

# 전달행렬법에 의한 곡선거더교의 비틀림 응력비와 비틀림 정수비에 관한 연구

## A Study on Torsional Stress ratio and Torsional ratio of Curved Girder Bridge by Transfer Matrix Method

이 원 홍\*      이 윤 영\*\*  
Lee, Wong-Hong    Lee, Yoon-Young

### Abstract

In the design of curved girder bridges, the engineer is faced with a complex stress situation, since these types of mutiple-I girder, mono-box girder and twin-box girder are subjected to both bending and torsional force. In general, the torsional forces consist of two part, St. venant's and warping. Thus the procedure for determining the induced stresses in a curved girder is difficult. The transfer matrix method is extensively used for the structural analysis because its merit in the theoretical background and applicability. The technique is attractive for implementation on a numerical solution by means of a computer program coded in Fortran language with a few elements. To demonstrate this fact, it gives good results which compare well with finite difference method. Therefore, in this paper, to clarify the range where the torsional warping stress can be approximated by pure torsional analyzed a critical value of relationships between the torsional stress ratio and torsional ratio.

### 요 지

곡선거더교의 설계에서 I형 병렬, 1박스, 2박스의 거더 형태의 교량은 휨과 비틀림을 동시에 발생함으로 그 응력은 매우 복잡하다. 일반적으로 비틀림은 순수 비틀림과 휨 비틀림으로 구성되어 있으므로 곡선거더교의 발생되는 응력들을 결정하는 절차는 매우 어렵다. 전달행렬법은 이론적인 배경과 적용이 매우 쉬운 장점 때문에 구조해석 분야에서 많이 사용되고 있으며, 유한차분법과 비교하여 신뢰성을 검증하여 좋은 결과를 얻었다. 따라서, 본 연구에서는 I형 병렬 곡선교, 1박스거더 곡선교, 2박스 거더 곡선교에 대한 비틀림 정수비와 비틀림 의한 비틀림 응력비 사이 관계를 비교 검토하여 휨 비틀림에 의한 응력해석을 생략할 수 있는 비틀림 정수비의 한계값을 분석 하였다.

**Keywords :** Curved girder bridge, Transfer matrix method, Torsional stress ratio, Torsional ratio

**핵심 용어 :** 곡선거더교, 전달행렬법, 비틀림 응력비, 비틀림 정수비

\* 정회원, 진주산업대학교 토목공학과 부교수

\*\* 정회원, 진주산업대학교 토목공학과 강사

E-mail : whyee@jinju.ac.kr 055-751-3295

• 본 논문에 대한 토의를 2006년 2월 28일까지 학회로 보내 주시면 2006년 5월호에 토론결과를 게재하겠습니다.

## 1. 서 론

도로의 평면선형이 원곡선이나 클로소이드 곡선에 따라 교량 자체에도 수평면에 교통류를 원활하게 한 곡선 거더교가 최근 시가지의 고속도로는 물론 산간에서 수 없이 많이 건설되어 왔다. 곡선교로서 생각할 수 있는 구조물로는 슬래브교와 거더 시스템의 교량이 있다. 슬래브교는 스패 길이가 비교적 짧은 교량이 사용되고 경간이 길 때는 플레이트 거더나 박스형 거더를 많이 사용한다. 곡선교는 휨과 비틀림을 동시에 받음으로서 비틀림에 대한 처리문제가 중요한 요소로 나타난다. 곡선부에서 비틀림은 단면을 박스형으로 하는 것이 유리하다는 것을 직관적으로 알 수 있다. 그러나 경간이 길게 되면 한 개의 박스로는 어렵고 여러 개의 박스 혹은 I형 거더를 사용하는 것이 불가피하게 되는 경우가 있다. 또한 선박이나 항공 구조물에서도 박스형 보다는 W형 혹은 H형강의 단면을 이용하는 경우가 많이 있다. 따라서 거더 시스템의 곡선교 해석은 현대에 와서 불가피한 것으로 판단된다.

곡선교의 얇은 단면으로 구성된 일반적인 빔에 비틀림을 작용시켰을 때 그 빔에 생기는 비틀림 모멘트의 일부분은 순수 비틀림(Pure torsion,  $T_s$ )이며 기타 휨 비틀림(Warping torsion,  $T_w$ )으로 분류하고 있다. 순수 비틀림은 단면 내에 전단응력만 발생시키지만 휨 비틀림 모멘트는 빔 축방향으로 휨 비틀림에 의한 수직응력과 이에 균형을 위한 2차적인 전단응력을 발생시킨다. 이 휨 비틀림의 거동을 해명하기 위한 휨 비틀림 이론은 많은 연구가 전개되고 있다.

1박스 거더 곡선교를 대상으로 이른바 비틀림 정수비( $\kappa = L_T \sqrt{GK/EL_w}$ )가 30이상이면 휨과 순수 비틀림이 연계하는 곡선 거더교에 적합한 사항이다.<sup>(3)</sup>

따라서, 본 연구에서는 참고문헌<sup>(1)</sup>의 곡선교의 구체적인 설계에 들어가기 전에 평면형상이나 단면형상에 의한 역학적인 특성을 검토하였다. 이러한 검토를 바탕으로 휨 비틀림이론의 해석 범위를 명확히 해두는 것은 중요한 일이므로, I형 병렬 곡선교, 1박스 거더 곡선교, 2박스 거더 곡선교에 대한 비틀림 정수비( $\kappa$ )와 비틀림에 의한 비틀림 응력비 사이의 관계를 비교 검토하여 비틀림 정수비를 정하고, 휨 비틀림과 순수 비틀림에

의한 응력 해석이 생략되는 범위를 규명하고자 한다. 또한 곡선 거더교의 비틀림에 의한 매개변수 연구를 통하여 보다 정확한 비틀림 효과를 도출하는데 그 목적을 두고자 한다.

## 2. 휨 비틀림에 의한 전달행렬법

곡선교에서는 휨과 휨 비틀림 현상이 복잡하게 거동을 하므로 곡선교의 휨과 휨 비틀림의 거동에 관한 기본식을 세우면 곡률 면외와 곡률 면내와의 변위가 복잡하게 나타나므로 곡률 면외 변위의 거동에 초점을 맞추어 연립미분방정식을 Laplace 변환을 사용해서 풀 다음 그 결과를 전달행렬법으로 해석하였다.

### 2.1 기호

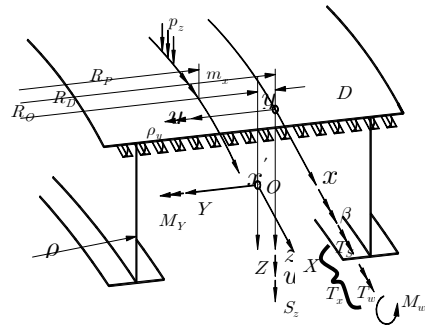


Fig. 1 좌표축, 응력 및 변위의 정의

여기서,

$D$  : 전단중심,  $w$  : 점  $D$ 의 처짐,

$\beta$  : 점  $D$ 의 단면회전각

$x, y, z$  : 전단중심  $D$ 점에서 교축접선방향, 수평방향 및 연직방향의 직각좌표계

$R_D, R_O, R_P, \rho$  : 각각 곡률 중심에서 점  $D, O, P$ 에 있어서의 곡률반경

$P_z, m_x$  :  $z$ 축 방향으로 작용하는 등분포 하중 및  $x'$ 축에 작용하는 분포토크

$S_z, M_Y$  :  $z$ 축에 작용하는 전단력 및  $Y$ 축에 작용하는 휨모멘트

$T_x, T_w, T_s, M_w$  : 각각 합 비틀림(=  $T_s + T_w$ ), 휨 비틀림, 순수 비틀림 및 솟구침 모멘트

## 2.2 힘의 평형방정식

Fig. 1과 같이 곡선교에 임의 하중이 작용하는 경우 면의 변위에 관한 부재력에 대한 힘의 평형방정식은 전 단중심축 D에서 고려하면 식(1)과 같이 된다.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ_z}{ds} &= -\frac{R_p}{R_s} P^z \\ \frac{dT_x}{ds} - \frac{1}{R_s} M_y &= -\frac{R_p}{R_s} m_x \\ \frac{dM_y}{ds} - Q_z + \frac{T_x}{R_s} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

부재력과 변위량의 관계식은 식(2)와 같이 된다.

$$\left. \begin{aligned} M_y &= -\frac{R_s}{R_0} \left\{ EI_y \left( \frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{\beta}{R_s} \right) \right\} \\ M_w &= EI_w \left( \frac{d^2 \beta}{ds^2} + \frac{1}{R_s} \frac{d^2 w}{ds^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Fig. 2는 곡선교의 변위상태를 표시한 것이고, 비틀림 각  $\theta$ 는 단면 회전각  $\beta$ 와 처짐  $w$ 의 합으로 식(3)과 같이 산정할 수 있다.

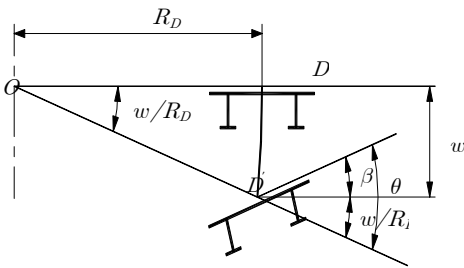


Fig. 2 곡선거더교의 변위상태

$$\theta = \beta + \frac{w}{R_s} \quad (3)$$

순수비틀림  $T_s$  및 휨비틀림  $T_w$ 는 휨비틀림이론에 의해서 식(4)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} T_s &= GK \frac{d\theta}{ds} = GK \left( \frac{d\beta}{ds} + \frac{1}{R_s} \frac{dw}{ds} \right) \\ T_w &= -EI_w \frac{d^3 \theta}{ds^3} \\ &= -EI_w \left( \frac{d^3 \beta}{ds^3} + \frac{1}{R_s} \frac{d^3 w}{ds^3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

연립미분방정식인 식(1), 식(2) 및 식(4)를 되도록 간단히 풀기위하여  $\phi$  지점에서 전단력  $Q_z(\phi)$ 는 식(5)에 의해 직접 풀 수 있다.

$$Q_z(\phi) = -R_s \int_{\phi}^0 p_z d\phi + Q_z(0) \quad (5)$$

여기서,

$$\begin{aligned} Q_z(0) &: \text{적분상수} \\ \phi = 0 &: \text{전단력} \end{aligned}$$

휨모멘트  $M_y(\phi)$ 와 비틀림모멘트  $T_x(\phi)$ 에 대한 미분방정식은 식(1), 식(5)로부터 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 M_y(\phi)}{d\phi^2} + M_y(\phi) &= -p_z R_s^2 + m_y R_s \\ T_x(\phi) &= \int_{\phi}^0 M_y(\phi) d\phi - R_s \int_{\phi}^0 m_x d\phi + C_1 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

같은 방법으로 뒤틀림모멘트  $M_w(\phi)$ 는 식(2)와 식(4)로부터 식(7)과 같이 표현된다.

$$\frac{d^2 M_w(\phi)}{d\phi^2} - \alpha^2 M_w(\phi) = -R_s M_y(\phi) + R_s m_x \quad (7)$$

여기서,

$$\alpha = R_s \sqrt{\frac{G_s K}{E_s I_w}}$$

회전각에 대한 기본방정식은 식(8)과 같이 나타내고, 처짐에 대한 기본방정식은 식(9)와 같이 되며 순수비틀림은 식(10)과 같이 된다.

$$\frac{d^2 \beta(\phi)}{d\phi^2} + \beta(\phi) = \frac{R_s^2}{E_s I_w} M_w(\phi) + \frac{R_s}{E_s I_y} M_y(\phi) \quad (8)$$

여기서,

$$I_y = \frac{R_s}{R_0} I_Y$$

$$w(\phi) = -R_s \int_{\phi}^0 \left[ \int \frac{M_y(\phi)}{EI_y} d\phi + \int \beta(\phi) d\phi \right] d\phi - \phi_y(0) R_s \phi + w(0) \quad (9)$$

$$T_s(\phi) = G_s K \left[ \frac{1}{R_s} \frac{d\beta(\phi)}{d\phi} + \frac{1}{R_s^2} \frac{dw(\phi)}{d\phi} \right] \quad (10)$$

식(8)~식(10)은 Laplace 변환을 이용하여 풀면 식(11)과 같이 된다.

$$w(\phi) = w(0) + \beta(0) R_s (1 - \cos \phi) - \phi(0) R_s \sin \phi + T_s(0) f_{14} + M_w(0) f_{15} + M_y(0) f_{16} + T_x(0) T_{17} + f_{17} + Q_z(0) f_{18} + f_{19}$$

$$\beta(\phi) = \beta(0) \cos \phi + \phi_y(0) \sin \phi + T_s(0) f_{24} + M_w(0) f_{25} + M_y(0) f_{26} + T_x(0) f_{27} + Q_y(0) f_{28} + f_{29}$$

$$\phi_y(0) = -\beta(0) \sin \phi + \phi_y(0) \cos \phi + T_s(0) f_{34} + M_w(0) f_{35} + M_y(0) f_{36} + T_x(0) f_{37} + Q_z(0) f_{38} + f_{39}$$

$$T_s(\phi) = T_s(0) \cosh a\phi + M_w(0) \frac{1}{R_s} \sinh a\phi + M_y(0) f_{46} + T_x(0) f_{57} + Q_z(0) f_{48} + f_{49}$$

$$M_w(\phi) = T_s(0) \frac{R_s}{a} \sin a\phi + M_w(0) \cosh a\phi + M_y(0) f_{56} + T_x(0) f_{57} + Q_z(0) f_{58} + f_{59}$$

$$M_y(\phi) = M_y(0) \cos \phi - T_x(0) \sin \phi + Q_z(0) R_s \sin \phi + f_{69}$$

$$T_x(\phi) = M_y(0) \sin \phi + T_x(0) \cos \phi + Q_z(0) R_s (1 - \cos \phi) + f_{79}$$

$$Q_z(\phi) = Q_z(0) + f_{89} \quad (11)$$

### 2.3 무차원화

계산의 정밀도 향상을 위하여 변위, 부재력 및 하중항을 무차원화하면 식(12)와 같이 된다.

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \omega^* \frac{P_c R_c^3}{E_c I_c}, & \beta &= \beta^* \frac{P_c R_c^2}{E_c I_c} \\ \phi &= \phi^* \frac{P_c R_c^2}{E_c I_c}, & T_s &= T_s^* P_c R_c \\ M_w &= M_w^* P_c R_c^2, & M_y &= M_y^* P_c R_c \\ T_x &= T_x^* P_c R_c, & Q_z &= Q_z^* P_c \\ P &= P^* P_c, & T_P &= T_P^* P_c R_c \\ q_z &= q_z^* \frac{P_c}{R_c}, & m_x &= m_x^* P_c \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

여기서,

$P_c, R_c, E_c, I_c$  : 무차원 기준량

### 2.4 격간행렬

Laplace 변환에 의한 식(12)을 행렬로 나타내면 식(13)이 된다. 식(13)의 제1~5행까지의 요소에는 변곡

$$= \begin{bmatrix} w(\phi) \\ \beta(\phi) \\ \phi(\phi) \\ T_s(\phi) \\ M_w(\phi) \\ M_y(\phi) \\ T_x(\phi) \\ Q_z(\phi) \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & R_s(1 - \cos \phi) & -R_s \sin \phi & f_{14} & f_{15} & f_{16} & f_{17} & f_{18} & f_{19} \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi & f_{24} & f_{25} & f_{26} & f_{27} & f_{28} & f_{29} \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi & f_{34} & f_{35} & f_{36} & f_{37} & f_{38} & f_{39} \\ 0 & 0 & 0 & \cosh a\phi & f_{45} & f_{46} & f_{47} & f_{48} & f_{49} \\ 0 & 0 & 0 & f_{54} & \cosh a\phi & f_{56} & f_{57} & f_{58} & f_{59} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \phi - \sin \phi & R_s \sin \phi & f_{69} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \phi & \cos \phi & R_s(1 - \cos \phi) & f_{79} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & f_{89} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(0) \\ \beta(0) \\ \phi(0) \\ T_s(0) \\ M_w(0) \\ M_y(0) \\ T_x(0) \\ Q_z(0) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

선 함수항이 포함되어 있어, 이 때의 격간행렬을 정의하면 비틀림정수비  $\chi(=a\phi)$ 가 클 때, 변곡선 함수항은 다른 항에 비해서 상당히 크게되어 계산 정도가 좋지 않다. 그래서 식(14) 형태의 새로운 변위량을 도입하여 변곡선 함수항을 분리한다.

$$\alpha = R_s \sqrt{\frac{GK}{EI_w}} \cdot \lambda = \frac{I_w}{R_s^2 I_y}, I_y = \frac{R_s}{R_o} I_y$$

$$\left. \begin{aligned} w_s &= w - \frac{R_s}{EI_y \lambda a^2 (1+a^2)} M_w = w - a M_w \\ \beta_s &= \beta - \frac{1}{EI_y \lambda (1-a^2)} M_w = \beta - b M_w \\ \phi_s &= \phi_y + \frac{R_s}{EI_y \lambda a^2 (1+a^2)} T_s = \phi_y + a T_s \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

그리고, 식(13)을 다시쓰면  $T_s(\phi)$ 과  $M_w(\phi)$ 의 행요소 만이 변곡선 함수항을 포함하는 것이 되므로 식(15)와 같이 단위화 한다.

$$\left. \begin{aligned} T_s &= T_s / \cosh a\phi \\ M_w &= M_w / a\phi \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

격점  $k-1$ 과 격점  $k$ 간의 격간장  $L_k(=R_s \phi_k)$ 의 곡선요소에 대해서는 식(16)과 같이 전달행렬로 표시되어진다.

$$y_{lk} = F_k^* y_{0k}^* \quad (16)$$

여기서,

$$\left. \begin{aligned} y_{0k} &= [w_{s0}, \beta_{s0}, \phi_{s0}, T_{s0}, M_{w0}, M_{y0}, T_{z0}, Q_{z0}, 1] \\ y_{lk} &= [w_{sl}, \beta_{sl}, \phi_{sl}, T_{sl}, M_{wl}, M_{yl}, T_{xl}, Q_{zl}, 1] \end{aligned} \right\}$$

$F_k^*$ : 격간행렬

식(13)의 3행과 4행, 3열과 4열을 생략하고

$$\lambda \alpha^2 = \frac{GK}{EI_y}, \lambda = \frac{I_w}{R_s^2 I_y} = 0 \text{ 라 하면 식(17)에서}$$

곡선형의 순수 비틀림이론에 의한 해석과 일치한다.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ_z}{dl} &= -q_z, \frac{dM_Y}{dl} - Q_z + \frac{T_s}{R_D} = 0 \\ \frac{dT_s}{dl} - \frac{M_Y}{R_D} &= -m_x \\ EI_y \left( \frac{d^2 w_s}{dl^2} - \frac{\beta_s}{R_D} \right) &= -M_Y \\ GK \left( \frac{d\beta_s}{dl} + \frac{1}{R_D} \frac{dw_s}{dl} \right) &= T_s \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

그러므로, 변위  $w_s, \phi_s$  및  $\beta_s$ 는 순수 비틀림이론에 의한 변위라고 할 수 있다.

## 2.5 격점행렬

Fig. 3에서 절점  $k$ 와 절점  $k+1$ 의 변위에 관한 적합조건과 부재력의 평형조건을 고려하면 식(18)과 같이 된다.

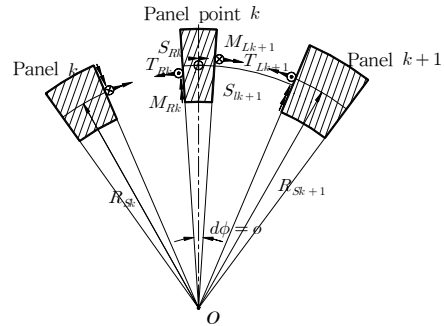


Fig. 3 격점  $k$ 에 관한 단면력

$$\left. \begin{aligned} w_{s(k+1)} &= w_{sk} - (R_{s(k+1)} - R_{sk}) \beta_{sk} \\ \beta_{s(k+1)} &= \beta_{sk} \\ \phi_{s(k+1)} &= \phi_{sk} \\ T_{s(k+1)} &= T_{sk} \\ M_{w(k+1)} &= M_{wk} \\ M_{y(k+1)} &= M_{Yk} \\ T_{s(k+1)} &= T_{sk} - (R_{s(k+1)} - R_{sk}) Q_{zsk} - T_{pk} \\ Q_{z(k+1)} &= Q_{zsk} - P_k \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

이러한 조건들은 다음과 같은 행렬 형태로 식(19)과 같이 표현된다.

$$y_{lk+1}^* = P_k^* y_{0k}^* \quad (19)$$

여기서,

$$y_{0k}^* = \{ \omega_{s0k}^*, \beta_{s0k}^*, \psi_{s0k}^*, M_{0k}^*, T_{s0k}^*, M_{w0k}^*, T_{x0k}^*, Q_{z0k}^* 1 \}^T$$

$$y_{lk}^* = \{ \omega_{s lk}^*, \beta_{s lk}^*, \psi_{s lk}^*, M_{lk}^*, T_{s lk}^*, M_{w lk}^*, T_{x lk}^*, Q_{z lk}^* 1 \}^T$$

적점행렬은 식(20)과 같이 나타낼 수 있다.

$$P_k = \begin{bmatrix} 1 & P_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & P_b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -P_c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

여기서,

$$P_a = -(R_{sk+1} - R_{sk}), P_b = (R_{sk+1} - R_{sk})$$

$$P_c = -T_{Pk}$$

순수 비틀림이론은 식(20)의 음영부분을 무시하면 되고, 식(16)과 식(19)를 조합시키면 n개로 구성되는 곡선형 좌우단의 상태벡터는 식(21)에 따라 구할 수 있다.

$$y_{lk+1} = P_k F_k P_{k-1} F_{k-1} P_{k-2} \cdots F_2 P_1 F_1 y_{L,1} \quad (21)$$

### 3. 프로그램의 검증

#### 3.1 해석 모델

Fig. 4에서 나타낸 것과 같이 2경간 연속 곡선교를 해석 하였고, 그 결과를 유한차분법에 의한 해석결과와 비교검토 하였다.

단면의 재원은 Table 1에서 표시되어 있으며, 등분포 하중  $1k/in$ 과 비틀림 등분포하중  $1k-in/in$ 으로 작용시켰다. 부재는 16개로 나누었으며, 유한차분법에서는 하나의 곡선요소의 길이를 11.17098 in.가 되도록 하였다.

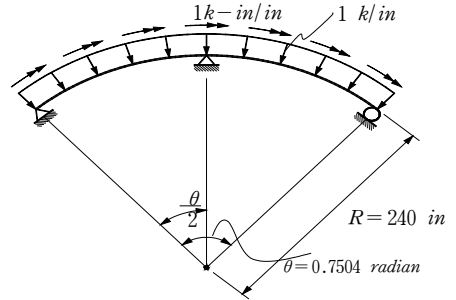


Fig. 4. 2경간 곡선거더교의 하중상태

Table 1 단면 및 재료의 제원

E(ksi)	29,000	G(ksi)	11,154
$I_x$ (in <sup>4</sup> )	273.2	$K_t$ (in <sup>4</sup> )	1.390
$I_w$ (in <sup>6</sup> )	2073	L(in)	180.096

Table 2 처짐 비교 (in)

Property	Location (Point)	F.D.M	T.M.M (Difference(%))
Deflection ( $\times 10^{-1}$ )	1	0.000000	0.000000 (0.0000)
	2	0.239458	0.233125 (2.7166)
	3	0.422052	0.410482 (2.8186)
	4	0.512738	0.496956 (3.1757)
	5	0.500135	0.481452 (3.8806)
	6	0.386964	0.377294 (2.5629)
	7	0.228982	0.221029 (3.5982)
	8	0.072137	0.0700311 (3.0072)
	9	0.000000	0.000000 (0.0000)

Table 3 순수 비틀림 비교(In-kips)

Property	Location (Point)	F.D.M	T.M.M (Difference(%))
S.t Ven. torsion	1	2.120252	2.076220 (2.1208)
	2	1.850912	1.826560 (1.3880)
	3	1.084628	1.064340 (1.9062)
	4	0.011500	0.011490 (0.0870)
	5	-0.917660	-0.936850 (2.0484)
	6	-1.393238	-1.394960 (0.1235)
	7	-1.196090	-1.169440 (2.2789)
	8	-0.449230	-0.448050 (0.2634)
	9	0.000000	0.000000 (0.0000)

Table 4 휨 비틀림 비교(In-kips)

Property	Location (Point)	F.D.M	T.M.M (Difference(%))
Warping torsion ( $\times 10^2$ )	1	0.230512	0.230412 (0.0434)
	2	0.184410	0.184302 (0.0586)
	3	0.106308	0.103992 (2.2271)
	4	-0.031664	-0.032108 (1.3828)
	5	-0.167971	-0.164289 (2.2412)
	6	-0.239029	-0.232849 (2.6541)
	7	-0.177575	-0.178227 (0.3658)
	8	0.057016	0.058867 (3.1444)
	9	0.299608	0.298764 (0.2825)

Table 2~4에서는 각 부재력의 값은 좌우대칭으로 나타나므로 중간지점인 9절점까지의 값만 유한차분법과 비교한 결과이다. Table 2의 처짐과 Table 3의 순수 비틀림은 지점부에서 지간의 중앙부로 갈수록 차이는 커졌으며, 각각 최고 3.8806%, 2.0484% 정도 되었다. 이러한 차이는 전달행렬법의 특성인 좌단의 상태벡터와 구조물의 종단의 경계조건까지 전달되기까지의 전달행렬의 순차적인 곱과 중간지점에 대한 경계조건을

세워 초기벡터에 있어서의 미지량 수와 중간지점에 있어서의 미지량 수와의 합계에서 연립방정식을 풀어주는 차이라고 판단된다. 따라서 부재력의 차이는 4% 미만으로 해의 수렴이 비슷함을 알 수 있었고, 2경간 곡선교에 대한 프로그램의 신뢰성이 검증되었다.

#### 4. 수치해석 및 결과분석

비틀림에 의한 부재력은 비틀림정수비( $\chi = R_s \phi \sqrt{GK/EI_w}$ )에 따라서 변한다. 극단적인 경우  $\chi=0$ ,  $\chi=\infty$ 인 2가지의 경우가 고려된다. 그러므로  $\chi=0$ 이라는 것은 개단면과 같은 경우이고  $GK \neq 0$ 으로  $EI_w \neq 0$ 일 때에 일어난다. 따라서, 순수 비틀림이론과 휨 비틀림이론에 대한 해석 범위를 알아보기 위한 Table 5와 같이 참고문헌<sup>(1)</sup>을 조사하여 검토하였다. 하중은 단위 등분포하중  $W=1tf/m$ 과 단위 등분포 비틀림하중  $T_w=1tf \cdot m/m$ 를 사용하였고,  $T_{total}$ 을 기준으로 하여 1, 2, 3경간에 임의의  $\chi$ 에 대한  $T_s/T_{total}$  및  $T_w/T_{total}$ 에 따라 해석을 수행하였다.

Table 5 곡선교의 단면정수<sup>(3)</sup>  $T_w/T_{total}$

	단면 형태	교장 L(m)	곡률반경 $R_s$ (m)	중심각 $\phi$ (rad)	폭원 A(m)	단면2차모멘트 $I_y(\times 10^6 cm^4)$	비틀림상수 $J(\times 10^6 cm^4)$	휨비틀림 상수 $I_w(\times 10^{10} cm^6)$	κ치	행복 B(m)	φ치	L/B치	γ 치
1	병렬I형 곡선교	19.5	57.0	0.342	6.5	8.210	3.129	31.527	1.206	4.0	0.70	4.88	0.114
2		20.0	50.0	0.400	9.2	10.570	2.173	61.700	1.008	5.3	1.42	3.77	0.156
3		25.0	51.0	0.490	6.5	8.181	6.938	51.939	0.7371	5.4	1.01	4.63	0.104
4		27.0	31.0	0.871	7.5	14.219	1.512	92.500	1.794	6.5	1.08	4.15	0.088
5		30.0	60.0	0.500	7.0	20.436	1.240	98.415	0.661	5.4	1.01	5.56	0.055
6		33.4	90.0	0.371	8.2	22.830	1.662	93.749	0.873	6.0	1.46	5.57	0.059
7		40.0	74.0	0.528	8.5	20.443	1.252	151.888	0.713	7.5	1.26	5.33	0.059
8		22.0	61.0	0.361	9.7	6.416	56.221	37.962	5.258	6.8	2.10	3.24	0.470
9		25.0	40.7	0.614	7.8	8.435	69.197	63.184	5.138	4.9	1.21	5.10	0.377
10	2박스형 곡선교	25.0	40.9	0.611	8.5	7.442	41.132	32.713	5.054	5.8	1.64	4.31	0.304
11		30.0	40.0	0.750	7.8	13.830	99.898	82.144	6.367	4.9	1.70	6.12	0.344
12		40.0	64.2	0.623	8.0	33.586	193.056	211.914	7.498	4.96	2.04	8.06	0.262
13		45.0	80.0	0.563	12.71	39.124	263.979	592.663	5.898	8.0	1.96	5.63	0.271
14		45.0	80.5	0.559	12.71	41.815	273.470	653.343	5.718	8.5	1.89	5.23	0.328
15		45.0	85.5	0.528	13.1	46.595	284.607	677.368	5.729	8.0	1.92	5.63	0.304
16		50.0	88.7	0.564	12.6	44.305	284.743	675.076	6.377	8.0	1.93	6.25	0.341
17		50.0	84.9	0.589	13.1	50.162	301.901	776.817	6.122	8.0	1.82	6.29	0.322
18		22.0	60.0	0.340	7.9	7.067	190.784	0.3140	106.5	5.4	12.31	4.07	0.890
19	1박스형 곡선교	30.0	79.0	0.380	7.9	11.064	124.550	0.818	60.3	5.4	5.63	5.56	0.890
20		32.0	50.0	0.640	8.2	15.430	273.300	4.942	46.74	4.5	1.89	7.11	0.686
21		37.4	54.2	0.690	8.2	17.355	230.320	1.327	96.77	5.4	22.43	6.93	0.785

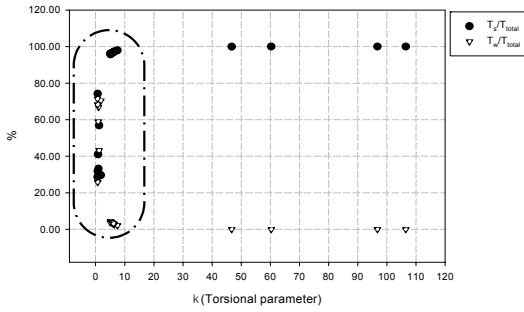


Fig. 5 등분포하중에 대한  $T_s/T_{total}$  (%),  $T_w/T_{total}$  (%)와 비틀림정수비  $\chi$ 의 관계 (1경간)

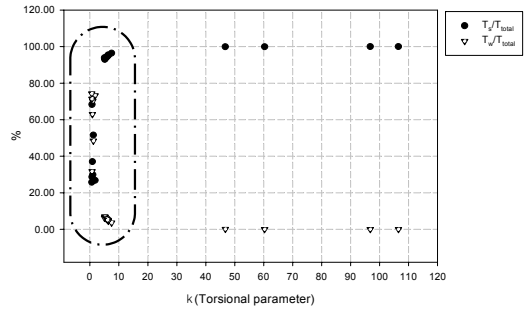


Fig. 8 등분포비틀림하중에 대한  $T_s/T_{total}$  (%),  $T_w/T_{total}$  (%)와 비틀림정수비  $\chi$ 의 관계 (2경간)

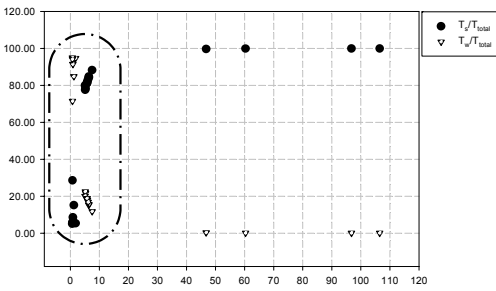


Fig. 6 등분포비틀림하중에 대한  $T_s/T_{total}$  (%),  $T_w/T_{total}$  (%)와 비틀림정수비  $\chi$ 의 관계 (1경간)

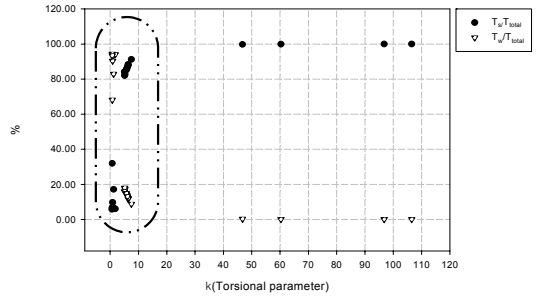


Fig. 9 등분포하중에 대한  $T_s/T_{total}$  (%),  $T_w/T_{total}$  (%)와 비틀림정수비  $\chi$ 의 관계(3경간)

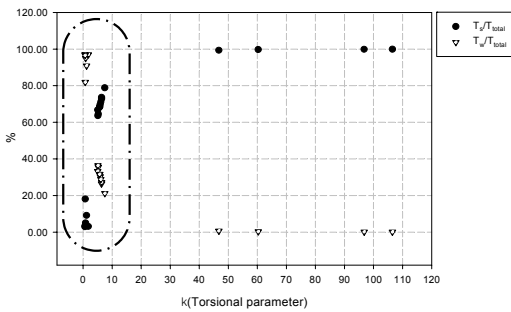


Fig. 7 등분포하중에 대한  $T_s/T_{total}$  (%),  $T_w/T_{total}$  (%)와 비틀림정수비  $\chi$ 의 관계(2경간)

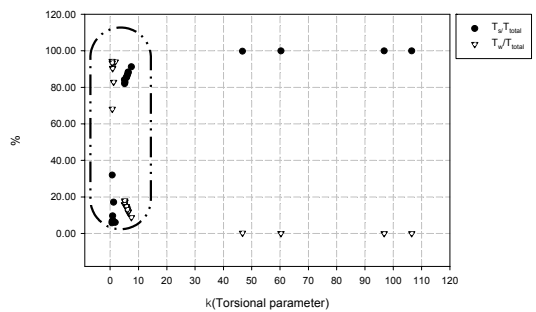


Fig. 10 등분포비틀림하중에 대한  $T_s/T_{total}$  (%),  $T_w/T_{total}$  (%)와 비틀림정수비  $\chi$ 의 관계 (3경간)

곡선교의 구체적인 설계를 하기 위한 평면형상이나 단면형상에 따른 역학적 특성을 검토하기 위해 순수 비틀림이론과 휨 비틀림이론에서 해석되는 범위를 결정하는 것은 매우 중요한 일이다.

Fig. 5, 7, 9에서는 등분포하중이 작용했을 때 1경간, 2경간, 3경간의 비틀림 정수비에 따른 각 위치에서  $T_s/T_{total}$ ,  $T_w/T_{total}$  비를 나타내고 있으며, 경간의 수가 증가할수록 휨 비틀림이 증가하는 것을 알 수 있고,



비틀림 정수비  $\chi$  가 적을수록 휨 비틀림이 증가하는 경향을 보여주고 있다. 또한, Muti-I의 단경간에서  $T_s/T_{total}$  31.77~74.21%,  $T_w/T_{total}$  25.79~68.23% 이고, 2경간에서  $T_s/T_{total}$  5.07~15.18%,  $T_w/T_{total}$  71.46~94.69%, 3경간에서  $T_s/T_{total}$  3.43~18.10%,  $T_w/T_{total}$  81.90~96.57%의 범위에 있었다.

2거더의 단경간에서  $T_s/T_{total}$  95.73~97.93%,  $T_w/T_{total}$  2.07~4.27%, 2경간에서  $T_s/T_{total}$  77.54~88.25%,  $T_w/T_{total}$  11.75~22.46%, 3경간에서  $T_s/T_{total}$  63.61~78.83%,  $T_w/T_{total}$  21.17~36.39%의 범위에 있었다.

1박스의 1경간에서  $T_s/T_{total}$  99.94~99.99%,  $T_w/T_{total}$  0.01~0.06%, 2경간에서  $T_s/T_{total}$  99.92~99.94%,  $T_w/T_{total}$  0.06~0.14%, 3경간에서  $T_s/T_{total}$  99.33~99.87%,  $T_w/T_{total}$  0.13~0.67%의 범위에 있었다.

Fig. 6, 8, 10에서는 등분포 비틀림하중이 작용했을 시 1경간, 2경간, 3경간의 비틀림 정수비에 따른 각 위치에서  $T_s/T_{total}$ ,  $T_w/T_{total}$  비를 나타내고 있다. 경간의 수가 증가할수록 휨 비틀림이 증가하는 것을 알 수 있고, 비틀림 정수비  $\chi$  작을수록 휨 비틀림이 증가하는 경향을 보여주고 있다. Muti-I의 단경간에서  $T_s/T_{total}$  25.76~68.29%,  $T_w/T_{total}$  31.71~74.24%이고, 2경간에서  $T_s/T_{total}$  5.75~31.93%,  $T_w/T_{total}$  68.07~94.25%, 3경간에서  $T_s/T_{total}$  2.89~18.00,  $T_w/T_{total}$  82.00~97.11%의 범위에 있었다. 2 거더의 단경간에서  $T_s/T_{total}$  5.05~7.50%,  $T_w/T_{total}$  3.56~6.94%, 2경간에서  $T_s/T_{total}$  82.01~91.19%,  $T_w/T_{total}$  8.81~17.99% 3경간에서  $T_s/T_{total}$  65.74~81.28%,  $T_w/T_{total}$  24.76~34.26%의 범위에 있었다.

1박스의 1경간에서  $T_s/T_{total}$  99.90~99.98%,  $T_w/T_{total}$  0.02~0.10%, 2경간에서  $T_s/T_{total}$  99.91~99.96%,  $T_w/T_{total}$  0.05~0.09%, 3경간에서  $T_s/T_{total}$  99.48~99.90%,  $T_w/T_{total}$  0.10~0.52%의 범위에 있었다.

비틀림 정수비  $\chi$  는 1~10 사이의 값이 1경간에서

전체  $T_w/T_{total}$  80%정도를 나타내고 있는데, 이는  $T_w/T_{total}$  이 1을 경계로 해서 급격히 증가하고 10을 넘으면 거의 무시할 정도로 휨 비틀림의 영향이 적음을 알 수 있었다. 2경간, 3경간도 비슷한 양상을 보이고 있지만, 경간이 증가할수록  $T_w/T_{total}$  이 증가하는 것은 중간 지점부에서는 휨 비틀림의 영향이 크기 때문인 것으로 판단된다.

따라서, 비틀림정수비가 클지라도 다경간 연속교의 중간지점에 대한 응력조사 시에는 반드시 솟구침 모멘트와 휨 비틀림의 영향을 고려해야 한다. 또한, 이러한  $T_s/T_{total}$ ,  $T_w/T_{total}$  은 순수 비틀림이론과 휨 비틀림이론을 판단하는 근거를 제시하였으며, 휨 비틀림이론이 아닌 순수 비틀림이론으로써 곡선교를 해석하는데 필요한 자료가 될 것으로 판단된다.

## 5. 결론

본 연구에서는 곡선거더교의 평행방정식으로부터 구한 미분방정식을 라플라스 변환하여 격간행렬과 절점의 연속 조건식을 고려한 격점행렬을 이용한 전달행렬법을 사용하여 연속 곡선상자형교에 대하여 해석하였다. 프로그램에 따른 해석을 분석한 결과는 다음과 같다.

- 1) 본 연구에서 작성한 전달행렬법에 의한 프로그램은 유한차분법과 비교하여 4% 이내의 차이가 나타났고, 이 차이는 전달행렬법의 특성인 좌단의 상태벡터와 구조물의 중단의 경계조건까지 전달되기까지의 행렬의 순차적인 곱과 중간지점에 대한 경계조건을 세워 초기벡터에 있어서의 미지량 수와 중간지점에 있어서의 미지량 수와의 합계에서 연립방정식을 풀어주는 차이라고 판단되며, 프로그램의 신뢰성이 검증 되었다.
- 2) 비틀림 정수비  $\chi$  는 1~10 사이의 값이 1경간에서는 전체  $T_w/T_{total}$  80%정도를 나타내고 있는데, 이는  $T_w/T_{total}$  이 1을 경계로 해서 급격히 증가하고 10을 넘으면 거의 무시할 정도로 휨 비틀림의 영향이 적다. 2경간, 3경간도 비슷한 양상을 보이고 있지만, 경간이 증가할수록  $T_w/T_{total}$  이 증가하는 것은 중

간 지점부에서는 휨 비틀림의 영향이 크기 때문인 것으로 판단된다.

- 3) 비틀림 정수비가 클지라도 다경간 연속교의 중간지점에 대한 응력조사 시에는 반드시 휨 비틀림모멘트와 휨 비틀림의 영향을 고려해야 한다. 또한, 이러한  $T_s/T_{total}$ ,  $T_w/T_{total}$ 은 단순 비틀림이론과 휨 비틀림이론을 판단하는 근거를 제시하였다.

#### 감사의 글

본 연구는 2004년도 진주산업대학교 기성회 연구비 지원에 의하여 수행되었으며, 이에 감사드립니다.

#### 참고문헌

1. 방명석 역, “강교설계의 기초”, 건설도서, 1993, pp. 320~332.
2. 成岡昌夫, 遠田良喜, “傳達マトリックス法”, 培風館, 1970, pp.1~44.
3. Chaudhuri, S.K. and S.Shore, “Thin-walled Curved Beam Finite Element”, Journal of the Engineering mechanics, ASCE, Vol.103,1977, pp. 921~939.
4. Rabisadeh, R.O. and S. Shore., “Dynamic Analysis of Curved Box Girder Bridges”, Journal of the structural Division, ASCE, No.ST9, 1975, pp.1899~1912.
5. Chaudhuri, S.K., “Dynamic Response of Horizontally Curved I-Grider Highway Bridges Due to a moving Vehicle”, Ph.D. Thesis, Univ. of Pennsylvania, 1975.
6. Hiroshi Nakai, Chai Hong Yoo, “Analysis and Desing of Cuved Steel Bridges”, McGraw-Hill Book Company, pp. 9-168.
7. Komatusu., Konisi., “Three Dimensional Analysis of Curved Girder with Thin-walled Cross Section”, International Association for Bridge and Structural Engineers, Zurich, Genmany, 1965.
8. Heins, C.P., “Bending and Torsional Design in Structural Members”, Lexington Books, D.C. Heath and Company, 1975

(접수일자 : 2005년 5월 6일)