

# 축방향 압축력을 받는 인발성형부재의 좌굴해석

## Buckling Analysis of Pultruded Members under Axial Compression

이 승 식<sup>1)</sup> · 백 성 용<sup>2)</sup>  
*Lee, Seung Sik · Back, Sung Yong*

요약 : 본 논문에서는 부재의 lay-up에 상관없이 사용할 수 있으며 복합재료 부재의 거동에 중요한 영향을 미치는 포아송 효과를 고려할 수 있는 확장된 복합재료 보이론을 제시하고, 확장된 보이론을 바탕으로 축방향 압축력을 받는 복합재료 박판부재의 좌굴식을 유도하였다. 유도된 좌굴식을 검증하기 위해서 기존에 발표된 인발성형 vinylester/E-glass 및 polyester/E-glass T형 부재의 휨-비틀림 좌굴실험결과와 vinylester/E-glass H형 부재의 휨 좌굴실험결과를 수치예제로 사용하였다. 이론적 좌굴하중과 실험적 좌굴하중 및 유한요소해석 결과와의 비교를 통하여 본 연구에서 제안된 좌굴식이 인발성형부재의 좌굴하중을 7% 정도 안전측으로 예측하는 것을 알 수 있었다.

ABSTRACT : In the present paper, an extended composite beam theory that has no restriction on the lay-up and can account for Poisson effect which is significant for composite materials is proposed. Buckling equations for composite thin-walled members which are subjected to axial compression are derived based on the composite beam theory. In order to check the validity of the derived buckling equations, the results of experiments on the flexural-torsional buckling of vinylester/E-glass and polyester/E-glass pultruded T-section members and the flexural buckling of vinylester/E-glass pultruded H-section members are used as numerical examples. The comparison of the analytical results to the experimental and FE analysis results reveals that the proposed buckling equations predict the buckling loads of pultruded members conservatively by about 7%.

핵심용어 : 좌굴, 보이론, 인발성형, 복합재료, Ritz 방법

KEYWORDS : buckling, beam theory, pultrusion, composite materials, Ritz method

### 1. 서론

강재보다 뛰어난 비강도, 내구성, 피로특성을 가지고 있는 섬유보강 플라스틱 복합재료를 건설 분야에서 사용할 경우가 가벼운 자중으로 인한 운반 및 거치의 편의, 일체화를 통한 시공기간의 단축, 유지관리 비용의 절감 등의 이점을 기대할 수 있다. 그러나 현재까지 설계기준의 미비로 인하여 건설 분야에서는 항공 및 기계 분야와 달리 복합재료가 본격적으로 사용되고 있지 않다(Bakis 등, 2002).

건설 분야에서 사용되는 복합재료 부재는 일반적으로 E-glass 섬유와 폴리머계 수지를 사용하여 인발성형(pultrusion) 공정에 의해서 생산되며, 이러한 재료의 조합으로 인하여 인발성형 부재는 강재와 비교해서 높은 강도와 낮은 탄성계수를 갖게 된다. 따라서 부재의 설계과정에서 재료의 강도보다

는 사용성과 좌굴에 대한 검토가 매우 중요한 역할을 차지하게 된다.

본 연구에서는 기존에 발표된 Bauld와 Tzeng(1984)의 적층복합재료 보이론을 복합재료 부재의 lay-up에 상관없이 사용할 수 있도록 확장하고, 확장된 이론을 통하여 얻은 인발성형 부재의 좌굴해석 결과를 기존에 발표된 실험결과 및 유한요소해석 결과와 비교하여 인발성형 부재에 대한 보이론 사용의 타당성을 검토하였다. 또한 복합재료 고유의 특성인 탄성연계(elastic coupling)현상의 영향을 고려할 수 있으며 등방성이론과 매우 유사한 형태로 표현되는 좌굴식을 제안함으로써 본 연구의 결과가 인발성형부재의 좌굴에 관한 설계기준제정을 위한 기초적인 자료로 사용될 수 있도록 하였다.

1) 교신저자, 정회원, SK건설(주) 연구소, 공학박사  
(Tel. 02-3700-5225, Fax. 02-3700-8250, E-mail: drslee@naver.com)  
2) 정회원, 인제대학교 토목공학과, 부교수, 공학박사(civsyb@inje.ac.kr)

본 논문에 대한 토의를 2007년 4월 30일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

## 2. 복합재료 보이론

### 2.1 기본가정

본 연구에서는 그림 1, 2와 같이 복합재료 박판부재를 정의하기 위한 전체좌표계로서 직교좌표계  $(x, y, z)$ 와 복합재료 박판부재의 각 판요소를 정의하기 위한 국부좌표계로서 직교좌표계  $(n, x, s)$ 와 중심선좌표계(contour coordinate system)  $s$ 가 사용되었다. 국부좌표계에서  $n$ 축은 중심선 또는 중심면(middle surface)과 수직을 이루며  $x$ 축은 전체좌표계의  $x$ 축과 평행하고  $s$ 축은 중심선과 접선을 이룬다.

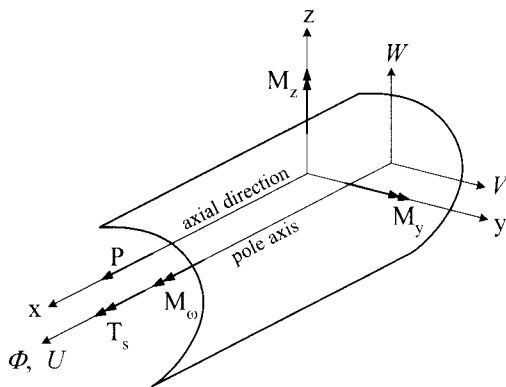


그림 1. 전체좌표계

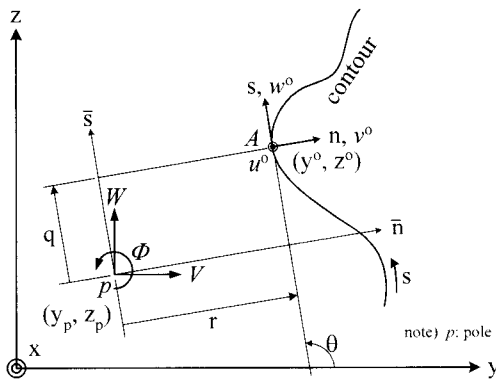


그림 2. 국부좌표계

복합재료 박판부재의 부재력과 변위는 그림 1에 나타나 있으며  $P$ 는 축방향력,  $M_y$ 와  $M_z$ 는 휨모멘트,  $T_s$ 는 St. Venant 비틀림, 그리고  $M_o$ 는 위핑 비틀림이다. 또한, 그림 2에서  $V$ 와  $W$ 는 pole의 횡변위,  $\Phi$ 는 pole축에 대한 단면의 비틀림각이며, 위첨자 'o'는 해당 변수가 중심면에서 정의되는 값을 나타낸다.

Bauld와 Tzeng(1984)이 복합재료 보이론의 유도과정에 사용한 기본가정은 다음과 같다.

- (1) 단면을 구성하는 판요소들의 중심선은 그 평면 내에서

변형되지 않는다.

- (2) 각 판요소에 대해서 중심면의 전단변형률( $\gamma_s^o$ )은 0이다.
- (3) 각 판요소들은 얇은 판과 같이 거동한다.
- (4) 중심선 방향으로의 원환응력( $\sigma_s$ )은 축방향으로의 수직응력( $\sigma_x$ )에 비교하여 매우 작다.
- (5) 각 판요소는 고전적 적층판이론의 구성방정식을 따르는 섬유보강 적층판이다.
- (6) 각 판요소는 중심면에 대칭인 섬유보강 적층판이다.

위에서 가정 (1)은 중심선방향 변형률( $\epsilon_s^o$ )이 축방향 변형률( $\epsilon_x^o$ )에 비교하여 작고 부재의 변형 시 단면은 변형을 일으키지 않는다는 것을 의미한다. Bauld와 Tzeng(1984)은 가정 (1)과 (4)를 이용하여 중심선 방향의 변형률( $\epsilon_s^o$ )과 곡률( $\kappa_s$ ), 그리고 내력( $N_{ss}$ ,  $M_{ss}$ )을 무시하였다. 하지만 가정 (1)과 (4)는 서로 모순될 뿐만 아니라 포아송 효과가 거동에 중요한 영향을 미치는 복합재료에서 동일방향의 변형과 힘을 동시에 무시하는 것은 합리적이지 않다. 따라서 본 연구에서는 내력( $N_{ss}$ ,  $M_{ss}$ )만 무시하였으며 비대칭 적층판도 고려하기 위하여 가정 (6)은 사용되지 않았다.

### 2.2 적합조건식

가정 (1)과 (2)로부터 국부좌표계에서 정의되는 판의 변위  $v^o(x, s)$ ,  $w^o(x, s)$ ,  $u^o(x, s)$ 와 전체좌표계에서 정의되는 복합재료 박판부재의 변위  $U(x)$ ,  $V(x)$ ,  $W(x)$ ,  $\Phi(x)$  사이의 관계는 다음과 같이 표현된다.

$$v^o(x, s) = V(x)\sin\theta(s) - W(x)\cos\theta(s) - \Phi(x)q(s) \quad (1)$$

$$w^o(x, s) = V(x)\cos\theta(s) + W(x)\sin\theta(s) + \Phi(x)r(s) \quad (2)$$

$$u^o(x, s) = U(x) - V'(x)y^o(s) - W'(x)z^o(s) - \Phi'(x)\omega^o(s) \quad (3)$$

여기서,  $U(x)$ 는 복합재료 박판부재의 축방향 평균변위이며,  $V'(x)$ ,  $W'(x)$ ,  $\Phi'(x)$ 는  $V(x)$ ,  $W(x)$ ,  $\Phi(x)$ 의  $x$ 에 대한 1차 도함수이다.  $\omega^o(s)$ 는 위핑함수로 다음과 같이 정의된다.

$$\omega^o(s) = \int_c r(s)ds \quad (4)$$

여기서,  $c$ 는 곡선좌표계의 시작점과 임의의 점 사이의 구간이

다. 지금부터  $u^\circ(x,s)$ ,  $v^\circ(x,s)$ ,  $w^\circ(x,s)$ ,  $q(s)$ ,  $r(s)$ ,  $\theta(s)$ ,  $\omega^\circ(s)$ ,  $U(x)$ ,  $V(x)$ ,  $W(x)$ ,  $\Phi(x)$ 는 간단히  $u^\circ$ ,  $v^\circ$ ,  $w^\circ$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $\theta$ ,  $\omega^\circ$ ,  $U$ ,  $V$ ,  $W$ ,  $\Phi$ 로 표기된다.

판의 변위, 식 (1)부터 식 (3)를 변형률( $\epsilon_s^\circ$ )과 곡률( $\kappa_x$ ,  $\kappa_{xs}$ )의 정의에 대입하면 복합재료 박판부재의 변위들로 이루어진 변형률과 곡률을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\epsilon_x^\circ = \frac{\partial u^\circ}{\partial x} = U' - V''y^\circ - W''z^\circ - \Phi''\omega^\circ \quad (5)$$

$$\kappa_x = \frac{\partial^2 v^\circ}{\partial x^2} = V''\sin\theta - W''\cos\theta - \Phi''q \quad (6)$$

$$\kappa_{xs} = 2 \frac{\partial^2 v^\circ}{\partial x \partial s} = -2\Phi' \quad (7)$$

### 2.3 구성방정식

고전적 적층판이론에 의한 적층판의 구성방정식은 다음과 같다(Jones, 1999).

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{ss} \\ N_{xs} \\ M_{xx} \\ M_{ss} \\ M_{xs} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ & & A_{66} & B_{26} & B_{66} & \\ & & & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ & & & & D_{22} & D_{26} \\ & & & & & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^\circ \\ \epsilon_s^\circ \\ \gamma_{xs}^\circ \\ \kappa_x \\ \kappa_s \\ \kappa_{xs} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

여기서,  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $D_{ij}$ 는 각각 적층판의 인장, 휨-인장 커플링, 휨 강성이며 다음과 같이 정의된다.

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (n_k - n_{k-1}) \quad (9)$$

$$B_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (n_k^2 - n_{k-1}^2) \quad (10)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (n_k^3 - n_{k-1}^3) \quad (11)$$

식 (9), (10), (11)에서  $(\bar{Q}_{ij})_k$ 는  $k$ 번째 층의 변환감소강성이며,  $n_k$ 와  $n_{k-1}$ 은 중심면으로부터  $k$ 번째 층의 외측과 내측 표면까지의 거리를 의미한다(Gibson 1994; Jones 1999). 본 연구에서 사용된 모멘트의 정의, 식 (41), 때문에 식 (10)에서 ‘-’부호가 사용되었다.

가정 (2)와 (4)를 식 (8)에 적용하면 다음과 같이 간단한

형태의 적층판의 구성방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ M_{xx} \\ M_{xs} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{B}_{11} & \hat{B}_{16} \\ & \hat{D}_{11} & \hat{D}_{16} \\ sym. & & \hat{D}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^\circ \\ \kappa_x^\circ \\ \kappa_{xs}^\circ \end{Bmatrix} \quad (12)$$

여기서,  $\hat{A}_{11}$ ,  $\hat{B}_{11}$ ,  $\hat{B}_{16}$ ,  $\hat{D}_{11}$ ,  $\hat{D}_{16}$ ,  $\hat{D}_{66}$ 는 적층판의 축약된 강성이며 다음과 같이 표현된다.

$$\hat{A}_{11} = A_{11} + \frac{2A_{11}B_{12}B_{22} - A_{22}B_{12}^2 - D_{22}A_{12}^2}{A_{22}D_{22} - B_{22}^2} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \hat{B}_{11} &= B_{11} \\ &+ \frac{A_{12}B_{22}D_{12} - A_{12}B_{12}D_{22} - A_{22}B_{12}D_{12} + B_{22}B_{12}^2}{A_{22}D_{22} - B_{22}^2} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \hat{B}_{16} &= B_{16} \\ &+ \frac{A_{12}B_{22}D_{26} + B_{12}B_{22}B_{26} - A_{12}B_{26}D_{22} - A_{22}B_{12}D_{26}}{A_{22}D_{22} - B_{22}^2} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\hat{D}_{11} = D_{11} + \frac{2B_{12}B_{22}D_{12} - A_{22}D_{12}^2 - D_{22}B_{12}^2}{A_{22}D_{22} - B_{22}^2} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \hat{D}_{16} &= D_{16} \\ &+ \frac{B_{12}B_{22}D_{26} + B_{22}B_{26}D_{12} - A_{22}D_{12}D_{26} - B_{12}B_{26}D_{22}}{A_{22}D_{22} - B_{22}^2} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\hat{D}_{66} = D_{66} + \frac{2B_{22}B_{26}D_{26} - A_{22}D_{26}^2 - D_{22}B_{26}^2}{A_{22}D_{22} - B_{22}^2} \quad (18)$$

또한, 식 (5), (6), (7)을 식 (12)에 대입함으로써 다음과 같이  $N_{xx}$ ,  $M_{xx}$ ,  $M_{xs}$ 를 복합재료 박판부재의 변위들로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} N_{xx} &= \hat{A}_{11}U' - (\hat{A}_{11}z^\circ + \hat{B}_{11}\cos\theta)W'' \\ &- (\hat{A}_{11}y^\circ - \hat{B}_{11}\sin\theta)V' \\ &- (\hat{A}_{11}\omega^\circ + \hat{B}_{11}q)\Phi'' - (2\hat{B}_{16})\Phi' \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} M_{xx} &= \hat{B}_{11}U' - (\hat{B}_{11}z^\circ + \hat{D}_{11}\cos\theta)W'' \\ &- (\hat{B}_{11}y^\circ - \hat{D}_{11}\sin\theta)V'' \\ &- (\hat{B}_{11}\omega^\circ + \hat{D}_{11}q)\Phi'' - (2\hat{D}_{16})\Phi' \end{aligned} \quad (20)$$

$$M_{xs} = \hat{B}_{16}U' - (\hat{B}_{16}z^\circ + \hat{D}_{16}\cos\theta)W'' - (\hat{B}_{16}y^\circ - \hat{D}_{16}\sin\theta)V'' - (\hat{B}_{16}\omega^\circ + \hat{D}_{16}q)\Phi'' - (2\hat{D}_{66})\Phi' \quad (21)$$

복합재료 박판부재의 부재력과 적층판의 내력사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다(Bauld와 Tzeng, 1984).

$$P = \int_C N_{xx} ds \quad (22)$$

$$(M_y, M_z, M_\omega) = \int_C [N_{xx}(z, -y, -\omega) + M_{xx}(\cos\theta, \sin\theta, -q)] ds \quad (23)$$

$$T_s = \int_C (-2M_{xs}) ds \quad (24)$$

여기서,  $C$ 는 전체 중심선의 길이를 의미한다.

식 (19)부터 (21)을 식 (22)부터 (24)에 대입한 뒤 전체 중심선의 길이,  $C$ ,에 대해서 적분하면 다음과 같은 복합재료 박판부재의 구성방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} P \\ -M_y \\ M_z \\ M_\omega \\ T_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a - S_y - S_z - S_\omega - B_a & & & & \\ & D_{yy} & D_{yz} & D_{y\omega} & H_c \\ & & D_{zz} & D_{z\omega} & -H_s \\ & & & D_{\omega\omega} & H_q \\ & & & & D_{JJ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U' \\ W'' \\ V'' \\ \Phi'' \\ \Phi' \end{Bmatrix} \quad (25)$$

여기서,  $A_a, D_{yy}, D_{zz}, D_{\omega\omega}, D_{JJ}, D_{yz}, D_{y\omega}, D_{z\omega}, S_y, S_z, S_\omega, B_a, H_c, H_s, H_q$ 는 복합재료 박판부재의 강성항이며 다음과 같이 정의된다.

$$A_a = \int_C \hat{A}_{11} ds \quad (26)$$

$$(S_y, S_z, S_\omega) = \int_C [\hat{A}_{11}(z^\circ, y^\circ, \omega^\circ) + \hat{B}(\cos\theta, -\sin\theta, p)] ds \quad (27)$$

$$B_a = \int_C (2\hat{B}_{16}) ds \quad (28)$$

$$D_{yy} = \int_C (\hat{A}_{11}z^{\circ 2} + 2\hat{B}_{11}z^\circ \cos\theta + \hat{D}_{11}\cos^2\theta) ds \quad (29)$$

$$D_{zz} = \int_C (\hat{A}_{11}y^{\circ 2} - 2\hat{B}_{11}y^\circ \cos\theta + \hat{D}_{11}\sin^2\theta) ds \quad (30)$$

$$D_{\omega\omega} = \int_C (\hat{A}_{11}\omega^{\circ 2} + \hat{B}_{11}\omega^\circ q + \hat{D}_{11}q^2) ds \quad (31)$$

$$D_{JJ} = \int_C (4\hat{D}_{66}) ds \quad (32)$$

$$D_{yz} = \int_C (\hat{A}_{11}\omega^\circ z^\circ + \hat{B}_{11}qz^\circ + \hat{B}_{11}z^\circ \sin\theta - \hat{D}_{11}\sin\theta \cos\theta) ds \quad (33)$$

$$D_{y\omega} = \int_C (\hat{A}_{11}\omega^\circ z^\circ + \hat{B}_{11}\omega^\circ \cos\theta + \hat{D}_{11}q \cos\theta) ds \quad (34)$$

$$D_{z\omega} = \int_C (\hat{A}_{11}\omega^\circ y^\circ + \hat{B}_{11}qy^\circ - \hat{B}_{11}\omega^\circ \sin\theta - \hat{D}_{11}q \sin\theta) ds \quad (35)$$

$$(H_c, H_s, H_q) = \int_C 2[\hat{D}_{16}(\cos\theta, \sin\theta, q) + \hat{B}_{16}(z^\circ, -y^\circ, \omega^\circ)] ds \quad (36)$$

### 3. 좌굴에 대한 지배미분방정식

#### 3.1 Strain energy( $U_e$ )

복합재료 박판부재의 strain energy( $U_e$ )는 가정 (3)과 (4)에 의해서 다음과 같이 표현된다.

$$U_e = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^S \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (\sigma_x \epsilon_x + \tau_{xs} \gamma_{xs}) dn ds dx \quad (37)$$

고전적 적층판이론에서 적층판 두께방향으로의  $\epsilon_x$ 와  $\gamma_{xs}$ 의 변화는 다음과 같이 정의된다(Jones, 1999).

$$\epsilon_x = \epsilon_x^\circ - n\kappa_x \quad (38)$$

$$\gamma_{xs} = \gamma_{xs}^\circ - n\kappa_{xs} \quad (39)$$

식 (38)과 (39)를 식 (37)에 대입한 뒤 식 (37)을  $n$ 에 대해서 적분하면 strain energy는 다음과 같이 된다.

$$U_e = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^S (N_{xx}\epsilon_x^\circ + M_{xx}\kappa_x + M_{xs}\kappa_{xs}) ds dx \quad (40)$$

여기서

$$(N_{xx}, M_{xx}, M_{xs}) = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (\sigma_x, -n\sigma_x, -n\tau_{xs}) dn \quad (41)$$

식 (5)부터 (7)을 식 (40)에 대입한 뒤  $s$ 에 대해서 적분하면 복합재료 박판부재의 부재력과 변위로 표현된 strain energy를 얻을 수 있다.

$$U_e = \frac{1}{2} \int_0^L (PU' - M_y W'' + M_z V'' + M_x \Phi'' + T_s \Phi') dx \quad (42)$$

또한, 복합재료 박판부재의 변위로만 표현된 strain energy는 식 (25)를 식 (42)에 대입함으로써 얻을 수 있으며 다음과 같다.

$$U_e = \frac{1}{2} \int_0^L [A_a (U')^2 + D_{yy} (W'')^2 + D_{zz} (V'')^2 + D_{\omega\omega} (\Phi'')^2 + D_{JJ} (\Phi') + 2D_{yz} (W'')(V'') + 2D_{y\omega} (W'')( \Phi'') + 2D_{z\omega} (V'')( \Phi'') - 2S_y (U')(W'') - 2S_z (U')(V'') - 2S_\omega (U')( \Phi'') - B_a (U')( \Phi') + 2H_c (\Phi')(W'') - 2H_s (\Phi')(V'') + 2H_q (\Phi')( \Phi'')] dx \quad (43)$$

### 3.2 Potential energy( $V_e$ )

등분포 압축력을 받는 복합재료 박판부재의 potential energy( $V_e$ )는 다음과 같이 표현된다(Chajes, 1974).

$$V_e = - \int_A \Delta \sigma_x dA \quad (44)$$

여기서

$$dA = dn ds \quad (45)$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \int_0^L [(V')^2 - 2(z - z_p)(V')(\Phi') + (z - z_p)^2 (\Phi'')^2 + (W')^2 + 2(y - y_p)(W')(\Phi') + (y - y_p)^2 (\Phi'')^2] dx \quad (46)$$

$\Delta$ 는 휨과 비틀림에 의해서 발생하는 복합재료 박판부재의 축방향 수축량이며  $y$ 와  $z$ 는 전체좌표계를 기준으로 한 단면 내의 임의의 점의 좌표이다.

식 (45)와 (46)을 식 (44)에 대입하여 정리하면 potential energy는 다음과 같이 된다.

$$V_e = - \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^s \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} [\sigma_x (V')^2 - 2\sigma_x (z - z_p)(V')(\Phi') + \sigma_x (z - z_p)^2 (\Phi'')^2 + \sigma_x (W')^2 + 2\sigma_x (y - y_p)(W')(\Phi') + \sigma_x (y - y_p)^2 (\Phi'')^2] dn ds dx \quad (47)$$

가정 (5)에 의해서 식 (47)의  $\sigma_x$ 는 적층판의  $k$ 번째 층의  $(\sigma_x)_k$ 로 치환될 수 있으며  $(\sigma_x)_k$ 는 다음과 같다.

$$(\sigma_x)_k = (\bar{Q}_{11})_k \epsilon_x + (\bar{Q}_{12})_k \epsilon_s \quad (48)$$

식 (47)의  $z - z_p$ ,  $y - y_p$ ,  $(z - z_p)^2 + (y - y_p)^2$ 은 간단한 기하학적 관계를 통하여 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$z - z_p = -n \cos \theta - r \cos \theta + q \sin \theta \quad (49)$$

$$y - y_p = n \sin \theta + r \sin \theta + q \cos \theta \quad (50)$$

$$(z - z_p)^2 + (y - y_p)^2 = r^2 + q^2 + n^2 + 2nr \quad (51)$$

식 (48)부터 (51)을 식 (47)에 대입한 뒤  $n$ 과  $s$ 에 대해서 적분하면 다음과 같은 potential energy를 얻을 수 있다.

$$V_e = - \frac{P}{2} \int_0^L [(V')^2 + (W')^2 + 2z_p (V')(\Phi') - 2y_p (W')(\Phi') + R_p^2 (\Phi')^2] dx \quad (52)$$

식 (52)의  $P$ 는 축방향 압축력이며,  $z_p$ ,  $y_p$ ,  $R_p^2$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$z_p = - \frac{1}{A} \int_C \tilde{A}_{11} \left( q \sin \theta - r \cos \theta + \frac{\tilde{B}_{11}}{\tilde{A}_{11}} \cos \theta \right) ds \quad (53)$$

$$y_p = - \frac{1}{A} \int_C \tilde{A}_{11} \left( r \sin \theta + q \cos \theta - \frac{\tilde{B}_{11}}{\tilde{A}_{11}} \sin \theta \right) ds \quad (54)$$

$$R_p^2 = \frac{1}{A} \int_C \tilde{A}_{11} \left( r^2 + q^2 + \frac{\tilde{D}_{11}}{\tilde{A}_{11}} - 2r \frac{\tilde{B}_{11}}{\tilde{A}_{11}} \right) ds \quad (55)$$

여기서

$$\tilde{A}_{11} = \frac{A_{11} A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} \quad (56)$$

$$\tilde{B}_{11} = \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{22}} \quad (57)$$

$$\tilde{D}_{11} = \frac{D_{11} D_{22} - D_{12}^2}{D_{22}} \quad (58)$$

$$A = \int_C \tilde{A}_{11} ds \quad (59)$$

등분포 압축력을 받는 복합재료 박판부재의 좌굴에 대한 지

배미분방정식은 total potential energy( $\Pi = U_e + V_e$ )에 stationary total potential energy 원칙( $\delta\Pi = 0$ )의 적용함으로써 얻을 수 있으며, 다음과 같이 표현된다.

$$-A_\alpha U'' - S_z V''' - S_y W'''' - S_\omega \Phi''' - B_\alpha \Phi'' = 0 \quad (60a)$$

$$D_{zz} V^{IV} + D_{yz} W^{IV} + D_{z\omega} \Phi^{IV} - S_z U'''' - H_s \Phi'''' + P(V'' + z_p \Phi'') = 0 \quad (60b)$$

$$D_{yz} V^{IV} + D_{yy} W^{IV} + D_{y\omega} \Phi^{IV} - S_y U'''' + H_c \Phi'''' + P(W'' - y_p \Phi'') = 0 \quad (60c)$$

$$D_{\omega\omega} \Phi^{IV} + D_{z\omega} V^{IV} + D_{y\omega} W^{IV} - S_\omega U'''' - H_c W'''' + H_s V'''' + B_\alpha U'' - D_{J\omega} \Phi'' + P(z_p V'' - y_p W'' + R_p^2 \Phi'') = 0 \quad (60d)$$

지배미분방정식과 함께 유도된 경계조건 중 양단이 단순지지된 경우에 대한 경계조건은 다음과 같다.

$$P|_{x=L} = 0 \quad (61a)$$

$$M_y|_{x=0} = 0 \quad \text{and} \quad M_y|_{x=L} = 0 \quad (61b)$$

$$M_z|_{x=0} = 0 \quad \text{and} \quad M_z|_{x=L} = 0 \quad (61c)$$

$$M_\omega|_{x=0} = 0 \quad \text{and} \quad M_\omega|_{x=L} = 0 \quad (61d)$$

$$U|_{x=0} = 0 \quad (61e)$$

$$V|_{x=0} = 0 \quad \text{and} \quad V|_{x=L} = 0 \quad (61f)$$

$$W|_{x=0} = 0 \quad \text{and} \quad W|_{x=L} = 0 \quad (61g)$$

$$\Phi|_{x=0} = 0 \quad \text{and} \quad \Phi|_{x=L} = 0 \quad (61h)$$

#### 4. 수치예제

인발성형 부재의 좌굴해석을 위한 복합재료 보이론 사용의 타당성을 검토하기 위해서 기존에 발표된 인발성형 T형 부재(이승식, 2006)의 휨-비틀림 좌굴과 H형 부재(Barbero와 Tomblin, 1993)의 휨 좌굴에 대한 연구결과를 예제로 사용하였다.

표 2. T형 실험체의 단면치수와 길이

실험체	$b_f \times d \times t_f \times t_w$ (mm)	L (mm)	실험체	$b_f \times d \times t_f \times t_w$ (mm)	L (mm)
T1	76.5×176.5×12.7×13.0	914.4	T10	76.5×75.2×9.4×9.4	1,118.4
T2	102.6×126.5×12.7×13.0	990.6	T11	76.5×75.2×9.4×9.4	1,216.1
T3	101.6×127.3×12.7×12.7	1,216.2	T12	102.1×75.2×9.4×9.4	1,114.6
T4	127.0×126.0×12.7×12.7	1,364.0	T13	101.6×75.2×9.4×9.4	1,219.2
T5	127.3×126.7×12.7×12.7	1,600.2	T14	101.1×126.5×9.4×9.4	1,118.1
T6	127.8×151.1×12.7×12.7	1,602.2	T15	101.3×125.7×9.4×9.4	1,216.1
T7	126.7×177.0×12.7×12.7	1,366.5	T16	126.5×101.1×9.4×9.4	1,121.7
T8	127.5×176.0×12.7×12.7	1,600.2	T17	127.0×101.1×9.4×9.4	1,219.2
T9	101.6×151.4×12.7×12.7	1,116.1			

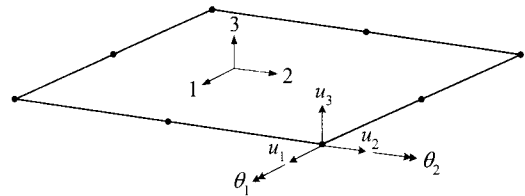


그림 3. S8R5 요소의 자유도

추가적으로 그림 3과 같은 8절점 쉘요소(S8R5)를 사용하여 유한요소해석(ABAQUS, 2002)을 수행하였다. 실험체의 치수와 길이에 따라 다르나, 각 모델에 대해서 약 900개 정도의 유한요소가 사용되었으며, 경계조건은 실험에서 사용된 조건과 동일하도록 적용하였다.

#### 4.1 T형 실험체의 좌굴하중

총 17개의 T형 실험체 중에서 9개의 실험체(T1부터 T9)는 E-glass 섬유로 보강된 vinylester 수지로 만들어 졌으며, 나머지 8개의 실험체(T10부터 T17)는 E-glass 섬유로 보강된 polyester 수지로 만들어 졌다. T1부터 T9 실험체의 경우 플랜지와 복부가 각각 17개의 보강층으로 구성되어 있으며, 보강층 배치는 플랜지와 복부가 서로 동일하다. 고전적 적층이론에서 사용하는 방식으로 보강층의 배치를 표현하면, 플랜지와 복부 모두  $[V/C/R/C/R/C/R/C/\bar{R}]_s$ 와 같다. T10부터 T17 실험체의 경우 플랜지와 복부가 각각 7개와 8개의 보강층으로 구성되어 있으며, 보강층 배치는 플랜지와 복부가 서로 다르다. 플랜지의 배치는  $[V_1/S_1/R_1/S_1/R_2/S_1/V_1]_i$ 이고 복부의 배치는  $[V_2/S_2/R_3/S_2]_s$ 이다. 각 층의 탄성성질과 두께는 표 1에 정리되어 있으며, CSM과 SF는 각각 Continuous Strand Mat과 Stitched Fabric을 의미한다.

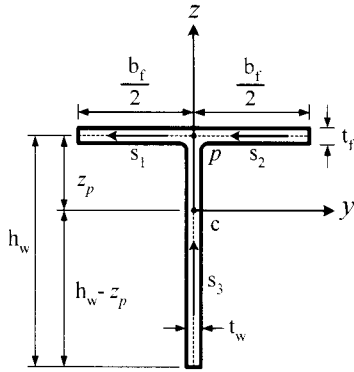


그림 4. T형 부재의 좌표계

표 1. T형 실험체 보강층의 탄성성질과 두께

기호	종류	$E_{11}$ (GPa)	$E_{22}$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$	두께 (mm)
V	veil	7.00	7.00	2.55	0.371	0.6495
C	CSM	15.48	15.48	5.51	0.404	0.7328
R	roving	34.88	10.40	3.81	0.305	0.7946
V <sub>1</sub>	veil	9.44	9.44	3.41	0.384	0.6760
S <sub>1</sub>	SF	46.78	15.38	5.69	0.285	0.8137
R <sub>1</sub>	roving	40.50	12.55	4.62	0.293	4.2740
R <sub>2</sub>	roving	34.88	10.64	3.91	0.306	1.3540
V <sub>2</sub>	veil	7.29	7.29	2.66	0.372	0.8080
S <sub>2</sub>	SF	40.51	12.55	4.62	0.293	0.9563
R <sub>3</sub>	roving	32.82	10.05	3.68	0.310	1.9900

표 1에 제시된 SF층의 두께는 하나의 SF층이 +45°, 90°, -45°의 배향각을 갖는 3개의 층으로 구성되어 있기 때문에 이 세 층의 두께의 합으로 나타냈다. T1부터 T17 실험체의 실험된 단면치수와 부재길이(L)의 평균값은 표 2에 수록되어 있다.

T형 부재의 강성항을 결정하기 위하여 그림 4와 같이 전체 좌표계 (x, y, z)를 단면의 주축과 일치하도록 하였으며, 각각의 판요소를 정의하기 위하여 3개의 중심선좌표계를 사용하였다. 보강층의 위치, 탄성성질, 두께에 대한 정보를 바탕으로 실험체의 플랜지와 복부의 강성, 즉  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $D_{ij}$ 를 계산한 뒤 실험체의 단면치수와 식 (26)부터 식 (36)을 이용하여 T형 실험체의 강성항을 계산하였다.

Polyester T형 실험체(T10부터 T17)는 플랜지의 보강층이 중심면에 대해서 비대칭(unsymmetric)으로 배치되어 있고, SF층 내에 ±45°의 배향각을 갖는 섬유가 사용되었기 때문에 부록 1에 수록되어 있듯이  $y_p$ 를 제외한 나머지 항들이 0이 되지 않는다. 결과적으로 예제로 사용된 polyester T형 실험체의 좌굴에 대한 지배미분방정식은  $y_p$ 가 0인 것을 제외하면 식 (60)과 비교하여 더 이상 간단해지지 않는다. 따라서 근사해를 구하기 위하여 Ritz method를 이용하였으며 각각의 변위함수들은 단순지지 경계조건(식 (61))을 만족

하도록 다음과 같이 가정하였다.

$$\begin{Bmatrix} U(x) \\ V(x) \\ W(x) \\ \Phi(x) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^N \begin{Bmatrix} A_i \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \\ B_i \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \\ C_i \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \\ D_i \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \end{Bmatrix} \quad (62)$$

여기서,  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$ 는 미정계수들이며,  $L$ 은 부재의 길이이다. 단순지지 조건을 실험적으로 구현하기 위해서 사용된 knife edge의 영향을 고려하기 위해서 표 2에 제시된 실험 길이에 140 mm를 더한 값을 부재의 길이로 사용하였다(이 승식, 2006). Ritz method를 total potential energy에 적용하여 얻은 제차선형방정식의 고유치( $P$ ) 중에서 최소값을 polyester T형 실험체의 좌굴하중으로 정의하였으며, 이론적으로 얻은 좌굴모드가 휨-비틀림 모드임을 확인하였다.

Vinylester T형 실험체(T1부터 T9)의 경우 플랜지와 복부의 보강층이 중심면에 대해서 대칭으로 배치되어 있고 off-axis 섬유가 사용되지 않았기 때문에 polyester T형 실험체와 달리 구성방정식의 off-diagonal 강성항은 모두 0이 되며, 좌굴에 대한 미분방정식들 사이에 존재하는 연계현상 또한 사라지게 된다. Vinylester T형 실험체의 0이 아닌 강성항( $A_{\alpha}$ ,  $D_{yy}$ ,  $D_{zz}$ ,  $D_{\omega\omega}$ ,  $D_{JJ}$ )의 일반식은 polyester T형 실험체의 경우와 동일하다. 미분방정식으로부터 휨 및 비틀림 변형에 대해서 단순지지된 T형 부재의 휨-비틀림 좌굴식( $P_{FTB}$ )을 유도하였으며, 다음과 같이 표현된다.

$$P_{FEB} = \frac{P_z + P_o}{2H} \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{4P_z P_o H}{(P_z + P_o)^2}} \right\} \quad (63)$$

여기서,  $P_z$ ,  $P_o$ ,  $H$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$P_z = D_{zz} \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \quad (64)$$

$$P_o = \frac{1}{R_p^2} \left\{ D_{JJ} + D_{\omega\omega} \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \right\} \quad (65)$$

$$H = 1 - \frac{z_p^2}{R_p^2} \quad (66)$$

Vinylester T형 실험체의 이론적 좌굴하중은 식 (63)을 사용하여 계산하였으며, polyester T형 실험체의 경우와 마찬가지로

지로 표 2에 제시된 실측길이에 knife edge의 영향을 고려하기 위해서 140 mm를 더한 값을 부재의 길이로 사용하였다. 각 실험체의 실험적 좌굴하중( $P_{exp}$ ), 이론적 좌굴하중( $P_{pred}$ ), 유한요소해석 결과( $P_{FEM}$ )는 표 3에 정리되어 있다.

표 3으로부터 이론적 좌굴하중과 실험적 좌굴하중 비의 평균값이 0.90으로써 이론적 해석방법이 유한요소해석보다 좀더 정확하게 T형 부재의 좌굴하중을 예측하는 것을 알 수 있으며, 결론적으로 확장된 복합재료 보이론을 인발성형 부재의 좌굴해석에 사용하는 것은 타당하다고 할 수 있다.

그러나 polyester T형 실험체(T10부터 T17)와 같은 경우, 즉 보강층의 비대칭배치와 off-axis 섬유 사용으로 인하여 탄성연계현상이 존재하는 경우에는 구성방정식에 off-diagonal 강성항이 존재하므로 closed-form solution을 구할 수 없고 해석과정이 비교적 복잡해지는 문제점이 있다. 따라서 off-diagonal 강성항이 좌굴하중에 미치는 영향을 조사하기 위해서 식 (63)을 사용하여 좌굴하중을 구해보았으며, 모든 polyester T형 실험체에 대해서 off-diagonal 강성항을 무시하여도 Ritz method로 구한 좌굴하중과 소수점 첫째자리까지는 아무런 차이가 발생하지 않음을 확인하였다.

표 3. 단순지지된 T형 실험체의 휨-비틀림 좌굴하중 비교

실험체	$P_{exp}$ (kN)	$P_{pred}$ (kN)	$P_{FEM}$ (kN)	$\frac{P_{pred}}{P_{exp}}$	$\frac{P_{FEM}}{P_{exp}}$
T1	82.3	62.3	64.6	0.76	0.78
T2	150.3	133.4	124.3	0.89	0.83
T3	104.5	104.5	99.4	1.00	0.95
T4	172.6	149.5	137.3	0.87	0.80
T5	125.9	125.4	115.7	1.00	0.92
T6	117.0	110.3	104.1	0.94	0.89
T7	115.7	105.0	99.9	0.91	0.86
T8	119.2	95.2	88.2	0.80	0.74
T9	129.0	99.6	96.0	0.77	0.74
T10	64.9	60.9	57.9	0.94	0.89
T11	55.2	52.9	49.5	0.96	0.90
T12	155.2	135.7	120.2	0.87	0.77
T13	124.6	117.4	106.6	0.94	0.86
T14	93.4	90.3	77.4	0.97	0.83
T15	101.4	85.0	74.0	0.84	0.73
T16	160.1	157.5	127.3	0.98	0.80
T17	171.0	151.7	124.3	0.89	0.73
평균				0.90	0.83

## 4.2 H형 실험체의 좌굴하중

Barbero와 Tomblin(1993)은 E-glass로 보강된 vinylester 수지로 만들어진 인발성형 H형 부재에 대해서 좌굴실험을 수행하였다. 이들은 단면치수가 서로 다른 세 그룹의 H형 부재들을 사용하였으나 두 그룹에 대해서만 보강층 배치를 공개하였기 때문에 나머지 한 그룹, 즉 152×152×9.5mm의 공칭단면치수를 갖는 H형 부재에 대한 실험결과는 본 연구에서 사용되지 않았다. 또한 Barbero와 Tomblin(1993)은 하나의 단면치수와 길이에 대해서 2개 또는 3개의 실험체를 제작하여 각각에 대해서 실험을 수행하고 각각의 좌굴하중을 제시하였으나, 본 연구에서는 단면치수와 길이가 동일한 실험체의 경우 각각의 좌굴하중을 사용하지 않고 그들의 평균값을 사용하였다. 결과적으로 총 4개의 실험체(H1, H2, H3, H4)에 대한 결과만을 예제로서 사용하였다.

H1과 H2 실험체 단면의 공칭치수는 102×102×6.4 mm이고, H3와 H4 실험체 단면의 공칭치수는 152×152×6.4 mm이다. H형 실험체 모두 플랜지는 7개의 보강층으로 구성되어 있으며, 복부는 matrix층을 포함하여 7개의 보강층으로 구성되어 있다. H1과 H2 실험체의 보강층 배치를 간략히 표현하면, 플랜지가  $[C_2/R_4/C_3/R_4/C_3/R_5/C_2]_s$ 이고 복부가  $[C_2/R_6/C_3/\bar{M}]_s$ 이며, H3와 H4 실험체의 경우, 플랜지가  $[C_3/R_6/C_3/R_6/C_3/R_7/C_2]_s$ 이고 복부가  $[C_2/R_8/C_3/\bar{M}]_s$ 이다. 각 층의 탄성성질과 두께는 표 4에 정리되어 있으며, H형 실험체의 공칭단면치수와 공칭길이는 표 5에 수록되어 있다.

표 4. H형 실험체 보강층의 탄성성질과 두께

기호	종류	$E_{11}$ (GPa)	$E_{22}$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$	두께 (mm)
$C_2$	CSM	11.83	11.83	4.17	0.419	0.635
$C_3$	CSM	12.83	12.83	4.52	0.421	0.762
$R_4$	roving	29.79	6.61	2.56	0.293	1.270
$R_5$	roving	28.03	6.29	2.43	0.294	1.270
$R_6$	roving	27.90	6.27	2.42	0.294	1.270
$R_7$	roving	34.54	7.61	2.95	0.289	1.270
$R_8$	roving	31.25	6.89	2.67	0.292	1.270
M	matrix	3.38	3.38	1.37	1.240	1.143

표 5. H형 실험체의 단면치수와 길이

실험체	$b_f \times d \times t$ (mm)	L (mm)
H1	102×102×6.4	4,480
H2	102×102×6.4	2,980
H3	152×152×6.4	6,030
H4	152×152×6.4	3,580



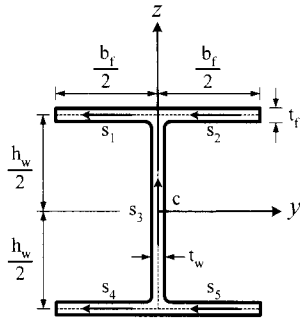


그림 5. H형 부재의 좌표계

예제로 사용된 H형 부재의 강성항을 결정하기 위하여 그림 5와 같이 전체좌표계 (x, y, z)를 단면의 주축과 일치하도록 하였으며, 각각의 판요소를 정의하기 위하여 5개의 중심선좌표계를 사용하였다. 결정된 강성항은 부록 2에 수록되어 있다. H형 실험체 모두 플랜지와 복부에 off-axis 섬유가 사용되지 않았기 때문에  $H_c, H_s, H_q$ 가 0이 되며, 또한 플랜지의 보강층이 중심면에 대해서 대칭적으로 배치되어 있지 않았음에도 불구하고 상부 플랜지와 하부 플랜지의 보강층 배치가 y축을 중심으로 전체적으로 대칭을 이루기 때문에 구성방정식의 off-diagonal 요소들은 모두 0이 된다. 따라서 H형 실험체의 경우 좌굴에 대한 미분방정식은 등방성 부재의 미분방정식과 동일한 형태로 표현된다. 미분방정식으로부터 단순 지지된 H형 부재의 z축에 대한 휨 좌굴식( $P_z$ )을 유도하였으며 다음과 같이 표현된다.

$$P_z = D_{zz} \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \quad (67)$$

표 6. 단순지지된 H형 실험체의 휨 좌굴하중 비교

실험체	$P_{exp}$ (kN)	$P_{pred}$ (kN)	$P_{FEM}$ (kN)	$\frac{P_{pred}}{P_{exp}}$	$\frac{P_{FEM}}{P_{exp}}$
H1	12.1	12.6	12.5	1.04	1.03
H2	27.2	28.4	28.1	1.04	1.03
H3	23.1	24.3	23.3	1.05	1.01
H4	64.2	69.1	65.6	1.08	1.02
평균				1.05	1.02

H형 실험체의 이론적 좌굴하중은 식 (67)을 사용하여 계산하였다. Barbero와 Tomblin(1993)은 좌굴실험에서 휨에 대한 단순지지 조건을 구현하기 위해서 실험체의 양단에 'pin and needle bearing grip'을 사용하였으나 grip의 치수를 보고하지 않았다. 따라서 좌굴하중의 계산과정에서 grip의 영향을 고려하지 않고 표 5에 제시되어 있는 공칭 부재길이를 사용하였다. 각 실험체의 실험적 좌굴하중( $P_{exp}$ ), 이론적

좌굴하중( $P_{pred}$ ), 유한요소해석 결과( $P_{FEM}$ )는 표 6에 정리되어 있다.

### 5. 결론

본 연구에서는 확장된 복합재료 보이론을 적용하여 축방향 압축력을 받는 인발성형 부재의 좌굴해석을 수행하였으며, 이론적 좌굴해석 결과를 실험 및 유한요소해석 결과와 비교하였다. 평균적으로 이론적 해석방법이 T형 부재의 경우 작게 (10%), 그리고 H형 부재의 경우 크게(5%) 좌굴하중을 예측하는 것으로 나타났으나, 예제로 사용된 T형과 H형 부재 전체를 고려할 경우 이론적 해석방법이 7%, 유한요소해석이 14% 작게 좌굴하중을 예측하였다. 따라서 전형적인 적층방식으로 생산되지는 않지만 부재의 두께방향으로 여러 개의 보강층이 배치됨으로써 어느 정도 적층복합재료의 특성을 가지고 있는 인발성형부재의 해석을 위해서 복합재료 보이론을 사용하는 것은 타당하다고 할 수 있다. 또한, 탄성연계현상으로 인하여 인발성형부재의 구성방정식에 존재하는 off-diagonal 강성항의 좌굴하중에 미치는 영향이 매우 미약하기 때문에 off-axis 섬유가 사용되거나 또는 보강층들이 비대칭적으로 배치된 경우에도 등방성 이론과 매우 유사한 형태로 본 연구에서 제안된 좌굴식을 사용할 수 있을 것으로 생각된다.

전단탄성계수에 대한 축방향 탄성계수의 비가 상대적으로 큰 특징을 가지고 있는 섬유보강 플라스틱 복합재료 부재의 휨-비틀림 좌굴거동을 보다 정확하게 해석하기 위해서는 이론적 좌굴해석과정에서 전단변형(백성용 등, 2006)을 고려할 있도록 향후 추가적인 연구가 수행되어야 할 것으로 생각된다.

### 참고 문헌

백성용, 이승식 (2006) 전단변형을 고려한 적층복합 I형 박벽 보의  $C^0$ 유한요소, 한국강구조학회 논문집, 한국강구조학회, 제 18권, 3호, pp.349-359.

이승식 (2006) 일축대칭 FRP 부재의 전체좌굴에 관한 실험적 연구, 대한토목학회 논문집, 대한토목학회, 제 26권, 제 1A호, pp.99-106.

ABAQUS/standard version. 6.3. (2002) Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc.

Bakis, C.E., Bank, L.C., Brown, V.L., Cosenza, E., Davalos, J.F., Lesko, J.J., Machida, S., Rizkalla, S.H., and Triantafillou, T.C. (2002) Fiber Reinforced Polymer Composites for Construction-State-of-the-Art Review, *Journal of Composites for Construction*, ASCE, Vol. 6, No. 2, pp.73-87.

Barbero, E.J., and Tomblin, J. (1993) Euler Buckling of Thin-Walled Composite Columns, *Thin-Walled Structures*, Vol. 17, No. 4, pp.237-258.

Bauld, N.R., and Tzeng, L. (1984) A Vlasov Theory for Fiber-Reinforced Beams with Thin-Walled Open Cross Sections, *International Journal of Solids Structures*, Vol. 20, No. 3, pp.277-297.

Chajes, A. (1974) *Principles of Structural Stability Theory*, Prentice-Hall, USA.

Gibson, R.F. (1994) *Principles of Composite Material Mechanics*, McGraw-Hill, USA.

Jones, R.M. (1999) *Mechanics of Composite Materials*, 2nd ed., Taylor & Francis, USA.

부록 1. Polyester T형 실험체의 강성항

$$\begin{aligned}
 A_a &= (\hat{A}_{11})_f b_f + (\hat{A}_{11})_w h_w \\
 S_{yy} &= -(\hat{B}_{11})_f b_f \\
 S_z &= (\hat{B}_{11})_w h_w \\
 S_w &= -(\hat{B}_{11})_w \left( \frac{h_w^2}{2} \right) \\
 B_a &= 2(\hat{B}_{16})_f b_f + 2(\hat{B}_{16})_w h_w \\
 D_{yy} &= \{ (\hat{A}_{11})_f z_p^2 + (\hat{D}_{11})_f \} b_f \\
 &\quad + (\hat{A}_{11})_w h_w \left( \frac{h_w^2}{3} - z_p h_w + z_p^2 \right) - 2(\hat{B}_{11})_f z_p b_f \\
 D_{zz} &= (\hat{A}_{11})_f \frac{b_f^3}{12} + (\hat{D}_{11})_w h_w \\
 D_{ww} &= (\hat{D}_{11})_f \frac{b_f^3}{12} + (\hat{D}_{11})_w \frac{h_w^3}{3} \\
 D_{JJ} &= 4(\hat{D}_{66})_f b_f + 4(\hat{D}_{66})_w h_w \\
 D_{yz} &= (\hat{B}_{11})_w \left( \frac{h_w^2}{2} - z_p h_w \right) \\
 D_{yw} &= -(\hat{B}_{11})_w h_w \left( \frac{2}{3} h_w^2 - z_p \frac{h_w}{2} - h_w + z_p \right) \\
 D_{zw} &= -(\hat{B}_{11})_f \frac{b_f^3}{12} \\
 H_c &= 2 \{ (\hat{B}_{16})_f z_p - (\hat{D}_{16})_f \} b_f + 2(\hat{B}_{16})_w \left( z_p - \frac{h_w}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_s &= 2(\hat{D}_{16})_w h_w \\
 H_q &= -(\hat{D}_{16})_w h_w^2 \\
 z_p &= \frac{(\tilde{B}_{11})_f b_f + (\tilde{A}_{11})_w \frac{h_w^2}{2}}{(\tilde{A}_{11})_f b_f + (\tilde{A}_{11})_w h_w} \\
 R_p^2 &= \frac{(\tilde{A}_{11})_f b_f \alpha + (\tilde{A}_{11})_w h_w \beta}{(\tilde{A}_{11})_f b_f + (\tilde{A}_{11})_w h_w} \\
 \alpha &= \frac{b_f^2}{12} + \left( \frac{\tilde{D}_{11}}{\tilde{A}_{11}} \right)_f \\
 \beta &= \frac{h_w^2}{3} + \left( \frac{\tilde{D}_{11}}{\tilde{A}_{11}} \right)_w
 \end{aligned}$$

여기서,  $f$ 는 플랜지를 의미하며  $w$ 는 복부를 의미한다.

부록 2. H형 실험체의 강성항

$$\begin{aligned}
 A_a &= 2b_f(\hat{A}_{11})_f + h_w(\hat{A}_{11})_w \\
 D_{yy} &= (\hat{A}_{11})_f \frac{h_w^2 b_f}{2} + 2(\hat{D}_{11})_f b_f + (\hat{A}_{11})_w \frac{h_w^3}{12} \\
 D_{zz} &= (\hat{A}_{11})_f \frac{b_f^3}{6} + (\hat{D}_{11})_w h_w \\
 D_{ww} &= (\hat{A}_{11})_f \frac{h_w^2 b_f^3}{24} \\
 D_{JJ} &= 8(\hat{D}_{66})_f b_f + 4(\hat{D}_{66})_w h_w \\
 R_p^2 &= \frac{(\tilde{A}_{11})_f b_f \gamma + (\tilde{A}_{11})_w h_w \eta}{2b_f(\tilde{A}_{11})_f + h_w(\tilde{A}_{11})_w} \\
 \gamma &= \frac{h_w^2}{2} + \frac{b_f^2}{6} + 2 \left( \frac{\tilde{D}_{11}}{\tilde{A}_{11}} \right)_f \\
 \eta &= \frac{h_w^2}{12} + \left( \frac{\tilde{D}_{11}}{\tilde{A}_{11}} \right)_w
 \end{aligned}$$

여기서,  $f$ 는 플랜지를 의미하며  $w$ 는 복부를 의미한다.

(접수일자 : 2006. 8. 14 / 심사일 2006. 9. 6 / 심사완료일 2006. 10. 10)