

# 전단변형을 고려한 적층복합 I형 박벽보의 $C^0$ 유한요소

## A $C^0$ Finite Element of Thin-Walled Laminated Composite I-Beams Including Shear Deformation

백성용<sup>1)</sup> · 이승식<sup>2)</sup>  
Back, Sung Yong · Lee, Seung Sik

요약: 본 연구에서는 직교좌표계에 근거한 적층복합 I형 박벽보의 유한요소 해석을 위한 새로운 블록 강도행렬을 제안한다. 변위장은 1차 전단변형을 고려한 보 이론을 사용하여 정의되었다. 축방향 변위는 Timoshenko 보이론과 수정된 Vlasov 박벽보 이론을 결합하여 투영단면의 면 변형과 면의 변형의 합으로 나타낸다. 유도된 강도행렬은 휨 전단변형과 뒤틀 비틀림에 의한 영향을 고려한다. 본 유한요소에서는 2절점, 3절점, 4절점의 세 가지 보요소를 제안하였다. 3절점과 4절점 보 요소는 적층복합 보의 휨 해석에 효과적이었다. 다른 연구자의 수치 해석 결과와 비교 검토를 통하여 새로운 유한요소의 활용성과 정확성을 입증하였다.

ABSTRACT: This paper presents a new block stiffness matrix for the analysis of thin-walled laminate composite I-beams based on an orthogonal Cartesian coordinate system. The displacement fields are defined using the first order shear deformable beam theory. The longitudinal displacement can be expressed as the sum of the projected plane deformation of the cross-section due to Timoshenko's beam theory and axial warping deformation due to modified Vlasov's thin-walled beam theory. The derived element takes into account flexural shear deformation and torsional warping deformation. Three different types of beam elements, namely, the two-noded, three-noded, and four-noded beam elements, are developed. The quadratic and cubic elements are found to be very efficient for the flexural analysis of laminated composite beams. The versatility and accuracy of the new element are demonstrated by comparing the numerical results available in the literature.

핵심용어: 블록 강도행렬, 적층복합 박벽보, Timoshenko 보, Vlasov 박벽보, 휨 전단변형과 비틀림 뒤틀변형, 적층각

KEYWORDS: block stiffness matrix, thin-walled laminated composite beams, Timoshenko's beam, Vlasov's thin-walled beam, flexural shear and torsional warping deformations, ply angle

### 1. 서론

섬유보강 복합재료(FRP, Fiber Reinforced Plastic)는 기존의 강재나 콘크리트 재료들에 비해 가벼운 자중, 강도가 우수하며 피로강도가 높고 부식 저항성과 내구성이 뛰어나서 토목, 기계, 항공, 해양 분야에서의 사용이 증가하고 있는 추세이다. 또한, 이러한 재료의 사용으로 운반의 편의성, 시공기간 단축, 재료 및 유지관리비 절감 등의 효과를 얻을 수 있다. 그러나 재료성질에 대한 규격과 설계기준의 미비 등으로 인하여 그 사용량은 기존 건설재료에 비해 그리 많지 않은 상황이다(Bakis 등, 2002).

고전 박벽보 이론은 Vlasov(1961)와 Gjelsvik(1981)에 의하여 정립되었으며 판형 박벽보의 2차원 문제를 1차원 문제로 변

환시켰다. Bauld와 Tzeng(1984)은 기존의 등방성 박벽보 이론을 대칭 적층된 복합재 개구단면 이방성 박벽보로 확장된 개념을 제시하였다. Mottram(1992)은 E-glass FRP I형 보의 휨-비틀림 거동에 대한 실험을 수행하였으며, 실험결과를 유한차분법을 이용한 이론해와 근접함을 밝혔다. 또한, 전단변형의 영향이 상당히 크다는 것을 발견하였다. Pandey 등(1995)은 평형 미분방정식의 해법으로 Galerkin 방법을 사용하여 여러 가지 하중 조건과 경계조건에 대하여 복합재 I형 박벽보의 휨-비틀림 좌굴에 대한 닫힌해를 제시하였다. Davalos와 Qiao(1997)는 에너지 방법을 사용하여 평형방정식을 발견하였고, 수치해를 구하기 위해 Rayleigh-Ritz 방법을 사용하였다. 이들의 연구는 보의 중앙에 집중하중이 작용하는 단순지지보에 국한되었다. 이후, 많

1) 교신저자, 정회원, 인제대학교 토목공학과 부교수, 공학박사  
(Tel: 055-320-3433, Fax: 055-320-3432, E-mail: civsyb@inje.ac.kr)  
2) 정회원, SK건설연구소 연구원, 공학박사(E-mail: drslee@naver.com)

본 논문에 대한 토의를 2006년 12월 30일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

은 연구자들 (Lin 등, 1996; Lee와 Lee, 2004)에 의해 I형 복합재의 일차원 유한요소 모델이 개발되었다.

Maddur와 Chaturvedi(2000)는 인발성형 복합재 I형 단면의 변형 거동을 조사하기 위해 1차 전단변형이론을 기초로 한 유한요소해법 과정을 제안하였다. Qin과 Librescu(2002)는 이방성 박벽보의 전단변형 해석모델을 제안하였다. 최근에 1차 전단변형이론에 근거한 등분포하중이 작용하는 FRP 복합재 I형 보의 휨 해석을 위한 1차원 유한요소법이 Lee(2005)에 의해 개발되었다.

본 연구에서는 기존의 연구에서 사용하였던 외형좌표계(contour coordinate system)를 사용하는 대신에 직교좌표계를 사용하여 적층복합재 I형 박벽보의 유한요소 해석을 위한 새로운 블록 강도행렬을 제안한다. 변위장은 1차 전단변형 보 이론을 근거로 정의된다. 축방향 변위는 Timoshenko 보이론과 수정된 Vlasov 박벽보 이론을 결합하여 투영 단면의 면 변형과 면의 변형의 합으로 나타낸다. 유도된 강성행렬은 휨 전단변형과 뒹 비틀림에 의한 영향을 고려한다. 본 유한요소에서는 2절점, 3절점, 4절점의 세가지 보 요소를 제안하고 각 요소에 대한 수렴성을 조사한다. 제안된 유한요소의 유효성과 정확성을 검증하기 위하여 다른 연구자의 결과와 비교, 분석한다.

## 2. 지배방정식

### 2.1 변위장 및 변형률

일반적인 I형 복합재 박벽보의 단면을 그림 1에서 보여주고 있다. 직교좌표계(orthogonal Cartesian coordinate system)의 y축과 z축은 변형전 단면의 도심을 통과하는 주축과 일치하도록 하며 x축은 요소의 길이방향 축이다. 본 연구에서 적용한 보 모델은 다음과 같은 가정을 사용하였다.

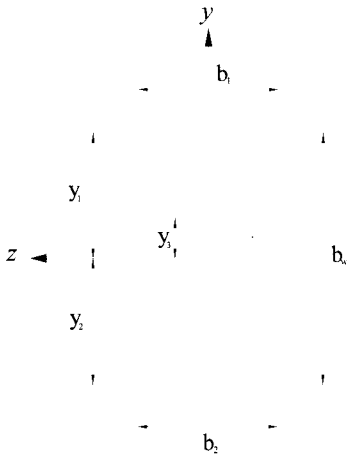


그림 1. I형 단면의 좌표계와 제원

1. 보 단면의 형상 즉 외형(contour)은 면내에서 변형하지 않는다.
2. 연직 전단효과(transverse shear effects)는 고려되어 진다. 즉, 변형 전 보의 축방향에 수직인 단면은 변형 후 평면을 유지하나 전단변형에 의해 보의 축방향에 수직일 필요는 없다.
3. 전단중심에서의 비틀림각은 상당히 작다.

평면내 강성단면 가정에 따르면 단면형상 변화는 일어나지 않는다. 박벽보 가정으로 종방향 변위는 Timoshenko 보이론과 수정된 Vlasov 박벽보 이론을 결합하여 축방향 투영단면의 면 변형과 면의 뒹변형의 합으로 표현된다(Back과 Will, 1998). 중립면에서의 변위장  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$ 와 종방향 변위  $\bar{u}$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, y, z) &= u(x) - y\theta_z(x) + z\theta_y(x) - \omega\phi_x(x) \\ \bar{v}(x, y, z) &= v(x) - z\theta_x(x) \\ \bar{w}(x, y, z) &= w(x) + y\theta_x(x) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $u(x)$ ,  $v(x)$ ,  $w(x)$ 는 각각 x, y, z축방향의 강체 변위장을 나타내며  $\theta_x(x)$ ,  $\theta_y(x)$ ,  $\theta_z(x)$ 는 x, y, z축에 대한 회전각,  $\phi_x(x)$ 는 뒹 변형을 나타낸다. I형 단면에 대한 뒹 함수  $\omega$ 는 뒹 변형을 나타내며 다음과 같이 정의된다.

$$\omega^\alpha = y_\alpha z \quad (2)$$

여기서 위첨자  $\alpha$ 는 상, 하부 플랜지를 나타내는 1과 2의 값을 가지며  $y_\alpha$ 는 전단중심에서 각 플랜지 중립면까지의 거리를 나타낸다.

식 (1)의 종방향 변위장에서 뒹 전단변형을 포함하기 때문에 변형에 따른 휨 전단변형  $\theta_y(x)$ 와  $\theta_z(x)$ 는 각 변위장의 미분 값에 일치하지 않으며, 뒹 전단변형으로 인하여  $\phi_x(x)$ 는  $\theta_x(x)$ 와 같지 않다. 이러한 회전각들은 아래 식으로 정의되어 진다.

$$\begin{aligned} \theta_z &= v' - \gamma_{xy}^\circ \\ \theta_y &= -w' + \gamma_{xz}^\circ \\ \phi_x &= \theta_x' - \gamma_\omega^\circ \end{aligned} \quad (3)$$

여기서  $\gamma_{xy}^\circ$ 와  $\gamma_{xz}^\circ$ 는 부재의 휨에 의한 연직방향 전단 변형률이고  $\gamma_\omega^\circ$ 는 뒹에 의한 비틀림 전단 변형률이다.

상, 하부 플랜지 임의의 점에서의 변위장은 중립면의 변위에 대하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 U^\alpha(x, y, z) &= \bar{u}^\alpha(x, z) + n \frac{\partial v^\alpha}{\partial x}(x, z) \\
 V^\alpha(x, y, z) &= \bar{v}^\alpha(x, z) \\
 W^\alpha(x, y, z) &= \bar{w}^\alpha(x, z) + n \frac{\partial v^\alpha}{\partial z}(x, z)
 \end{aligned} \tag{4}$$

여기서  $\bar{u}^\alpha, \bar{v}^\alpha, \bar{w}^\alpha$ 는 각 플랜지 중립면에서의 판 변위를 나타내며  $n$ 은 접면에 수직방향(면외방향)을 나타낸다.

같은 방법으로, 복부판에 대한 변위장은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 U^w(x, y, z) &= \bar{u}^w(x, y) - n \frac{\partial w^w}{\partial x}(x, y) \\
 V^w(x, y, z) &= \bar{v}^w(x, y) - n \frac{\partial w^w}{\partial y}(x, y) \\
 W^w(x, y, z) &= \bar{w}^w(x, y)
 \end{aligned} \tag{5}$$

여기서  $\bar{u}^w, \bar{v}^w, \bar{w}^w$ 는 복부 중립면에서의 판 변위를 나타낸다.

식 (1), (4), (5)의 변위장에 대한 보의 변형률은 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\epsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \epsilon_x^o + (z + n \sin \theta) \kappa_y - (y - n \cos \theta) \kappa_z + (\omega - nq) \kappa_\omega \tag{6a}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} = \gamma_{xz}^o + \gamma_\omega^o y + \kappa_{xs} n \cos \theta \tag{6b}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = \gamma_{xy}^o - \gamma_\omega^o z + \kappa_{xs} n \sin \theta \tag{6c}$$

여기서 축 변형률  $\epsilon_x^o$ 와 곡률성분  $\kappa_z, \kappa_y, \kappa_\omega, \kappa_{xs}$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned}
 \epsilon_x^o &= u' \\
 \kappa_z &= \theta_z', \quad \kappa_y = \theta_y', \quad \kappa_\omega = \phi_x', \quad \kappa_{xs} = -2\theta_x' \tag{7}
 \end{aligned}$$

위 식에서 ( )'는  $x$ 에 대한 미분을 나타낸다.

## 2.2 변분의 원리

구조체의 전체 위치에너지는 변형률 에너지  $U$ 와 작용하중에 대한 위치에너지  $\Omega$ 의 합으로 다음과 같이 표현된다.

$$\Pi = U + \Omega \tag{8}$$

박판이론의 기본적인 가정에 따라 변형 판의 변형률 에너지는 다음과 같다.

$$U = \frac{1}{2} \int_v (\sigma_x \epsilon_x + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dv \tag{9}$$

식 (6)을 식 (9)에 대입하고 변형률 에너지의 변분을 취하여 정리하면 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
 \delta U = \int_l \{ & N_x \delta \epsilon_x^o + M_y \delta \kappa_y + M_z \delta \kappa_z + M_\omega \delta \kappa_\omega \\
 & + V_z \delta \gamma_{xz}^o + V_y \delta \gamma_{xy}^o + T \delta \gamma_\omega^o + M_t \delta \kappa_{xs} \} dx \tag{10}
 \end{aligned}$$

여기서  $N_x, V_y, V_z$ 는 각각  $x, y, z$ 축에 대한 축력과 전단력을 나타내고  $M_y$ 와  $M_z$ 는  $y$ 축과  $z$ 축에 대한 모멘트,  $T$ 와  $M_t$ 는 판의 중립면과 두께방향에 대한 비틀림 모멘트,  $M_\omega$ 는 bimoment를 나타내며 아래와 같이 정의된다.

$$N_x = \int_A \sigma_x dydz \tag{11a}$$

$$M_y = \int_A \sigma_x (z + n \sin \theta) dydz \tag{11b}$$

$$M_z = - \int_A \sigma_x (y - n \cos \theta) dydz \tag{11c}$$

$$M_\omega = \int_A \sigma_x (\omega - nq) dydz \tag{11d}$$

$$V_z = \int_A \tau_{xz} dydz \tag{11e}$$

$$V_y = \int_A \tau_{xy} dydz \tag{11f}$$

$$T = \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} x) dydz \tag{11g}$$

$$M_t = \int_A (\tau_{xz} n \cos \theta + \tau_{xy} n \sin \theta) dydz \tag{11h}$$

외력에 의한 위치에너지의 변분은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta \Omega = \int_l (p_x \delta u + p_y \delta v + p_z \delta w + m_x \delta \theta_x + m_y \delta \theta_y + m_z \delta \theta_z + b \delta \phi_x) dx + [P_x \delta u + P_y \delta v + P_z \delta w + M_x \delta \theta_x + M_y \delta \theta_y + M_z \delta \theta_z + B \delta \phi_x]_o \quad (12)$$

여기서  $p_x, p_y, p_z$  는 x, y, z축에 대한 분포하중을 나타내며  $m_x, m_y, m_z$  는 분포모멘트,  $b$ 는 분포 bimoment,  $P_x, P_y, P_z$  는 x, y, z축에 대한 집중하중,  $M_x, M_y, M_z$  는 집중모멘트,  $B$ 는 집중 bimoment를 나타낸다.

총 위치에너지 변분이 0이 되는 원리를 적용하면 다음의 식을 구하게 된다.

$$0 = \int_1 \{N_x \delta u' + M_y \delta \theta_y' + M_z \delta \theta_z' + M_w \delta \phi_x' + V_z \delta(\omega' + \theta_y) + V_y \delta(v' - \theta_z) + T \delta(\theta_x' - \phi_x) + M_t \delta(-2\theta_x') - (p_x \delta u + p_y \delta v + p_z \delta w + m_x \delta \theta_x + m_y \delta \theta_y + m_z \delta \theta_z + b \delta \phi_x)\} dx - [P_x \delta u + P_y \delta v + P_z \delta w + M_x \delta \theta_x + M_y \delta \theta_y + M_z \delta \theta_z + B \delta \phi_x]_o \quad (13)$$

### 2.3 박판 구성방정식

xyz좌표계에서 플랜지의 k번째 박판 구성방정식은 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^\alpha \\ \sigma_z^\alpha \\ \tau_{xz}^\alpha \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^\alpha & \bar{Q}_{12}^\alpha & \bar{Q}_{16}^\alpha \\ \bar{Q}_{12}^\alpha & \bar{Q}_{22}^\alpha & \bar{Q}_{26}^\alpha \\ \bar{Q}_{16}^\alpha & \bar{Q}_{26}^\alpha & \bar{Q}_{66}^\alpha \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \epsilon_x^\alpha \\ \epsilon_z^\alpha \\ \gamma_{xz}^\alpha \end{Bmatrix} \quad (14)$$

여기서  $\bar{Q}_{ij}^\alpha$ 는 플랜지의 축소된 변형강성(reduced transformed stiffness)을 나타내며 각 층에 대한 재료의 물성치로 구성되어 있다. 단면의 외형방향에 대한 응력은 0이므로 위 식은 아래와 같이 나타내어진다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^\alpha \\ \tau_{xz}^\alpha \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^{*\alpha} & \bar{Q}_{16}^{*\alpha} \\ \bar{Q}_{16}^{*\alpha} & \bar{Q}_{66}^{*\alpha} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \epsilon_x^\alpha \\ \gamma_{xz}^\alpha \end{Bmatrix} \quad (15)$$

여기서 압축된 축소강성은 다음과 같이 주어진다.

$$\bar{Q}_{11}^{*\alpha} = \bar{Q}_{11} - \frac{\bar{Q}_{12}^2}{\bar{Q}_{22}} \quad (16a)$$

$$\bar{Q}_{16}^{*\alpha} = \bar{Q}_{16} - \frac{\bar{Q}_{12} \bar{Q}_{26}}{\bar{Q}_{22}} \quad (16b)$$

$$\bar{Q}_{66}^{*\alpha} = \bar{Q}_{66} - \frac{\bar{Q}_{26}^2}{\bar{Q}_{22}} \quad (16c)$$

같은 방법으로, 복부판에 대한 구성방정식은 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^w \\ \tau_{xz}^w \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^{*w} & \bar{Q}_{16}^{*w} \\ \bar{Q}_{16}^{*w} & \bar{Q}_{66}^{*w} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \epsilon_x^w \\ \gamma_{xz}^w \end{Bmatrix} \quad (17)$$

면외응력과 변형률의 구성관계는  $\tau_{nx} = \bar{Q}_{55} \gamma_{nx}$ 으로 표현되며(Reddy 1997) 이러한 면외응력은 다음과 같이 y축과 z축의 성분으로 표현된다.

$$\tau_{yx}^\alpha = \bar{Q}_{55}^\alpha \sigma_{yx}^\alpha \quad (18a)$$

$$\tau_{zx}^w = \bar{Q}_{55}^w \sigma_{zx}^w \quad (18b)$$

구성방정식 (15), (17), (18)의 응력을 식 (11)에 대입하여 정리하면 적층복합 박벽부재의 구성방정식은 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_y \\ -M_z \\ M_w \\ M_t \\ V_x \\ V_y \\ T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} & E_{16} & E_{17} & E_{18} \\ & E_{22} & E_{23} & E_{24} & E_{25} & E_{26} & E_{27} & E_{28} \\ & & E_{33} & E_{34} & E_{35} & E_{36} & E_{37} & E_{38} \\ & & & E_{44} & E_{45} & E_{46} & E_{47} & E_{48} \\ & & & & E_{55} & E_{56} & E_{57} & E_{58} \\ & & & & & E_{66} & E_{67} & E_{68} \\ & & & & & & E_{77} & E_{78} \\ & & & & & & & E_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^o \\ \kappa_y \\ \kappa_z \\ \kappa_w \\ \kappa_{sz} \\ \gamma_{xz}^o \\ \gamma_{yz}^o \\ \gamma_w^o \end{Bmatrix} \quad (19)$$

여기서 복합부재 단면에 의해 결정되는 적층강성  $E_{ij}$ 는 아래와 같이 주어진다.

$$E_{11} = \int_A \bar{Q}_{11}^* dy dz$$

$$E_{12} = \int_A \bar{Q}_{11}^* (z + n \sin \theta) dy dz$$

$$E_{13} = - \int_A \bar{Q}_{11}^* (y - n \cos \theta) dy dz$$

$$E_{14} = \int_A \bar{Q}_{11}^* (\omega - n q) dy dz$$

$$\begin{aligned}
 E_{15} &= \int_A \bar{Q}_{16}^* n dy dz \\
 E_{16} &= \int_A \bar{Q}_{16}^* \alpha dy dz \\
 E_{17} &= \int_A \bar{Q}_{16}^* w dy dz \\
 E_{18} &= \int_A (\bar{Q}_{16}^* \alpha y - \bar{Q}_{16}^* w z) dy dz \\
 E_{22} &= \int_A \bar{Q}_{11}^* (z^2 + 2nz \sin \theta + n^2 \sin^2 \theta) dy dz \\
 E_{23} &= - \int_A \bar{Q}_{11}^* (yz - nz \cos \theta + nys \sin \theta \\
 &\quad - n^2 \sin \theta \cos \theta) dy dz \\
 E_{24} &= \int_A \bar{Q}_{11}^* (\omega z - nzq + n\omega \sin \theta \\
 &\quad - n^2 q \sin \theta) dy dz \\
 E_{25} &= \int_A \bar{Q}_{16}^* (nz + n^2 \sin \theta) dy dz \\
 E_{26} &= \int_A \bar{Q}_{16}^* \alpha (z + n \sin \theta) dy dz \\
 E_{27} &= \int_A \bar{Q}_{16}^* w (z + n \sin \theta) dy dz \\
 E_{28} &= \int_A [\bar{Q}_{16}^* \alpha (yz + nys \sin \theta) \\
 &\quad - \bar{Q}_{16}^* w (z^2 + nz \sin \theta)] dy dz \\
 E_{33} &= - \int_A \bar{Q}_{11}^* (y^2 - 2nyc \cos \theta + n^2 \cos^2 \theta) dy dz \\
 E_{34} &= \int_A \bar{Q}_{11}^* (\omega y - nqy - n\omega \cos \theta + n^2 q \cos \theta) dy dz \\
 E_{35} &= \int_A \bar{Q}_{16}^* (ny - n^2 \cos \theta) dy dz \\
 E_{36} &= \int_A \bar{Q}_{16}^* \alpha (y - n \cos \theta) dy dz \\
 E_{37} &= \int_A \bar{Q}_{16}^* w (y - n \cos \theta) dy dz \\
 E_{38} &= \int_A [\bar{Q}_{16}^* \alpha (y^2 - nyc \cos \theta) \\
 &\quad + \bar{Q}_{16}^* w (-yz + nz \cos \theta)] dy dz \\
 E_{44} &= \int_A \bar{Q}_{11}^* (\omega^2 - 2n\omega q + n^2 q^2) dy dz \\
 E_{45} &= \int_A \bar{Q}_{16}^* (n\omega - nq) dy dz \\
 E_{46} &= \int_A \bar{Q}_{16}^* \alpha (\omega - nq) dy dz \\
 E_{47} &= \int_A \bar{Q}_{16}^* w (\omega - nq) dy dz \\
 E_{48} &= \int_A [\bar{Q}_{16}^* \alpha (\omega y - nyq) \\
 &\quad - \bar{Q}_{16}^* w (\omega z - nzq)] dy dz \\
 E_{55} &= \int_A (\bar{Q}_{66}^* \alpha n^2 \cos \theta + \bar{Q}_{66}^* w n^2 \sin \theta) dy dz \\
 E_{56} &= \int_A \bar{Q}_{66}^* \alpha n \cos \theta dy dz \\
 E_{57} &= \int_A \bar{Q}_{66}^* w n \sin \theta dy dz \\
 E_{58} &= \int_A (\bar{Q}_{66}^* \alpha nyc \cos \theta - \bar{Q}_{66}^* w nzs \sin \theta) dy dz \\
 E_{66} &= \int_A (\bar{Q}_{66}^* \alpha + \bar{Q}_{55}^* w) dy dz \\
 E_{68} &= \int_A (\bar{Q}_{66}^* \alpha y + \bar{Q}_{55}^* w y) dy dz \\
 E_{77} &= \int_A (\bar{Q}_{55}^* \alpha + \bar{Q}_{66}^* w) dy dz \\
 E_{78} &= \int_A (-\bar{Q}_{55}^* \alpha z - \bar{Q}_{66}^* w z) dy dz \\
 E_{88} &= \int_A (\bar{Q}_{66}^* \alpha y^2 + \bar{Q}_{55}^* w y^2 + \bar{Q}_{55}^* \alpha z^2 \\
 &\quad + \bar{Q}_{66}^* w z^2) dy dz \tag{20}
 \end{aligned}$$

I형 단면에 대한 구체적인 강성값  $E_{ij}$ 를 부록에 수록하였다.

### 3. 유한요소법

본 연구의 적층복합 박벽보에 대한 유한요소에서는 절점수가 2, 3, 4인 세 종류의 등매개변수 보요소(Isoparametric beam element)를 사용하였다. 부재내의 변위는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{\alpha=1}^n N_{\alpha} u_{\alpha}, \quad v = \sum_{\alpha=1}^n N_{\alpha} v_{\alpha}, \quad w = \sum_{\alpha=1}^n N_{\alpha} w_{\alpha} \\
 \theta_i &= \sum_{\alpha=1}^n N_{\alpha} \theta_{i\alpha} \quad (i = x, y, z), \\
 \phi_x &= \sum_{\alpha=1}^n N_{\alpha} \phi_{x\alpha}
 \end{aligned} \tag{21}$$

여기서  $n$ 은 요소당 절점수이고  $N_{\alpha}$ 는 절점  $\alpha$ 에서 형상함수를 나타내며 절점수에 따른 형상함수들은 참고문헌(Hughes, 1987)에서 알 수 있다.

부재의 변위벡터  $d_e$ 는 절점력 벡터  $f_e$  다음과 정의한다.

$$d_e = [d_1, d_2, \dots, d_n]^T \tag{22}$$

$$f_{de}^T = [f_{1d}, f_{1d}, \dots, f_{nd}] \tag{23}$$

여기서 절점 변위벡터  $d_\alpha$ 와 분포하중에 의한 등가 절점하중  $f_{\alpha d}$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$d_\alpha^T = [u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z, \phi_x] \quad (24)$$

$$f_{\alpha d} = [F_{xd}, F_{yd}, F_{zd}, M_{xd}, M_{yd}, M_{zd}, B_{\omega d}]^T \quad (25)$$

식 (21)의 형상함수를 식 (13)에 대입하고 정리하면 적층복합 박벽보의 평형방정식은 다음의 식으로 표현되어진다.

$$k_e d_e = f_e \quad (26)$$

여기서 절점력 벡터  $f_e$ 는 절점작용하중  $f_{je}$ 와 등가 절점하중  $f_{de}$ 의 합이며, 요소선형강성행렬  $k_e$ 는 다음과 같은 블록행렬 형식으로 나타내어진다.

$$k_e = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{12} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{1n} & k_{2n} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \quad (27)$$

여기서 블록행렬  $k_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$ )는 다음과 같이 주어진다.

$$k_{11} = \int_l E_{11} N_\alpha' N_\beta' dx$$

$$k_{12} = \int_l E_{16} N_\alpha' N_\beta' dx$$

$$k_{13} = \int_l E_{17} N_\alpha' N_\beta' dx$$

$$k_{14} = \int_l (E_{18} - 2E_{15}) N_\alpha' N_\beta' dx$$

$$k_{15} = \int_l (E_{12} N_\alpha' N_\beta' + E_{16} N_\alpha' N_\beta) dx$$

$$k_{16} = \int_l (E_{13} N_\alpha N_\beta' - E_{17} N_\alpha' N_\beta) dx$$

$$k_{17} = \int_l (E_{14} N_\alpha' N_\beta' - E_{18} N_\alpha' N_\beta) dx$$

$$k_{22} = \int_l E_{66} N_\alpha' N_\beta' dx$$

$$k_{23} = \int_l E_{67} N_\alpha' N_\beta' dx$$

$$k_{24} = \int_l (E_{68} - 2E_{56}) N_\alpha' N_\beta' dx$$

$$k_{25} = \int_l (E_{26} N_\alpha' N_\beta' + E_{66} N_\alpha' N_\beta) dx$$

$$k_{26} = \int_l (E_{36} N_\alpha' N_\beta' - E_{67} N_\alpha' N_\beta) dx$$

$$k_{27} = \int_l (E_{46} N_\alpha' N_\beta' - E_{68} N_\alpha' N_\beta) dx$$

$$k_{33} = \int_l E_{77} N_\alpha' N_\beta' dx$$

$$k_{34} = \int_l (E_{78} - 2E_{57}) N_\alpha' N_\beta' dx$$

$$k_{35} = \int_l (E_{27} N_\alpha' N_\beta' + E_{67} N_\alpha' N_\beta) dx$$

$$k_{36} = \int_l (E_{37} N_\alpha' N_\beta' - E_{77} N_\alpha' N_\beta) dx$$

$$k_{37} = \int_l (E_{47} N_\alpha' N_\beta' - E_{78} N_\alpha' N_\beta) dx$$

$$k_{44} = \int_l (4E_{55} - 4E_{58} + E_{88}) N_\alpha' N_\beta' dx$$

$$k_{45} = \int_l [(E_{28} - 2E_{25}) N_\alpha' N_\beta' + (E_{68} - 2E_{56}) N_\alpha' N_\beta] dx$$

$$k_{46} = \int_l [(E_{38} - 2E_{35}) N_\alpha' N_\beta' + (2E_{57} - E_{78}) N_\alpha' N_\beta] dx$$

$$k_{47} = \int_l [(E_{48} - 2E_{45}) N_\alpha' N_\beta' + (2E_{58} - E_{88}) N_\alpha' N_\beta] dx$$

$$k_{55} = \int_l [E_{22} N_\alpha' N_\beta' + E_{26} (N_\alpha' N_\beta + N_\alpha N_\beta') + E_{66} N_\alpha N_\beta] dx$$

$$k_{56} = \int_l [E_{23} N_\alpha' N_\beta' - E_{27} N_\alpha' N_\beta + E_{36} N_\alpha N_\beta' - E_{67} N_\alpha N_\beta] dx$$

$$k_{57} = \int_l [E_{24} N_\alpha' N_\beta' - E_{28} N_\alpha' N_\beta + E_{46} N_\alpha N_\beta' - E_{68} N_\alpha N_\beta] dx$$

$$k_{66} = \int_l [-E_{33} N_\alpha' N_\beta' + E_{37} (N_\alpha' N_\beta + N_\alpha N_\beta') + E_{77} N_\alpha N_\beta] dx$$

$$k_{67} = \int_l [-E_{34} N_\alpha' N_\beta' + E_{38} N_\alpha' N_\beta - E_{47} N_\alpha N_\beta' + E_{78} N_\alpha N_\beta] dx$$

$$k_{77} = \int_l [E_{44} N_\alpha' N_\beta' + E_{48} (N_\alpha' N_\beta + N_\alpha N_\beta') + E_{88} N_\alpha N_\beta] dx \quad (28)$$

식 (28)의 요소강성행렬은 일반적으로 사용되는 외형좌표계에 근거한 강성행렬(Lee, 2005)과는 다른 것을 알 수 있다. 본 연구에서 유도한 블록강성행렬에 대한 영향은 예제를 통하여 입증한다.

각 부재의 강성행렬  $k_e$ 와 절점력 벡터  $f_e$ 는 직접강도법으로 전체구조물 강성행렬  $K$ 와 절점력 벡터  $F$ 를 구하면 전체구조물의 평형방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$K D = F \quad (29)$$

본 연구에서는 등매개변수 보요소의 사용으로 전단항을 적절히 취급하지 못하면 강성도가 과대 평가되는 소위 locking 현상이 발생하게 된다. 따라서 이러한 "shear locking" 현상을 극복하기 위하여 균일감차적분(uniform reduced integration) 기법을 사용하였다. 일반적으로 판/셸 요소에 균일감차적분을 적용하는 경우 요소 강성행렬의 계급(rank)이 낮아져서 여분의 zero-energy mode가 나타날 수 있지만 본 연구의 보 요소에서는 이러한 현상은 나타나지 않았다.

#### 4. 수치해석

##### 4.1 등분포하중하의 단순보

본 연구에서 제안한 블록강성행렬의 효율성을 검증하기 위하여, 1 kN/m의 등분포하중이 작용하는 길이가 2.5 m인 단순 지지 보를 사용하였다. 그림 2는 플랜지 폭과 복부판 높이가 5 cm인 I형 단면을 나타내고 있다. 이 예제는 다른 연구자들(박영석 등, 2000; Lee, 2005)에 의해 사용된 예제이다. 사용된 재료의 물성치는 표 1과 같다.

여러 가지 적층순서에 대하여 본 연구의 블록강성행렬을 사용한 최대 처짐과 다른 연구자들의 결과를 표 2에 나타내었다. 본 연구에서는 3절점 2요소로 모델링하였다. 이 때 박벽보의 콘투어방향 변형을  $\epsilon_s = 0$ 와 응력  $\sigma_s = 0$ 의 가정을 사용한 결과를 표시하였다. 평면응력( $\sigma_s = 0$ )으로 가정한 최대 처짐이 평면변형률( $\epsilon_s = 0$ )으로 가정한 처짐보다 크게 산정된 것을 알 수 있다. 또한, 평면응력으로 가정하여 구한 최대 처짐이 기

준 연구자의 결과와 잘 일치하는 것을 보여주고 있다.

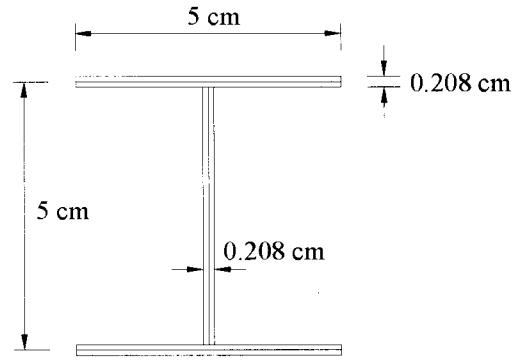


그림 2. 박벽 I형 보

표 1. 재료 물성치

Properties	Values
$E_{11}$	53.78 GPa
$E_{22}, E_{33}$	17.93 GPa
$G_{12}, G_{13}$	8.96 GPa
$G_{23}$	3.45 GPa
$\nu_{12}, \nu_{13}$	0.25
$\nu_{23}$	0.34
Ply thickness	0.013 cm

본 유한요소에 의한 결과는 Lee(2005)의 결과보다 ABAQUS 유한요소해석과 Barbero(1999)의 결과에 근접함을 나타내고 있다. 전단변형을 고려하지 않은 Vlasov 박벽보 이론에 근거한 박영석 등(2000)의 결과는 상당한 차이를 보여주고 있다.

본 연구에서 제안한 보 요소의 수렴을 조사하기 위하여 전체 보를 길이 방향으로 다른 요소 수로 모델링하였다. 각 적층순서에 대하여 2절점(linear), 3절점(quadratic), 그리고 4절점(cubic) 보요소를 사용하여 최대 처짐값을 그림 3에 나타내었다. 모든 적층순서에 대하여 3절점과 4절점 보요소로 모델링한 유한요소는 빠르게 수렴하는 것을 알 수 있다. 반면에 선형요소

표 2. 등분포하중을 받는 단순보의 최대 처짐값

(단위 : cm)

Stacking sequence	ABAQUS	Barbero	박영석 등		Lee		Present	
			$\epsilon_s = 0$	$\sigma_s = 0$	$\epsilon_s = 0$	$\sigma_s = 0$	$\epsilon_s = 0$	$\sigma_s = 0$
$[0]_{16}$	6.340	6.283	6.103	6.233	6.129	6.259	6.131	6.261
$[15/-15]_{4s}$	6.989	6.941	6.611	6.899	6.637	6.923	6.651	6.926
$[30/-30]_{4s}$	9.360	9.322	8.282	9.291	8.307	9.314	8.307	9.317
$[45/-45]_{4s}$	13.479	13.449	11.343	13.420	11.363	13.446	11.370	13.450
$[60/-60]_{4s}$	17.023	16.993	15.124	16.960	15.151	16.992	15.140	17.000
$[75/-75]_{4s}$	18.490	18.453	17.641	18.410	17.683	18.449	17.670	18.460
$[0/90]_{4s}$	9.400	9.349	9.153	9.299	9.189	9.381	9.189	9.384

는 변위, 회전각, 뒀에 선형 형상함수를 사용하는 2절점 요소이다. 이러한 저차 형상함수는 전형적인 휨 거동을 정확하게 나타낼 수가 없으므로 2절점을 사용한 유한요소는 수렴속도가 느린 것을 확인할 수 있었다.

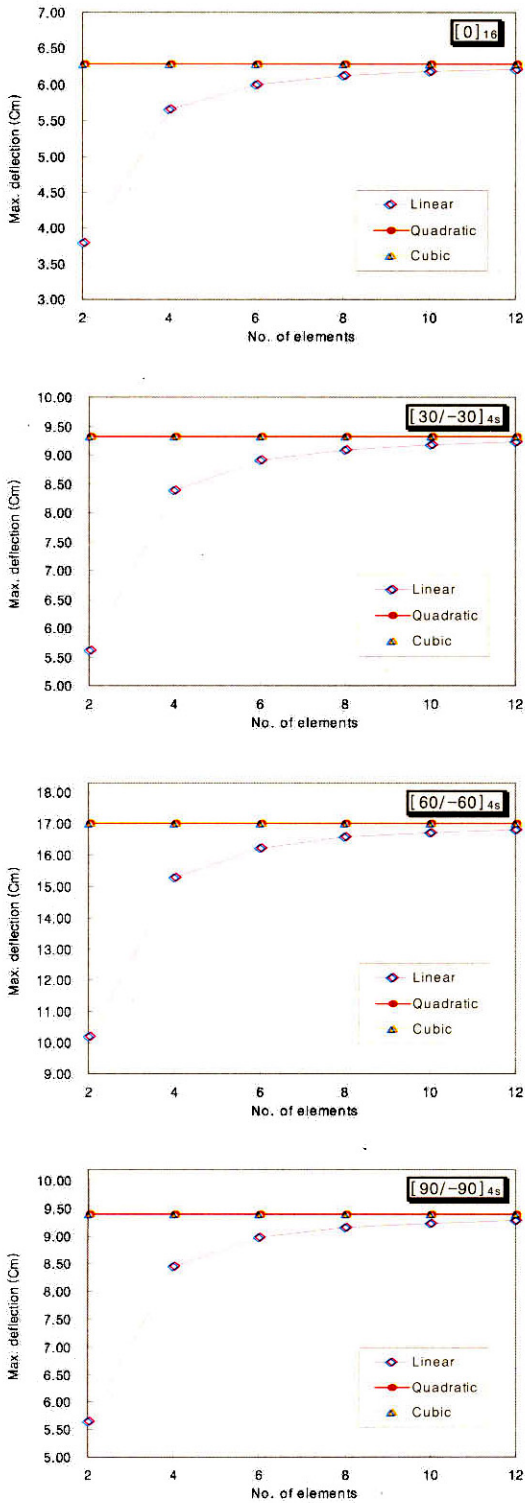


그림 3. 각 보요소의 최대 처짐의 수렴성

### 4.2 외팔보

외팔보의 단부에 단위 수직하중이 작용하는 적층 복합재 I형 박벽보에 대한 휨 해석을 수행하였다. 이 예제는 Chandra와 Chopra(1991)가 실험을 수행한 I형보이다. 보의 길이는 914.4 mm이고 플랜지 폭(b)과 복부판 높이(h)는 각각 25.4 mm와 12.7 mm이다. 실험에서 고정단과 하중단부의 뒀 변위를 구속하였으므로 그림 4와 같이 보의 양단에서 뒀 변형을 구속하였다.

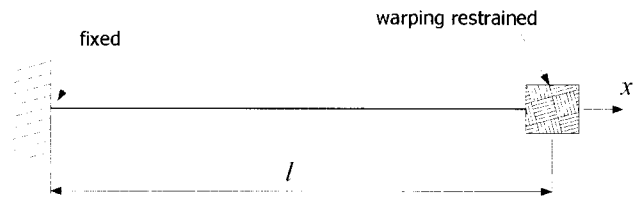


그림 4. 외팔보의 경계조건

그림 5는 단면 형상과 적층배열을 나타내고 있다. 플랜지와 복부판은 graphite-epoxy(AS4/3501-6)를 사용하였고 물성치는 표 3에 나타내었다. 보는 대칭 적층되어 있으며 적층 배열은 상, 하부플랜지에서  $[(0/90)_2/(90/0)/\theta_2]$ 을, 복부판은  $[0/90]_{2s}$ 을 사용하였으며 각 층의 두께는 모두 일정하게 하였다.

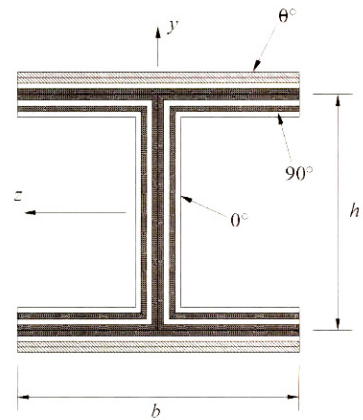


그림 5. I형 보의 적층형태

표 3. Graphite-epoxy 재료의 물성치

Properties	Values
$E_{11}$	141.9 GPa
$E_{22}$	9.78 GPa
$G_{12}$	6.13 GPa
$\nu_{12}$	0.42
Ply thickness	0.127 mm



본 유한요소에서는 같은 길이의 4절점 4요소를 사용하였다.

$\theta = 15^\circ$ 인 경우에 대하여 휨에 의한 회전각의 분포도를 그림 6에 나타내었다. 또한, Chandra와 Chopra(1991)의 실험 결과와 Jung과 Lee(2003)의 수치해석 결과를 함께 표시하였다. 본 유한요소에 의한 회전각은 Jung과 Lee의 회전각보다 실험 결과에 더 근접함을 보여주고 있다.

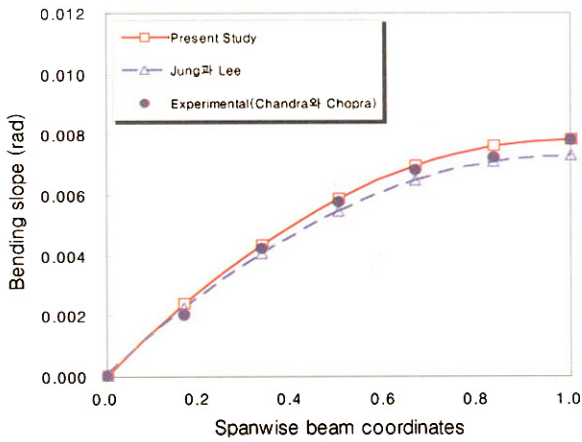


그림 6. 외팔보의 휨 회전각

그림 7은 자유단에서의 휨에 의한 회전각을 적층각의 함수로 나타낸 것이다. 플라이앵글  $\theta$  를  $0^\circ$ 에서  $90^\circ$ 까지  $15^\circ$ 씩 증가시키면서 조사하였다. 플라이앵글이 증가함에 따라 휨에 의한 회전각도 증가함을 알 수 있다. Jung과 Lee의 결과와 평면변형률( $\epsilon_s = 0$ )에 의한 회전각은 평면응력( $\sigma_s = 0$ )에 의한 회전각보다 작게 나타나고 있으므로 실제 보를 과대평가하게 된다. 따라서 평면응력이 0이라는 가정이 사용되어야 한다고 판단된다.

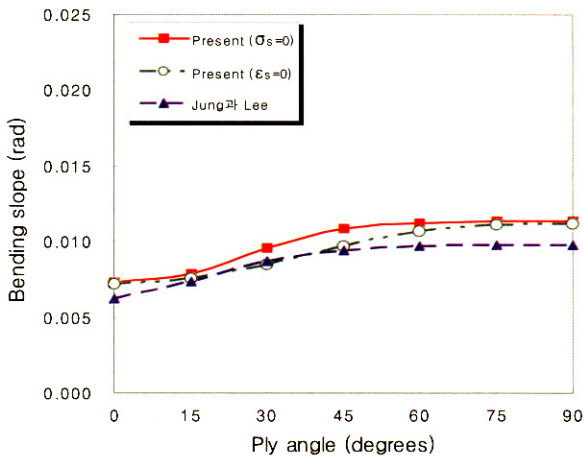


그림 7. 적층각 변화에 따른 최대 휨 회전각

## 5. 결론

본 연구에서는 적층복합 I형 박벽보의 유한요소 해석을 위하여 블록 강도행렬을 제안하였다. 변위장은 직교좌표계에 근거한 1차 전단변형을 고려한 보 이론을 사용하여 정의하였다. 본 유한요소에서는 세 종류의 보요소; 2절점, 3절점, 4절점 요소를 제안하였고 각 요소에 대한 수렴성을 조사하였다. 수치해석 예제를 통해 본 연구에서 제안한 3절점과 4절점 보요소는 적은 보요소의 사용으로도 기존 연구자의 유한요소 결과와 잘 일치하는 것으로 나타나 적층 복합보의 해석에 효과적임을 입증하였다. 또한, 콘투어방향의 변형이 0이라는 가정보다 콘투어방향의 응력이 0이라는 가정이 적절하다는 것을 밝혔다.

## 참고 문헌

- 박영석, 권효찬, 신동구 (2000) Vlasov형 박벽보 이론에 의한 대칭적층 개단면 복합재 보의 휨해석, *대한토목학회논문집*, 제 20권 I-A호, pp.125-141.
- Back, S. Y. and Will, K. M. (1998) A shear-flexible element with warping for thin-walled open beams, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 43, pp.1173-1191.
- Bakis, C. E., Bank, L. C., Brown, V.L., Cosenza, E., Davalos, J. F., Lesko, J. J., Machida, A., Rizkalla, S. H., and Triantafillou, T. C. (2002) Fiber-reinforced polymer composites for construction-state-of-the-art review, *Journal of Composites for Construction*, Vol. 6, No. 2, pp.73-87.
- Barbero, E. J. (1999) *Introduction to Composite Materials Design*, Taylor & Francis.
- Barbero, E. J., Lopez Anido, R. and Davalos, J. F. (1993) On the mechanics of thin-walled laminated composite beams, *Journal of Composite Materials*, Vol. 27, No. 8, pp.806-829.
- Bauld N. R. and Tzeng L. S. (1984) A Vlasov theory for fiber reinforced beams with thin-walled open cross section, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 20, No. 3, pp.277-97.
- Chandra, R. and Chopra, I. (1991) Experimental and theoretical analysis of composite I-beams with elastic couplings, *AIAA Journal*, Vol. 29, No. 12, pp.2197-2206.
- Davalos, J. F. and Qiao, P. (1997) Analytical and experimental study of lateral and distortional buckling of FRP wide flange beams, *Journal of*

*Composites for Construction*, Vol. 1, No. 4, pp.150-159.

Gjelsvik, A. (1981) *The Theory of Thin-Walled Bars*, John Wiley and Sons Inc., NY.

Hughes, T. J. R. (1987) *The Finite Element Method-Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J..

Jung, S. N. and Lee, J. Y. (2003) Closed-form analysis of thin-walled composite I-beams considering non-classical effects, *Composite Structures*, Vol. 60, pp.9-17.

Lee, J. and Lee, S. (2004) Flexural torsional behavior of thin-walled composite beams, *Thin-Walled Structures*, Vol. 42, No. 9, pp.1293-1305.

Lee, J. (2005) Flexural analysis of thin-walled composite beams using shear deformable beam theory, *Composite Structures*, Vol. 70, pp.212-222.

Lin, Z. M., Polyzois, D. and Shah, A. (1996) Stability of thin-walled pultruded structural members by the finite element method, *Thin-Walled Structures*, Vol. 24, pp.1-18.

Maddur, S. S. and Chaturvedi, S. K. (2000) Laminated composite open profile sections: non-uniform torsion of I-sections, *Composite Structures*, Vol. 50, pp.159-169.

Mottram, J. T. (1992) Lateral torsional buckling of a pultruded I-beam, *Composites*, Vol. 32, No. 2, pp.81-92.

Pandey, M. D., Kabir, M. Z. and Sherbourne, A. N. (1995) Flexural torsional stability of thin-walled composite I-section beams, *Composites Engineering*, Vol. 5, No. 3, pp.321-342.

Qiao, P., Zou, G. and Davalos, J. F. (2003) Flexural torsional buckling of fiber reinforced plastic composite cantilever I-beams, *Composite Structures*, Vol. 60, pp.205-217.

Qin, Z. and Librescu, L. (2002) On a shear deformable theory of anisotropic thin-walled beams: further contribution and validations, *Composite Structures*, Vol. 56, No. 2, pp. 345-358.

Reddy, J. N. (1997) *Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis*, CRC Press.

Vlasov, V. Z. (1961) *Thin-Walled Elastic Beams, Israel Program for Scientific Translations*, Jerusalem, Israel.

식 (20)의 단면 두께방향에 대한 적분을 수행하여 정리하면 I형 단면에 대한 0이 아닌 강성값은 아래 식과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
 E_{11} &= A_{11}^{\beta} b_{\beta} \\
 E_{12} &= B_{11}^w b_w \\
 E_{13} &= -A_{11}^{\alpha} b_{\alpha} y_{\alpha} + B_{11}^{\alpha} b_{\alpha} \\
 E_{14} &= -B_{11}^w b_w y_3 \\
 E_{15} &= B_{16}^{\beta} b_{\beta} \\
 E_{16} &= A_{16}^{\alpha} b_{\alpha} \\
 E_{17} &= A_{16}^w b_w \\
 E_{18} &= A_{16}^{\alpha} b_{\alpha} y_{\alpha} \\
 E_{22} &= A_{11}^{\alpha} \frac{b_{\alpha}^3}{12} + D_{11}^w b_w \\
 E_{23} &= -B_{11}^w b_w y_3 \\
 E_{24} &= [A_{11}^{\alpha} y_{\alpha} - B_{11}^{\alpha}] \frac{b_{\alpha}^3}{12} \\
 E_{25} &= D_{16}^w b_w \\
 E_{27} &= B_{16}^w b_w \\
 E_{33} &= -[A_{11}^{\alpha} y_{\alpha}^2 - 2B_{11}^{\alpha} y_{\alpha} + D_{11}^{\alpha}] b_{\alpha} - A_{11}^w \frac{b_w^3}{12} \\
 E_{34} &= -B_{11}^w \frac{b_w^3}{12} \\
 E_{35} &= B_{16}^{\alpha} b_{\alpha} y_{\alpha} - D_{16}^{\alpha} b_{\alpha} \\
 E_{36} &= (A_{16}^{\alpha} y_{\alpha} - B_{16}^{\alpha}) b_{\alpha} \\
 E_{37} &= A_{16}^w b_w y_3 \\
 E_{38} &= (A_{16}^{\alpha} y_{\alpha} - B_{16}^{\alpha}) b_{\alpha} y_{\alpha} \\
 E_{44} &= [A_{11}^{\alpha} y_{\alpha}^2 - 2B_{11}^{\alpha} y_{\alpha} + D_{11}^{\alpha}] \frac{b_{\alpha}^3}{12} + D_{11}^w \frac{b_w^3}{12} \\
 E_{47} &= -B_{16}^w b_w y_3 \\
 E_{55} &= D_{66}^{\beta} b_{\beta} \\
 E_{56} &= B_{66}^{\alpha} b_{\alpha} \\
 E_{57} &= B_{66}^w b_w \\
 E_{58} &= B_{66}^{\alpha} b_{\alpha} y_{\alpha} \\
 E_{66} &= A_{66}^{\alpha} b_{\alpha} + A_{55}^w b_w \\
 E_{68} &= A_{66}^{\alpha} b_{\alpha} y_{\alpha} + A_{44}^w b_w y_3 \\
 E_{77} &= A_{55}^{\alpha} b_{\alpha} + A_{66}^w b_w
 \end{aligned}$$

$$E_{88} = A_{66}^{\alpha} b_{\alpha} y_{\alpha}^2 + A_{55}^{\beta} \frac{b_{\beta}^3}{12} \quad (A.1)$$

여기서 반복지수는 반복되는 합을 나타내는데, 지수  $\beta$ 는 1, 2, w의 값을 가진다.  $b_{\alpha}$ 와  $b_w$ 는 각각 상, 하부 플랜지와 복부 판의 폭을 의미한다.

식 (A.1)에서 박판강성계수  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $D_{ij}$ 는 각각 인장, 휨 - 인장 연계, 휨 강성계수를 나타내며 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} (A_{ij}^{\alpha}, B_{ij}^{\alpha}, D_{ij}^{\alpha}) &= \int \overline{Q}_{ij}(1, n, n^2) dy \quad i, j = 1, 2, 6 \\ (A_{ij}^w, B_{ij}^w, D_{ij}^w) &= \int \overline{Q}_{ij}(1, n, n^2) dz \quad i, j = 1, 2, 6 \\ A_{ij} &= \int \overline{Q}_{ij} dz \quad i, j = 4, 5 \end{aligned} \quad (A.2)$$

(접수일자 : 2006. 4. 14 / 심사일 2006. 5. 19 /  
심사완료일 2006. 6. 10)