

무한 경계에서 스칼라파 전달을 위한 흡수 경계 조건

Absorbing Boundary Conditions for Scalar Wave Propagation in Unbounded Domains



조 한 욱*
Cho, Han-wook



이 상 훈**
Lee, Sang-hoon

머릿말

수중 또는 지중 구조물의 경우, 폭파, 지진 등의 의해 파가 발생하고 그 파에 의한 구조물의 거동 해석 수행 시 구조물과 그 구조물을 둘러싸고 있는 무한 경계를 가진 유체 또는 지반 매개체를 동시에 고려하여야 한다. 무한 경계를 가진 매개체 전체를 포함한 해석 방법은 현실적으로 불가능하기 때문에 구조물에서 어느 정도 떨어진 위치에서 매개체를 제한하는 인공적인 경계조건이 필요하다. 그 경계조건의 특성은 구조물에 의해 발생하는 파의 흡수 성이며, 그 흡수 특성은 공간적인 가변성을 주기 위해 증가된 차수 즉 고차계 조건으로 이루어졌다. 본 기사에서는 스칼라파 전달을 위해 개발되어진 많은 선행 수치적 방법들에 대한 논의와 저자에 의해 개발된 흡수 경계의 간략화된 개발과정 및 3차원 주파수영역에 적용된 한 예제를 소개하고자 한다.

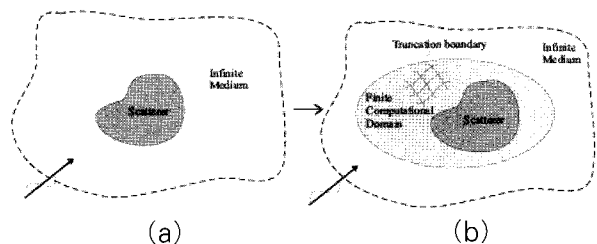
1. 소 개

많은 공학적 문제가 무한 또는 반무한 경계조건

* 정회원, GS 건설 기술본부 상무

** GS 건설 기술연구소 선임연구원

처럼 경계 구속이 없는 매개체(물, 공기, 지반 등)에서의 스칼라파의 수치 시뮬레이션을 필요로 한다. 이러한 문제들은 어떠한 구속 없이 파를 전달시킬 수 있는 매개체에 의해 둘러싸인 구조물(또는 지장물, 발산물, 라디에이터 등)을 대상으로 하며, 수중 어쿠스틱 문제, 유체- 또는 지반- 구조물 상호작용, 소음 공학, 지진학 뿐만 아니라 목표물-인지 문제 등에서 발생한다. 무한 매개체를 통한 파 전달의 수치적 묘사에서는 잘려진 경계의 필요성이 무한 또는 반무한 확장을 유한한 계산 가능한 매개체로 제한함으로써 가능한데, 대개 영역 이산화(FEM, FDM, FVM 등)(**그림 1**)을 이용하여 이산 또는 반-이산



〈그림 1〉 (a) 무한 매개체에 둘러싸인 산란체(scatterer, 구조물); (b) 영역 이산화 기법에 의한 유한 전산 영역과 잘려진 경계를 가지며 감소된 모델

형태를 유도한다. 실제 물리적 문제에서는 존재하지 않는 인공적인 경계가 파의 안전한 통과, 이상적으로는 완전한 통과, 또는 최소한 아주 작은 반사만을 허용하여야 하며 또한 계산에 포함되어지지 않는 실제 물리적 외부 영역의 거동을 반영할 수 있는 적절한 조건들이 규정되어야 한다.

영역이산법과 절단경계면의 조합으로 인한 가장 어려운 문제점은 무한을 대신하는 잘려진 경계에서 스칼라파(어쿠스틱파) 원역조건인 the Sommerfeld radiation 조건을 자동적으로 만족해야 할 필요성에 의해 발생한다. 절단된 경계위에서는 그 조건을 정확하게 모사하는 방법이 있으며, 이는 시간적 공간적 비국부성 DtN(the Dirichlet 값과 the Neumann 값에 관한 방법) maps라고 부른다. 공간적 또는 시간적인 비국부성을 완화하는 DtN maps의 국부화는 정확성을 조금 떨어뜨리는 대신 비국부적인 조건들의 전산 계산량을 크게 줄일 수 있으며 시간영역 해석을 가능케 한다.

반면에, 주파수 영역에 있어서 오랫동안 사용된 경계요소법의 표준 적분 방정식 체계화는 본질적으로 the Sommerfeld radiation 조건들을 만족함으로써 새로운 절단 경계가 필요 없다. 즉, 적분 핵(kernel)에서 나타나는 Green 함수는 발산 조건을 자동적으로 만족시킨다. 그러나, 전통적인 적분 방정식 체계들은 공간과 시간영역에서 체계의 비국부성, 일반적인 시간/주파수 영역에서의 체계의 부족함으로 인한 어려움 등과 같은 단점으로 인해 사용성의 한계가 있다.

2. 스칼라파를 위한 흡수 경계와 관련된 선행 연구 조사

문헌에서 국부 흡수 경계들을 위한 몇 가지의 접근들은 다음과 같다(다양한 흡수 경계의 조사는 Kausel and Tassoulas [1], Wolf [2], Kausel[3], Givoli [4]에 의해 이루어졌으며 최근에 Tsynkov[5]에 의한 상당히 광범위하며 포괄적으로 다루어졌음). 국부 조건들의 구축은 대략적으로 파동의 이산관계에의 유리함수 근사 법에 의한 방법과 전산 영역 밖의 해 또는 원역(far-field) 해의 접근적 확장법

에 근거한 방법인 두 가지의 종류로 나눌 수 있다.

스칼라 파동 방정식을 위해 가장 잘 알려진 국부 조건들 중 첫 번째 종류를 대표하는 조건은 Engquist and Majda에 의해 발표된 수열들(sequences)[6]이며, 1차원 이상에서의 파동 방정식의 특성을 나타내는 이산관계를 가지고 인공 경계에서의 정확한 조건이 필드 변수에 적용된 유사-미분 연산자를 통해 표현되어질 수 있다는 것을 보여준다. 이 조건의 비국부적 형태는 부적절하며 전산에서 다루기 어렵다.

두 번째 종류의 고전적인 예제는 Bayliss와 Turkel[7]의 조건들이다; 그들은 방사형 거리의 점근적 전개를 바탕으로 흡수 경계 조건들의 모임을 개발하였다. 그들의 조건들은 오직 2차원 원형과 3차원 구형 흡수 경계들에서만 적용가능하다.

정확한 DtN의 비국부성 역시 최근에 상당한 관심을 받아왔다. 그 개념은 잘려진 경계에서 그 경계 밖의 영역 해의 거동에 관한 연역적인 지식을 바탕으로 정확한 경계 조건 또는 DtN map을 유도하는 것이다. DtN은 정확한 조건이며 공간과 시간영역 모두에서 전형적인 비국부성이다; 그 개념은 MacCamy와 Marin[8]의 연구로부터 시작된다. 그 후 Keller와 Givoli[9], 그리고 Givoli와 Keller[10]는 원형과 구형 흡수 경계들을 근거로 DtN 조건들을 발표했다. 그 방법은 비국부 시간 특성 때문에 주파수 영역 문제들을 위해 많이 사용되어졌다.

비국부 DtN 또는 그것의 국부 유사경계 조건들의 다른 처리 방법은 무한 요소들과 최근에 개발된 PMLs(Perfect Matched Layers)들에 의해 제안된다.

Bettess와 Zienkiewicz[11]에 의해 개발된 방법이며 경계 적분 식들에 의한 전산 비용을 극복하는 무한 요소들은 영역 이산방법 분야에서 경쟁력 있는 방법을 제공한다. 무한 요소들의 기본 개념은 외부 해의 점근적 전개를 잘려진 경계 외부 방사 방향 쪽으로 적용 가능케 하는 것이다. 적절한 형태 함수를 통해 변수 차수의 방사 전개를 적용한 유한 요소들은 잘려진 경계를 위해 미리 정해될 수 있다.

PMLs는 엄격히 국부나 비국부 분류에 속하지 않는 또 다른 접근이다. Berenger[12]는 전자기파를 위해 처음으로 사용하였다; 그것은 후에 Qi와 Geers[13]에 의해 스칼라파의 경우로 확장되었다.

완충 지대 또는 댐핑 계수를 수치적으로 조절함으로써 파동이 강제로 사라지게 하는 범위로 잘려진 경계에 부착된다. 이 방법의 증가하는 사용량과 응용 전자기와 학계의 의한 PMLs의 초창기 적용에도 불구하고, 여전히 여러 가지의 미해결 사항들이 남아있다. 그중에 가장 큰 문제는 시간영역에서 PMLs의 안정성에 관한 것이다.

흡수 경계의 타원 형태로의 개발에 관해서는 Bayliss-Trukel 조건들의 타원형 또는 일반적인 블록 기하로의 체계적인 개발인 Grote and Keller[14], Antoine[15], Barry[16], Kallivokas or Kallivokas and Lee[17-18]은 2-3차계 조건들까지의 유한 요소 적용은 최근에 타원형과 임의 형태의 기하들의 주파수 영역에서의 적용에서 나타난다.

다음은 [17-18]에서 개발되어진 흡수 경계 개발에 대해 설명한다.

3. 외부영역 문제-strong form

무한 영역에서 시간 의존 스칼라 파동 방정식에 대한 초기-그리고-경계 값 문제(initial-and-boundary value problem, 이하 IBVP)는 다음의 식(1)-(4)와 같이 strong form으로 표현 된다:

$$\ddot{p}(x, t) = c^2 \Delta p(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1)$$

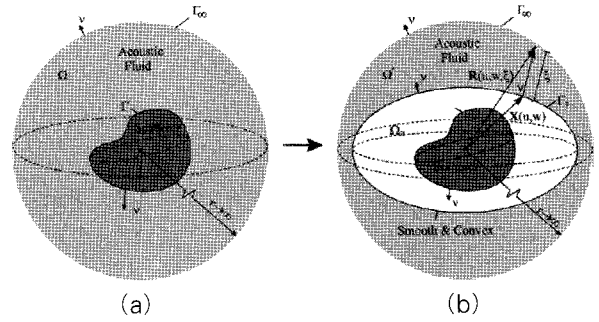
$$p_\nu(x, t) = f_N(x, t), \quad x \in \Gamma, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r(p_r + \frac{1}{c} \dot{p}) = 0, \quad \text{and} \quad (3)$$

$$p(x, 0) = 0, \dot{p}(x, 0) = 0, \quad x \in \bar{\Omega} \quad (4)$$

여기서 p 는 압력을 의미하고, x 는 위치벡터이며, t 는 시간이다. ν 는 산란체 표면 Γ 위에서 단위 수직 외부 방향벡터를 의미한다; c 는 파동 전달 속도이며, p_ν 는 압력 p 의 수직 방향 미분치를, Δ 는 the Laplace operator, 머릿점은 시간에 대한 미분을, 그리고 f_N 은 미리 정해진 함수이다. 조건 (3)(r 는 방사방향 거리이며 p_r 는 방사 방향을 따라 압력의 미분치임)은 the Sommerfeld radiation condition이다. 조건(4)는 초기 안정 상태를 가진 시스템을 의미한다.

식(1)-(4)의 해와 연관되는 가장 어려운 점은 방사



<그림 2> (a) 무한 경계의 유체 Ω 에 둘러싸인 산란체의 한 모델; (b) 전산영역 Ω_a 와 흡수경계 Γ_a 를 가진 모델

조건 (3)이 무한에서 만족함을 보장해야한다는 점이다. 영역의 공간이산화를 바탕으로 하는 수치해석방법으로 이 문제를 푸는 것은 하나의 요구조건인 완전한 무한 영역 Ω 를 고려하는 것이지만 이는 비현실적인 문제를 발생한다. 이 문제점을 처리할 수 있게 만드는 한 가지 방법은 Γ 를 내부에 포함하는 인공경계 Γ_a 를 소개함으로써 외부 영역을 자르는 것이며, 또한 <그림 2 (b)>에서 처럼 경계가 있는 부영역 Ω_a 를 발생한다. 잘려진 영역 Ω_a 안에서의 해 p 가 원래 문제의 해와 같기 위해서는 Γ_a 위에 Γ_a 를 가로지르는 바깥방향의 파가 이러한 경계의 존재로 인해 교란되지 않음을 보장할 수 있는 하나의 경계조건을 명시해야한다. 이 경계조건은 Γ_a 위에서의 실제 해 p 를 이용한 표현으로 결정되어질 수 있으며, 다음의 식으로 표현된다.

$$p_\nu(x, t) = F[p^t(\cdot, \cdot)](x), \quad x \in \Gamma_a, \quad (5)$$

여기서 p^t 다음의 점은 무효변수를 가르키며, F 는 p^t 에 의존하는 유사-미분연산자이다. p 의 시간 이력은 다음과 같다.

$$p^t(t) = p(t-\tau), \quad : 0 \leq \tau \leq t \quad (6)$$

4. 흡수 경계 조건

[19]에서, 임의의 불록한 형태의 잘려진 경계 Γ_a 를 위한 정확한 유사-미분 연산자 F 에 대한 국부화된 근사 수식 군이 개발되어졌으며, 이는 기하학적 광

학 개념을 이용하며 라플라스 영역에서 고주파 접근 확장을 배경으로 개발되어졌다. 또한, 임의 형태의 기하를 나타내기 위해 Ω^+ 영역에서 새로운 좌표 시스템을 소개하였다: Γ_a 가 매개변수 표현 $X(u,w)$ (여기서 X 는 Γ_a 위에서의 위치벡터이며, u,w 는 표면 매개변수)으로 표현으로 가정하여, 그 새로운 좌표 시스템은 다음과 같이 소개되어졌다.

$$R(u,w,\xi) = X(u,w) + \xi v(u,w), \quad \xi \geq 0, \quad (7)$$

이러한 새로운 좌표 시스템을 이용하여 [19]에서 다음의 식(5)에서의 연산자에 대한 주파수 영역 문제를 위한 2차계 국부 근사 조건을 구하였다.

$$\begin{aligned} \hat{p}_v = & -\frac{s}{c}\hat{p} + H\hat{p} + \frac{c}{2(s+\gamma)} \\ & + \left\{ \frac{1}{\sqrt{h}} \left[\frac{1}{\sqrt{h}} (h_{22}\hat{p}_u - h_{12}\hat{p}_w) \right] \right\} \\ & + \left\{ \frac{1}{\sqrt{h}} (-h_{12}\hat{p}_u + h_{11}\hat{p}_w) \right\} \\ & + (H^2 - K)\hat{p}, \end{aligned} \quad (8)$$

식(8)을 시간영역으로 치환하면 식(9)를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{p}_v + \gamma p_v = & -\frac{1}{c}\ddot{p} + \left(H - \frac{\gamma}{c} \right) \dot{p} + H\gamma p \\ & + \frac{c}{2} \left\{ \left[\frac{1}{\sqrt{h}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{h}} (h_{22}p_u - h_{12}p_w) \right\} \right] \right. \\ & + \left. \left[\frac{1}{\sqrt{h}} (-h_{12}p_u + h_{11}p_w) \right] \right\} \\ & + (H^2 - K)p \end{aligned} \quad (9)$$

조건 (8)과 (9)에서, H, K 는 경계의 평균과 가우시안 곡률을 의미한다. γ 는 파동속도와 인공 경계의 곡률 측정치에 의존하는 안정성 매개변수이다. $h_{ij} (i, j=1, 2)$ 와 h 는 경계 Γ_a 의 the Euclidean metric tensor를 의미하며, 본 기사의 예제에 사용되어진 타원형 경계를 위한 h_{ij} 는 [19]에 소개되었다.

또한 [17]-[19]에서 개발되어진 조건들의 표준 Galerkin 유한 요소 법으로의 적용이 weak form 형성부터 연산자-decomposition법을 이용하여 사

용 가능한 시스템 매트릭스를 구하였다.

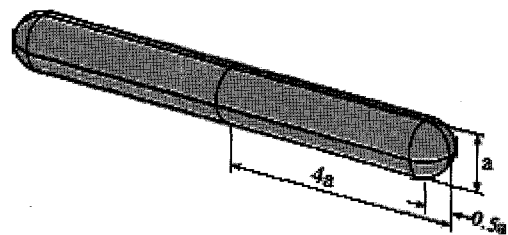
5. 주파수 영역에서 산란 문제를 통한 각종 형태의 흡수 경계를 이용한 결과 비교 예제

해저 등 구조체가 스칼라파를 전달하는 매개체에 둘러싸인 경우, 폭발 등의 충격파에 의한 산란체(해저 구조체)로 인해 발생하는산란파와 그 산란체에 미치는 영향을 모사하기 위해 앞서 개발된 3차원 2차계 흡수 경계 조건을 적용하였다. 산란체의 형태는 <그림 3>과 같이 길쭉한 형태의 강성 구조물이며, 둘러싼 매개체는 비점성, 압축성 유체로 가정한다. 여기서 타원 경계는 자극을 받는 물체의 더욱 밀접함을 제공할 수 있다. 4개의 다른 입사 평면파에 대한 강성-실린더 (<그림 3>)의 응답을 논의한다. 단위 크기의 입사 평면파를 다음과 같이 규정한다:

$$p^{inc} = e^{-ik(x \cos \alpha_x + y \cos \alpha_y + z \cos \alpha_z)} e^{i\omega t}, \quad (10)$$

여기서 α_x, α_y 그리고 α_z 는 전달 파면의 수직방향과 3개의 좌표축들과의 각도들이다. <표 2>에서 보여지는 것처럼 해당하는 4가지의 입사 경우와 하나의 주파수($ka=1$)를 고려하였다.

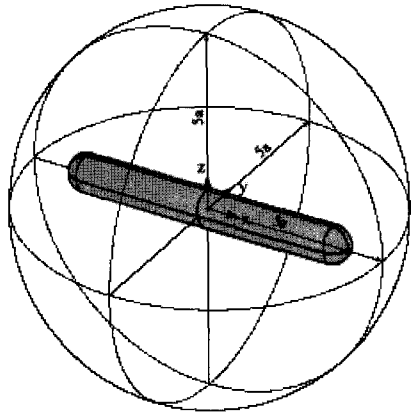
<그림 4>와 <표 1>에 설명되어진 것처럼 그 실



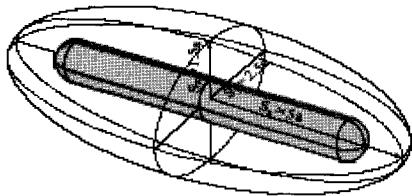
<그림 3> 길쭉한 산란체의 형상

<표 1> 흡수 경계 형태별 자유도 수에 의한 전산 비용

Types of absorbing boundary		$S_x:S_y:S_z$	DOF
Reference		8:8:8	201692
AB-S	Spherical AB	5:5:5	50016
AB-PS1	Prolate spherical AB	5:3:3	23774
AB-E	Ellipsoidal AB	5:2.5:1.5	11374
AB-PS2	Prolate spherical AB	5:1.5:1.5	7262



(a) Spherical boundary (radius=5a)



(b) Ellipsoidal boundary ($S_x:S_y:S_z=5:2.5:1.5$)

〈그림 4〉 흡수 경계의 기하

〈표 2〉 4가지 경우의 입사파

Wave case	Incident vector ($\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$)
P_{ix}	(0°, 90°, 90°)
P_{iy}	(90°, 0°, 90°)
P_{iz}	(90°, 90°, 0°)
P_{i125}	(125.26°, 125.26°, 125.26°)

린더를 4가지 다른 흡수 경계들(하나의 구, 두개의 길쭉한 회전타원, 그리고 하나의 타원)로 둘러싸고; 그 특성 매쉬 매트릭스는 0.25a이었다.

이러한 경우 비교할만한 정해가 없기 때문에 우리는 구형 흡수 경계를 8a에 놓고 2차항 조건을 적용함(같은 매쉬 밀도를 사용)으로 인한 참고해(reference solution)를 얻었다. 참고해에 대한 $L_2 Norms$ 사용하는 비교 오차들을 측정하였다. <표 3>은 산란체의 표면에서의 오차들의 요약이다. <그림 5>는 4개의 입사파 경우중 두개(P_{ix} 와 P_{i125})와 두가지의 흡수 경계 표면(AB-S와 AB-E)을 위한 발산체 표면에서 총 압력의 분포를 묘사한다. <그림 6>은 모든 4개의 흡수 경계들에 대해 경사진 입사파를 위한 발산체 표면에서 xz -평면을 따라 작용하는 발산 압력의 정규화된 실수와 허수 부분들의 변화를 보여주며, 그리

〈표 3〉 $ka=1$ 일 경우 상대적 $L_2 Norms$ 오차 (%)

Wave case	AB-S	AB-PS1	AB-E	AB-PS2
P_{ix}	2.6459	2.8439	5.357	7.0457
P_{iy}	2.2093	2.5848	3.2001	3.3657
P_{iz}	2.4309	2.4429	3.0799	3.7976
P_{i125}	1.3816	1.3838	2.0062	2.2500

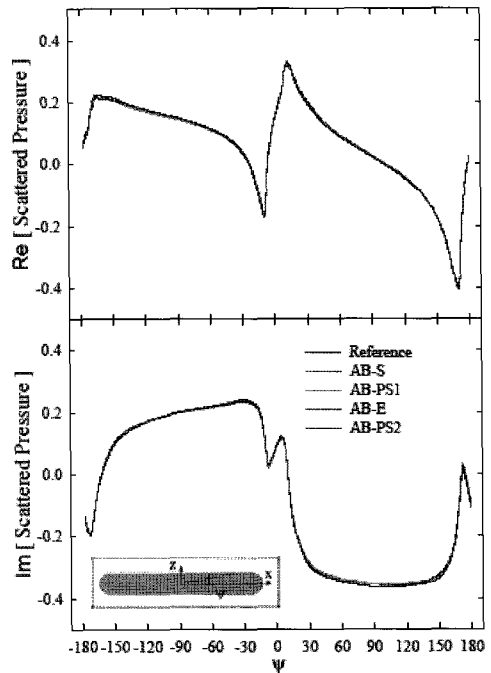


(a) Response due to AB-S (b) Response due to AB-E



(c) Response due to AB-S (d) Response due to AB-E

〈그림 5〉 총 압력의 크기



〈그림 6〉 경사진 입사파에 의한 xy 평면에서 산란체의 표면에서의 산란 압력의 실수와 허수 부분

고 성능의 우수함을 명백히 보여준다. 모든 경우에서 참고해에 대해 구형 경계가 더 나은 성능을 보여줌(<표 3>)과 동시에 매우 밀접한 AB-PS2인 경우를 제외하고 모든 경우들에서 정확도의 차이는 매우 근소하다는 것을 강조한다. 그러므로 예를 들어 AB-

PS1이 구형 경계와 비교해서 50%보다 작은 전산 비용에서 같은 정확도를 제공한다는 것을 보여주는 것은 매우 중요하다.

6. 결 론

컴퓨터의 발달로 인해 유체-구조체 그리고 구조체-지반 상호작용에 대한 수치해석 적용이 크게 발전하고 있으며, 이는 충격파, 해양 조류, 지진파 등에 대한 구조물의 보다 정확하며 실제에 가까운 해석과 설계 기술을 발전시키고 있다. 대부분의 상용 유한요소 프로그램에서 상호작용 해석이 가능하게 되었으나, 대체적으로 저차계(0차 또는 1차계) 흡수 경계를 사용하고 있으므로 인해 산란체로부터 먼 거리에 흡수 경계를 배치해야하며 이는 처리해야할 전산량을 증가시키는 어려움을 초래한다. 본 기사에서는 현재까지 개발되어온 스칼라파와 탄성파를 위한 고차계 흡수 경계 중 3차원 스칼라파에 대한 흡수 경계만을 소개하였으며, 또한 임의 형상 흡수 경계를 사용함으로써 인해 적절한 정확성을 유지하면서 전산량을 대폭 감소할 수 있는 성능을 한 예로 보여주었다.

참고문헌

1. E. Kausel and J. L. Tassoulaas. *Transmitting Boundaries : A Closed-Form Comparison*. Bull. Seismol. Soc. Amer., 17:143-159, 1981
2. J. P. Wolf. *A Comparison of Time-Domain Transmitting Boundaries*. Earthquake Engrg. Strut. Dynam., 14:655-673, 1986.
3. E. Kausel. *Local Transmitting Boundaries*. ASCE J. Engrg. Mech., 114(6):1011-1027, 1988.
4. D. Givoli. *Non-Reflecting Boundary Conditions: A Review*. J. Comput. Phys., 94(1):1-29, 1991.
5. S. V. Tsynkov. *Numerical Solution of Problems on Unbounded Domains. A Review*. Appl. Numer. Math., 27:465-532, 1998.
6. B. Engquist and A. Majda. *Absorbing Boundary Conditions for Numerical Simulation of Waves*. Math. Comp., 31(139):629-651, 1977.
7. A. Bayliss and E. Turkel. *Radiation Boundary Conditions for Wave-like Equations*. Comm. Pure Appl. Math., 33:707-725, 1982.
8. R. C. MacCamy and S. P. Marin. *A Finite Element Method for Exterior Interface Problems*. Internat. J. Math. Math. Sci., 3:311-350, 1980.
9. J. B. Keller and D. Givoli. *Exact Non-Reflecting Boundary Conditions*. J. Comput. Phys., 82:172-192, 1989.
10. D. Givoli and J. B. Keller. *Non-Reflecting Boundary Conditions for Elastic Waves*. Wave Motion, 12:261-279, 1990.
11. P. Bettess and O. C. Zienkiewicz. *Diffraction and Refraction of Surface Waves Using Finite and Infinite Elements*. Internat. J. Numer. Methods Engrg., 11:1271-1290, 1977.
12. J. P. Berenger. *A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves*. J. Comput. Phys., 41:115-135, 1994.
13. Q. Qi and T. L. Geer. *Evaluation of the Perfectly Matched Layer for Computational Acoustics*. J. Comput. Phys., 139(1):166-183, 1998.
14. M. J. Grote and J. B. Keller. *On Nonreflecting Boundary Conditions*. J. Comput. Phys., 122:231-243, 1995.
15. X. Antoine, H. Barucq, and A. Bendali. *Bayliss-Turkel-like Radiation Conditions on Surfaces of Arbitrary Shape*. J. Math. Anal. Appl., 229:184-211, 1999.
16. A. Barry, J. Bielak, and R. C. MacCamy. *On Absorbing Boundary Condition for Wave Propagation*. J. Comput. Phys., 79:449-468, 1998.
17. L. F. Kallivokas and Bielak. *A Simple Impedance-Infinite Element for the Finite Element Solution of the Three-Dimensional Wave Equation in Unbounded Domains*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 147:235-262, 1997.
18. L. F. Kallivokas and S. Lee. *Ellipsoidally-Shaped Local Absorbing Boundaries for Three-*

Dimensional Scalar Wave Propagation. Comput. Mech., 35:11-23, 2004
19. S. Lee. *Weakly Non-local Arbitrarily-shaped*

Absorbing Boundary Conditions for Acoustics and Elastodynamics. PhD Dissertation, The Univ. of Texas at Austin, 2004