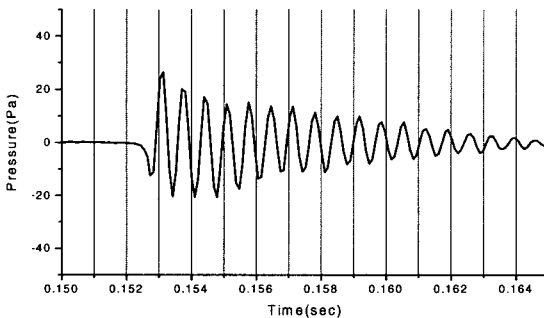


Fig. 15 Typical waveform of the acoustic pressure for generating a single air bubble

의 수치계산 결과에 따라 Table 1에서와 같이 음향신호의 맥동주파수는 2024.7 Hz와 1791.0 Hz로 계산되었다. 그러나 유량을 20 cps와 200 cps인 경우에는 기포형상의 수정계수가 각각 1.34과 1.45, 1.68와 1.81이 되어 이를 고려한 맥동 주파수는 Table 2와 같이 계산된다. 실험을 통하여 수집된 음향신호를 분석한 결과는 Fig. 16과 Fig. 17에 도시한 바와 같이 뚜렷한 맥동주파수를 가지며 수정계수가 반영된 경우가 계속 값에 더 근접함을 알 수 있다.

따라서 기포 생성시 발생하는 음향 주파수는 기본적으로 Minnaert가 제시한 식 (1)과 잘 일치하며, 기포의 형상을 이용하여 기포의 음향주파수를 예측할 때에는 반드시 유량에 따른 동적인 수정계수를 고려하여야 정확한 결과를 얻을 수 있을 것으로 판단된다.

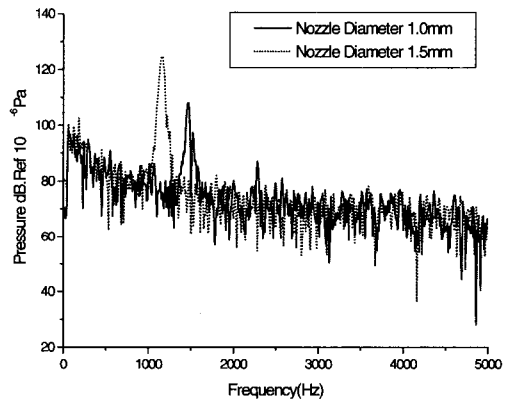


Fig. 16 Measured spectrum data of the air bubble for flow rate 20 cps

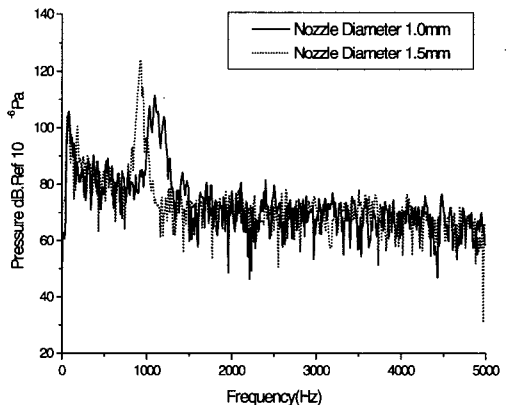


Fig. 17 Measured spectrum data of the air bubble for flow rate 200 cps

5. 결 론

수중 노즐에서 압축공기에 의해 발생하는 기포의 형상을 수치 계산하였으며, 기포발생 실험 장치를 제작하여 유량에 따라 기포의 형상을 고속 촬영하고 방출되는 음압을 계측·분석하여 다음과 같은 결과를 얻을 수 있었다.

첫째, 수중노즐에서 발생하는 기포의 형상을 수치 적으로 계산한 결과, 공기의 공급유량이 적은 경우에는 실험 계측과 잘 일치하지만, 공급유량이 증가하면 유량에 따른 수정계수를 고려하여야 한다.

둘째, 노즐에서 분리된 후 수중기포의 상승 속도는 기포의 크기나 유량과의 상관성이 없고 일정한 범위의 값을 가짐을 확인하였다.

셋째, 기포에서 방출되는 음향신호는 주기성이 뚜렷한 맥동주파수를 가지며, 유량에 따른 수정계수를 고려하여야 Minnaert가 제시한 식에 더 근접함을 확인하였다.

참 고 문 헌

- (1) Clay, C. S. and Medwin, H., 1977, "In Acoustical Oceanography : Principle and Applications", John Wiley & Sons, pp. 178~215.
- (2) Leighton, T. G., 1994, "The Acoustic Bubble", Academic Press.
- (3) Minnaert, M., 1933, "On Musical Air Bubbles

and the Sound of Running Water", *Phil. Mag.*, Vol. 16, 235~248.

(4) Medwin, H., 1977, "Acoustical Determinations of Bubble-size Spectra", *J. Acoustical. Soc. America*, Vol. 62, pp. 1041~1044.

(5) Leighton, T. G. and Walton, A. J., 1987, "An Experimental Study of the Sound from Gas Bubbles in Liquid", *Eur. J. Phys.* Vol. 8, pp. 98~104.

(6) Prosperetti, P., Crum, L. A., et al, 1989, "The Underwater Noise of Rain", *J. Geophysics. Res.*, Vol. 94, pp. 3255~3259.

(7) Strasberg, M., 1956, "Gas Bubbles as Source of Sound in Liquids", *J. Acoustical. Soc. America*, Vol. 26, pp. 536~537.

(8) Michael, S. Longuet-Higgins, 1991, "Monopole Emission of Sound by Asymmetric Bubble Oscillations, Part 1 : Normal Modes", *J. Fluid Mechanics*, Vol. 201, pp. 525~541.

(9) Richard Manasseh, S. Yoshida and M. Rudman, 1998, "Bubble Formation Processes and Bubble Acoustic Signals", *International Conference on Multiphase Flow, ICMF'98 Proceeding*.

(10) Michael S. Longuet-Higgins, 1991, "The Release of Air Bubbles from an Underwater Nozzle", *J. Fluid Mechanics*, Vol. 230, pp. 365~390.

(11) Pitts, E., 1974, "The Stability of Pendent Liquid Drops, Part 2. Axial Symmetry", *J. Fluid Mechanics*, Vol. 63, pp. 487~508.