

축방향 하중을 받는 특별직교이방성 적층복합판의 진동해석

Vibration Analysis of Special Orthotropic Laminated Composite Plates under Axial Loadings

원 치 문^{1)†}

Won, Chi Moon

요 약 : 본 논문에서는 축방향 하중을 받는 사변단순지지된 특별직교이방성 적층복합판의 고유진동수를 간편하게 계산하는 방법을 제시한다. 이 방법은 진동해석을 위해, 임의 방법으로 얻어질 수 있는 영향계수를 사용하며 공명상태하에서 관성력에 의한 부재의 변형된 모드 형상을 결정하는 과정으로 이루어진다. 최초에 가정된 임의의 모드 형상으로 시작하여 정확한 모드 형상이 반복적인 과정을 통해 얻어진다. 또한 $[\alpha\beta]_r$, $[\alpha\beta\beta\alpha\alpha\beta]_r$, 그리고 $[\alpha\beta\beta\gamma\alpha\alpha\beta]_r$ 와 같이 적층의 수가 증가함에 따라 B_{16} , B_{26} , D_{16} , 그리고 D_{26} 가 무시될 수 있어서 특별직교이방성 적층복합판 이론과 본 방법을 적용할 수 있는 형태를 제시하고 이들에 대한 진동해석 결과를 제시한다.

ABSTRACT : A simple but precise method of calculating the natural vibration frequencies of composite laminated plates with all-simple support and under axial loadings is presented herein. This method uses deflection influence surfaces, which can be obtained by any method for vibration analysis and consists of determining the deflected mode shape of the member due to the inertia force under resonance condition. Beginning with an initially guessed mode shape, the exact mode shape is obtained by the process similar to iteration. In this paper, equations are given for the case of special orthotropic laminates. The same equations, however, can be used for any laminate as long as B_{16} , B_{26} , D_{16} , and D_{26} are negligible as the number of plies increases. Some laminates that possess such properties are presented in the paper.

핵심용어 : 고유진동수, 축방향 하중, 특별직교이방성, 적층판, 복합재료, 진동해석

KEYWORDS : Natural frequencies; Axial loadings; Special orthotropic, Laminates, Composite, Vibration Analysis

1. 서론

복합재료는 표준화와 해석, 설계, 제작, 건설, 품질관리 등에 대한 규정이 완성되었을 때 경제적이고 효과적으로 토목공학에 폭넓게 이용될 수 있다. 구조부재의 설계와 해석은 예상된 모든 종류의 하중에 대해 영향계수를 구하는 것에서부터 시작한다. 그리고 재료와 각 부재의 단면이 그러한 계산의 결과에 따라 설계된 후에 진동과 안정 문제가 해석된다. 그런데 Navier 또는 Levy 해석 형태와 다른 경계조건을 갖거나, 불규칙한 단면을 갖는 적층 composite 판의 경우에, 해석적 방법에 의해 답을 구하는 것은 거의 불가능하다.

Kim, D.H. (1974)은 임의의 단면과 경계조건을 갖는 보와 탑구조에 대한 진동이론을 개발 발표하였고(Kim, D.H.,

1995), 이 이론은 임의의 단면을 갖고 임의의 지지점에 놓인 composite의 제 1모드 진동 고유주파수를 구하는데 확장 적용되어, 제1차 일본첨단재료기술협회 국제회의(JISSE-1)에서 발표되었다(Kim, D.H. 등, 1989). 또한 제 2모드 이상의 진동의 경우는 미국 토목학회 제 8차 구조공학 학술대회에서 발표되었고(Kim, D.H. 등, 1990), 횡방향 전단변형을 고려한 두꺼운 적층판에 대한 연구결과가 제 8차 국제복합재료학회(Kim, D.H. 등, 1991)와 제2차 일본첨단재료기술협회 국제회의(JISSE-2)에서 발표되었다(Kim, D.H. 등, 1991). 원치문(2002)은 다양한 경계조건을 갖는 복합적층판의 진동해석을 수행하였다. 본 논문에서는 축방향 하중을 받는 사변단순지지된 복합적층판의 간편한 진동해석방법과 이 방법을 이용하여 해석한 결과를 제시하고자 한다.

1) 교신저자. 정회원, 한라대학교 토목공학과 조교수, 공학박사
(Tel : 033-760-1266, Fax : 033-760-1261, E-mail : cmwon@hit.halla.ac.kr)

본 논문에 대한 토의를 2006년 8월 30일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

2. 해석 방법

구조물의 고유진동수는 공명 상태하에서 확산하기 시작하는 처짐 모드 형태하에서의 주파수이다. 자유진동으로 인한 처짐으로부터 이러한 처짐을 유발하는데 필요한 힘을 알 수 있다. 일련의 이러한 과정에 의해 결정된 모드형태가 충분히 정확하다면, 수렴된 것과 바로 이전 값 사이에서의 상대적 최대 처짐은 이러한 관성력하에서 불변하다. 구조물의 진동은 조화운동이고 진폭형상은 삼각함수에 의해 표시될 수 있는 부분이 있다. 처음에 제 1모드만 고려하면, 구조부재의 처짐 형태는 다음 식 (1)과 같이 쓸 수 있다.

$$w = W(x,y)F(t) = W(x,y)\sin\omega t \quad (1)$$

여기서 W 는 최대 진폭, ω 는 고유 진동 주파수, t 는 시간이다. Newton의 법칙에 의해 진동하는 질량 m 의 동적 힘은 다음 식 (2)와 같다.

$$F = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2)$$

방정식 (1)을 위의 식 (2)에 대입하면 식 (3)으로 된다.

$$F = -m(\omega)^2 W(x,y) \sin\omega t \quad (3)$$

여기서 ω 와 W 는 미지수이다. 고유진동수 ω 를 구하기 위하여 다음의 과정이 취해진다. 어떤 몇 개의 점에서 최대 처짐의 진폭은 임의로 주어진다.

$$w(i,j)^{(1)} = W(i,j)^{(1)} \quad (4)$$

여기서 (i,j) 는 고려한 점을 나타낸다.

이것은 절대적으로 임의의 값이지만 경험에 의해 가정하면 수렴을 촉진시키는데 더욱 좋다. 이러한(최대)진폭에 대응하는 동적 힘은 다음 식 (5)와 같이 표기된다.

$$F(i,j)^{(1)} = -m(i,j)[\omega(i,j)^{(1)}]^2 w(i,j)^{(1)} \quad (5)$$

이 힘에 의해 일어나는 새로운 변위는 F 의 함수이고 다음 식 (6)과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} w(i,j)^{(2)} &= f(m(i,j)[\omega(i,j)^{(1)}]^2 w(i,j)^{(1)}) \\ &= \sum \Delta(i,j,k,1) (-m(i,j)[\omega(i,j)^{(1)}]^2 w(i,j)^{(1)}) \end{aligned} \quad (6)$$

여기에서 Δ 는 처짐에 대한 영향계수이다.

공명상태하에서 구조부재의 모든 점에서 고려한 $w(i,j)^{(1)}$ 과 $w(i,j)^{(2)}$ 는 동일해야 하고 다음 조건을 만족해야 한다.

$$w(i,j)^{(1)}/w(i,j)^{(2)} = 1 \quad (7)$$

방정식 (7)로부터 (i,j) 의 각 점에서의 $\omega(i,j)^{(1)}$ 이 얻어질 수 있지만, 대부분의 경우에 일치하지 않는다. 구조부재의 고유진동수가 부재의 모든 점에서 동일해야 하므로 $\omega(i,j)$ 의 값이 모든 (i,j) 점에서 충분히 동일하게 얻어질 때까지 이 과정이 반복된다. 그러나 대부분의 경우에 첫 번째 사이클(Cycle)의 계산에 의해 얻어진 $\omega(i,j)$ 의 최대와 최소값의 차이는 공학적으로 충분히 무시 될 수 있다. 정확도는 최대와 최소치의 평균을 취하거나 또한 처짐이 최대인 곳에서 $\omega(i,j)$ 의 값을 취함으로써 개선될 수 있다.

다음 식 (8)과 같은 2번째 사이클에서 $w(i,j)^{(2)}$ 의 절대적 수치가 편리하게 사용될 수 있다.

$$w(i,j)^{(3)} = f(m(i,j)[\omega(i,j)^{(2)}]^2 w(i,j)^{(2)}) \quad (8)$$

복합재료 구조물을 포함하여 불규칙한 단면과 이상적이 아닌 지지조건을 가진 판의 경우, 경계조건에 관계없이 이 판을 몇 개의 요소로 나누어 고려하는 것이 편리하다. 지금까지의 연구결과에서 정확성은 처짐계산의 정확도에 비례한다.

3. 축방향 하중을 받는 특별직교이방성 적층복합판

횡방향 하중 $q(x,y)$ 와 균일한 축방향 하중 N_x 와 N_y 를 받는 사변 단순지지된 직사각형 판을 고려한다. 이 판이 특별직교이방성 적층판이고 열과 습열효과를 무시한다면 처짐과 하중은 다음 식 (9)와 (10) 같이 Fourier series로 표현될 수 있다.

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (9)$$

$$q(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (10)$$

축방향 하중을 받는 특별직교이방성 적층판의 지배방정식은 다음 식 (11)과 같다.

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_{33} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$$

$$= q(x,y) + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (11)$$

여기서 $N_x = P_1$, $N_y = P_2$, $N_{xy} = 0$ 이고 $D_3 = D_{12} + 2D_{66}$ 이다.

식 (9)와 식 (10)을 방정식 (11)에 대입하면 m과 n의 정해진 수자에 대해 다음 식 (12)로 표현된다.

$$w_{mn} = \frac{q_{mn}}{\pi^4 \times \text{DEN}} \quad (12)$$

여기서

$$\begin{aligned} \text{DEN} = & D_{11} \left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2D_3 \left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\frac{n}{b}\right)^2 + D_{22} \left(\frac{n}{b}\right)^4 \\ & + \left[P_1 \left(\frac{m}{\pi a}\right)^2 + P_2 \left(\frac{n}{\pi b}\right)^2 \right] \end{aligned} \quad (13)$$

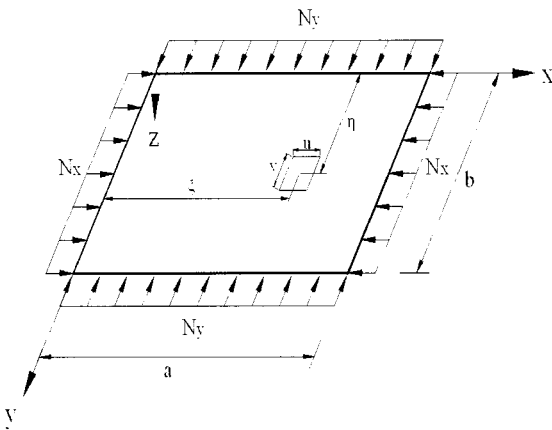


그림 1. 횡방향과 균일한 축방향 하중을 받는 적층판

단순지지된 특별직교이방성 적층판에 그림 1과 같이 직사각형 면적 uv에 균등하게 분포된 부분하중 q(x,y)가 작용할 때 m과 n의 고정된 값에 대해 q_{mn} 은 다음 식 (14)로 표현된다.

$$\begin{aligned} q_{mn} = & \frac{4q}{abuv} \int_{\xi=-u/2}^{\xi+u/2} \int_{\eta=-v/2}^{\eta+v/2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy dx \\ = & \frac{16q}{\pi^2 mn uv} \sin\left(\frac{m\pi \xi}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi \eta}{b}\right) \\ & \times \sin\left(\frac{m\pi u}{2a}\right) \sin\left(\frac{n\pi v}{2b}\right) \end{aligned} \quad (14)$$

$u \rightarrow 0$ 이고 $v \rightarrow 0$ 인 집중하중의 경우에 식(14)는 다음 식 (15)로 된다.

$$\lim_{u \rightarrow 0} \sin\left(\frac{m\pi u}{2a}\right) = \frac{m\pi u}{2a}, \quad \lim_{v \rightarrow 0} \sin\left(\frac{n\pi v}{2b}\right) = \frac{n\pi v}{2b} \quad (15)$$

식 (15)를 식 (14)에 대입하면 다음 식 (16)이 얻어질 수 있다.

$$q_{mn} = \frac{4q}{ab} \sin\left(\frac{m\pi \xi}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi \eta}{b}\right) \quad (16)$$

그러므로 영향면은 다음 식 (17)과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} w(x,y) = & \Delta(x,y,\xi,\eta) \\ = & \frac{4}{\pi^4 ab} \times \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{m\pi \xi}{a} \sin\frac{n\pi \eta}{b}}{\text{DEN}} \\ & \times \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \quad (17)$$

식 (17)로부터 계산된 영향계수와 전절에서 설명한 해석방법으로 고유진동수를 구할 수 있다.

만약 축방향력이 인장력이면, 즉, $P_1 > 0$ 이고 $P_2 > 0$, 판의 강성이 증가한 것처럼 거동하므로 처짐이 감소하며 축방향력이 압축력이면, 즉 $P_1 < 0$ 이고 $P_2 < 0$, 반대 현상이 발생할 것이다.

4. 특별직교이방성 단면이 아닌 적층판

어떤 방향을 가진 많은 적층판들은 ply의 수가 증가함에 따라 B_{16} , B_{26} , D_{16} 그리고 D_{26} 의 값이 감소하며 이러한 적층판들은 특별직교이방성 적층판의 방정식과 본 해석방법을 이용하여 해석할 수 있다. 이러한 적층판의 일부는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & [\alpha\beta]_r, \quad \alpha = -\beta \\ & [\alpha\beta\beta\alpha\alpha\beta]_r, \quad \alpha = -\beta \\ & [\alpha\beta\beta\gamma\alpha\alpha\beta]_r, \quad \gamma = 0^\circ, \text{ or } 90^\circ, \quad \alpha = -\beta \end{aligned}$$

언급한 특성을 확인하기 위한 수치예로서 모든 ply에 대해 GFRP의 재료 물성치인 다음 값을 사용하였다.

$$\begin{aligned} E_1 = 38.6 \text{ GPa}, \quad E_2 = 8.27 \text{ GPa}, \quad \nu_{12} = 0.26, \\ \nu_{21} = 0.0557, \quad G_{12} = 4.14 \text{ GPa}, \quad h_0 = 0.000125 \text{ m} \end{aligned}$$

상기 물성치에 대한 축소강성(reduced stiffness) 값을 표 1에 나타내었다. 또한 여러 가지 각도 중에서 대표적으로 $\alpha = -\beta = 30^\circ$ 인 경우에 대해 본 연구와 관련된 강성을 계산하여 $[\alpha\beta]_r$ 형태는 표 2에 $[\alpha\beta\beta\alpha\alpha\beta]_r$ 형태는 표 3에 그리고 $[\alpha\beta\beta\gamma\alpha\alpha\beta]_r$ 형태에서 $\gamma = 0^\circ$ 인 경우는 표 4에 $\gamma = 90^\circ$ 인 경우는 표 5에 각각 나타내었다.

표 1. 적층판에 대한 강성 값

강성종류	강성 값
Q ₁₁	39.17 GPa
Q ₁₂	2.182 GPa
Q ₂₂	8.392 GPa
Q ₆₆	4.14 GPa

표 2. $[\alpha\beta]_r$ 형태의 적층판에 대한 강성 값
 $\alpha = -\beta = 30^\circ, r = 20, h_0 = 0.000125 \text{ m}$

강성종류	강성 값	강성종류	강성 값
A ₁₁	132,396,028 N/m	B ₂₂	0
A ₁₂	35,879,443 N/m	B ₂₆	-1,181 N
A ₁₆	0	B ₆₆	0
A ₂₂	55,456,797 N/m	D ₁₁	275.8 N-m
A ₂₆	0	D ₁₂	74.75 N-m
A ₆₆	45,670,458 N/m	D ₁₆	0
B ₁₁	0	D ₂₂	115.5 N-m
B ₁₂	0	D ₂₆	0
B ₁₆	-2,983 N	D ₆₆	95.15 N-m

표 3. $[\alpha\beta\beta\alpha\alpha\beta]_r$ 형태의 적층판에 대한 강성 값
 $\alpha = -\beta = 30^\circ, r = 5, h_0 = 0.000125 \text{ m}$

강성종류	강성 값	강성종류	강성 값
A ₁₁	99,297,021 N/m	B ₂₂	0
A ₁₂	26,909,582 N/m	B ₂₆	-295.30 N
A ₁₆	0	B ₆₆	0
A ₂₂	41,592,598 N/m	D ₁₁	116.36 N-m
A ₂₆	0	D ₁₂	31.54 N-m
A ₆₆	34,252,843 N/m	D ₁₆	0
B ₁₁	0	D ₂₂	48.74 N-m
B ₁₂	0	D ₂₆	0
B ₁₆	-745.82 N	D ₆₆	40.14 N-m

표 4. $[\alpha\beta\beta\gamma\alpha\alpha\beta]_r$ 형태의 적층판에 대한 강성 값
 $\alpha = -\beta = 30^\circ, \gamma = 0^\circ, r = 5, h_0 = 0.000125 \text{ m}$

강성종류	강성 값	강성종류	강성 값
A ₁₁	123,776,534 N/m	B ₂₂	0
A ₁₂	28,273,205 N/m	B ₂₆	0
A ₁₆	0	B ₆₆	0
A ₂₂	46,837,302 N/m	D ₁₁	196.934 N-m
A ₂₆	0	D ₁₂	45.292 N-m
A ₆₆	36,840,343 N/m	D ₁₆	0
B ₁₁	0	D ₂₂	74.813 N-m
B ₁₂	0	D ₂₆	0
B ₁₆	0	D ₆₆	58.957 N-m

표 5. $[\alpha\beta\beta\gamma\alpha\alpha\beta]_r$ 형태의 적층판에 대한 강성 값
 $\alpha = -\beta = 30^\circ, \gamma = 90^\circ, r = 5, h_0 = 0.000125 \text{ m}$

강성종류	강성 값	강성종류	강성 값
A ₁₁	104,541,725 N/m	B ₂₂	0
A ₁₂	28,273,205 N/m	B ₂₆	0
A ₁₆	-0.05656 N/m	B ₆₆	0
A ₂₂	66,072,111 N/m	D ₁₁	167.456 N-m
A ₂₆	-0.78422 N/m	D ₁₂	45.292 N-m
A ₆₆	36,840,343 N/m	D ₁₆	0
B ₁₁	0	D ₂₂	104.292 N-m
B ₁₂	0	D ₂₆	0
B ₁₆	0	D ₆₆	58.957 N-m

$A^* = A/h$ GPa, $B^* = 2B/h^2$ GPa, $D^* = 12D/h^3$ GPa로 정규화 하였고 이때 A_{11}^*/D_{11}^* , B_{16}^*/D_{11}^* , B_{26}^*/D_{11}^* 의 값을 $[\alpha\beta]_r$ 에 대해 표 6에, $[\alpha\beta\beta\alpha\alpha\beta]_r$ 에 대해 표 7에 그리고 $[\alpha\beta\beta\gamma\alpha\alpha\beta]_r$ 에 대해 표 8과 표 9에 각각 나타내었다.

표 6. 각도 변화에 따른 $[\alpha\beta]_r$ 형태의 적층판에 대한 $(A_{11}^*, B_{16}^*, B_{26}^*)/D_{11}^*$ 의 값 $\alpha = -\beta, r = 20$

Angle(α)	0°	15°	30°	45°
A_{11}^*/D_{11}^*	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
B_{16}^*/D_{11}^*	0.00000	-0.00475	-0.00901	-0.01124
B_{26}^*/D_{11}^*	0.00000	-0.00068	-0.00357	-0.01124
Angle(α)	60°	75°	90°	
A_{11}^*/D_{11}^*	1.00000	1.00000	1.00000	
B_{16}^*/D_{11}^*	-0.00852	-0.00274	0.00000	
B_{26}^*/D_{11}^*	-0.02152	-0.01915	0.00000	

표 7. 각도 변화에 따른 $[\alpha\beta\beta\alpha\alpha\beta]_r$ 형태의 적층판에 대한 $(A_{11}^*, B_{16}^*, B_{26}^*)/D_{11}^*$ 의 값 $\alpha = -\beta, r = 5$

Angle(α)	0°	15°	30°	45°
A_{11}^*/D_{11}^*	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
B_{16}^*/D_{11}^*	0.00000	-0.00211	0.00401	0.00499
B_{26}^*/D_{11}^*	0.00000	0.00030	0.00159	0.00499
Angle(α)	60°	75°	90°	
A_{11}^*/D_{11}^*	1.00000	1.00000	1.00000	
B_{16}^*/D_{11}^*	0.00379	0.00122	0.00000	
B_{26}^*/D_{11}^*	0.00956	0.00851	0.00000	

표 8. 각도 변화에 따른 $[\alpha\beta\beta\gamma\alpha\alpha\beta]_r$ 형태의 적층판에 대한 $(A_{11}^*, B_{16}^*, B_{26}^*)/D_{11}^*$ 의 값 $\alpha = -\beta, \gamma = 0^\circ, r = 5$

Angle(α)	0°	15°	30°	45°
A_{11}^*/D_{11}^*	1.00000	1.00058	1.00252	1.00613
B_{16}^*/D_{11}^*	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
B_{26}^*/D_{11}^*	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
Angle(α)	60°	75°	90°	
A_{11}^*/D_{11}^*	1.01052	1.01312	1.01366	
B_{16}^*/D_{11}^*	0.00000	0.00000	0.00000	
B_{26}^*/D_{11}^*	0.00000	0.00000	0.00000	

표 9. 각도 변화에 따른 $[\alpha\beta\beta\gamma\alpha\alpha\beta]_r$ 형태의 적층판에 대한 $(A_{11}^*, B_{16}^*, B_{26}^*)/D_{11}^*$ 의 값 $\alpha = -\beta, \gamma = 90^\circ, r = 5$

Angle(α)	0°	15°	30°	45°
A_{11}^*/D_{11}^*	0.99507	0.99523	0.99578	0.99693
B_{16}^*/D_{11}^*	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
B_{26}^*/D_{11}^*	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
Angle(α)	60°	75°	90°	
A_{11}^*/D_{11}^*	0.99859	0.99975	1.00000	
B_{16}^*/D_{11}^*	0.00000	0.00000	0.00000	
B_{26}^*/D_{11}^*	0.00000	0.00000	0.00000	

위의 표에서 $A_{11}^*/D_{11}^* = 1$ 은 적층판이 유사등방성(quasi-isotropic)이라는 것을 나타내며 이것은 고전 방정식과 이론을 이러한 적층판에 적용할 수 있다는 것을 의미한다. 표 6, 7, 8, 9로부터 $r=5$ 일 때 이미 연계항의 값이 무시할 만큼 작았고 r 이 증가함에 따라 훨씬 더 감소한다는 것을 알 수 있다. 따라서 제시한 적층판들에 대해 특별직교이방성 판의 방정식을 사용하여 매우 정확한 결과를 얻을 수 있다.

5. 수치 예

진동해석의 예로 $[\alpha\beta\beta\alpha\alpha\beta]_r$ 형태의 적층판을 고려하였고

모든 ply에 대해 재료의 물성치는 앞절과 동일하게 다음 값을 사용하였다.

$$E_1 = 38.6 \text{ GPa}, \quad E_2 = 8.27 \text{ GPa}, \quad \nu_{12} = 0.26, \\ \nu_{21} = 0.0557, \quad G_{12} = 4.14 \text{ GPa}, \quad h_0 = 0.000125 \text{ m} \\ a=b=1 \text{ m}.$$

제시한 방법의 정확도는 오직 영향계수의 정확도에 민감하게 의존하므로 특별직교이방성 판에 대한 방정식을 이용하여 고유진동수를 계산하는데 $r=5$ 인 경우가 이미 충분히 정확하였다.

따라서 $r=5$ 인 경우를 예로서 사용하였고 mesh 수에 따른 수렴정도는 그림 2에 나타내었다.

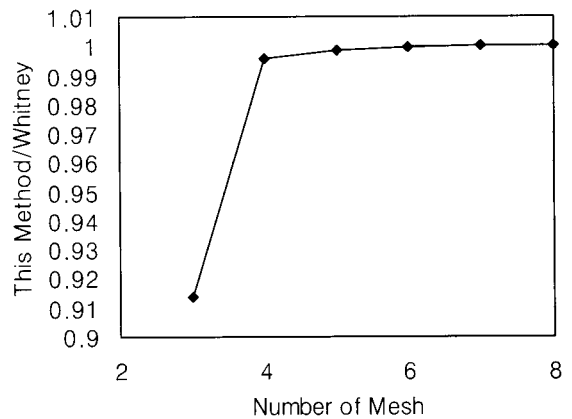


그림 2. mesh 수에 따른 고유진동수 수렴 정도

Whitney가 제시한 방법으로 계산한 값과 비교하였을 때 6×6 mesh로 분할하여 계산한 값이 99.96% 일치하였다. 따라서 판을 동등한 거리로 분할하여 mesh를 6×6 으로 하였고 36개의 똑같은 량, $1/6 \times 1/6 \times \rho h(q_0/g)$ 의 질량이 각 mesh의 중앙에 작용하도록 하였다. 여기서 ρ, h 그리고 g 는 각각 밀도, 판의 두께 그리고 중력가속도이다. 균등한 두께를 가진 판에 일정한 수직방향 하중 q_0 가 작용하는 것으로 가정하였다. 만약 하중이 일정하지 않다면 (i,j) 점에서 실제 질량 $m(i,j)$ 을 사용할 수 있다. 첫 번째 모드에 대해 처음 가정한 모드 형태는 아래와 같다.

$$W(i,j)^{(1)} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 & 30 & 20 & 10 \\ 20 & 30 & 40 & 40 & 30 & 20 \\ 30 & 40 & 50 & 50 & 40 & 30 \\ 30 & 40 & 50 & 50 & 40 & 30 \\ 20 & 30 & 40 & 40 & 30 & 20 \\ 10 & 20 & 30 & 30 & 20 & 10 \end{pmatrix}$$

식 (17)에 의해 영향계수를 계산한 후 제시한 방법으로 해

석하면 다음 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \omega(i,j)^{(1)} &= (30.294 \sim 49.251) / \sqrt{m(i,j)} \\ &= (181.766 \sim 295.506) / \sqrt{\rho h} \\ \omega(i,j)^{(2)} &= (32.264 \sim 33.079) / \sqrt{m(i,j)} \\ &= (193.584 \sim 198.471) / \sqrt{\rho h} \\ \omega(i,j)^{(3)} &= (32.399 \sim 732.440) / \sqrt{m(i,j)} \\ &= (194.392 \sim 194.637) / \sqrt{\rho h} \end{aligned}$$

위의 결과로부터 고유진동수 $\omega(i,j) = \omega(i,j)^{(3)}$
 $= (194.392 \sim 194.637) / \sqrt{\rho h}$ 이라는 것을 알 수 있다.
 Whitney가 제시한 에너지 방법으로 계산한 결과는
 $\omega = 194.579 / \sqrt{\rho h}$ 이다. 만약 에너지 방법에 의한 결과가
 실제 값에 비해 결코 작지 않다는 점을 고려하면 본 논문에서
 제시한 방법은 진동해석에 매우 효과적이다.

$\alpha = 30^\circ$, $\beta = -30^\circ$ 그리고 $r = 20$ 일 때, 축방향 하중
 P_1 과 P_2 를 받는 $[\alpha\beta]_r$ 형태의 적층판에 대한 진동해석 결과
 를 표 10에 나타내었다.

표 10. $[\alpha\beta]_r$ 형태의 적층판에 대한 고유진동수($\omega_n / \sqrt{\rho h}$)
 ($\alpha = -\beta = 30^\circ$, $r = 20$, $a = b = 1$ m)

P_2/D_{11} \ P_1/D_{11}	-5	-4	-3	-2	-1	0
-5	249.9	255.3	260.6	265.7	270.8	275.8
-4	255.3	260.6	265.7	270.8	275.8	280.7
-3	260.6	265.7	270.8	275.8	280.7	285.4
-2	265.7	270.8	275.8	280.7	285.4	290.2
-1	270.8	275.8	280.7	285.4	290.2	294.8
0	275.8	280.7	285.4	290.2	294.8	299.4
1	280.7	285.4	290.2	294.8	299.4	303.9
2	285.4	290.2	294.8	299.4	303.9	308.3
3	290.2	294.8	299.4	303.9	308.3	312.7
4	294.8	299.4	303.9	308.3	312.7	317.0
5	299.4	303.9	308.3	312.7	317.0	321.2

P_2/D_{11} \ P_1/D_{11}	1	2	3	4	5
-5	280.7	285.4	290.2	294.8	299.4
-4	285.4	290.2	294.8	299.4	303.9
-3	290.2	294.8	299.4	303.9	308.3
-2	294.8	299.4	303.9	308.3	312.7
-1	299.4	303.9	308.3	312.7	317.0
0	303.9	308.3	312.7	317.0	321.2
1	308.3	312.7	317.0	321.2	325.4
2	312.7	317.0	321.2	325.4	329.6
3	317.0	321.2	325.4	329.6	333.7
4	321.2	325.4	329.6	333.7	337.7
5	325.4	329.6	333.7	337.7	341.7

$\alpha = 30^\circ$, $\beta = -30^\circ$ 그리고 $r = 5$ 일 때, 다양한 값의 축
 방향 하중 P_1 과 P_2 를 받는 $[\alpha\beta\alpha\alpha\beta]_r$ 형태의 적층판에
 대한 진동해석 결과를 표 11과 그림 3에 나타내었다.

표 10 ~ 13을 그래프로 표기하였을 때 유사한 경향을 나
 타내어 대표적으로 표 11을 그림 3에 나타내었다. 그 결과
 축방향 압축력이 증가할수록 고유진동수는 감소하였고 축방
 향 인장력이 증가할수록 고유진동수가 증가하였다. 또한 축방
 향력이 증가함에 따라 고유진동수가 선형으로 변화함을 알
 수 있다.

표 11. $[\alpha\beta\alpha\alpha\beta]_r$ 형태의 적층판에 대한 고유진동수($\omega_n / \sqrt{\rho h}$)
 ($\alpha = -\beta = 30^\circ$, $r = 5$, $a = b = 1$ m)

P_2/D_{11} \ P_1/D_{11}	-5	-4	-3	-2	-1	0
-5	162.3	165.8	169.3	172.6	175.9	179.1
-4	165.8	169.3	172.6	175.9	179.1	182.3
-3	169.3	172.6	175.9	179.1	182.3	185.4
-2	172.6	175.9	179.1	182.3	185.4	188.5
-1	175.9	179.1	182.3	185.4	188.5	191.5
0	179.1	182.3	185.4	188.5	191.5	194.5
1	182.3	185.4	188.5	191.5	194.5	197.4
2	185.4	188.5	191.5	194.5	197.4	200.3
3	188.5	191.5	194.5	197.4	200.3	203.1
4	191.5	194.5	197.4	200.3	203.1	205.9
5	194.5	197.4	200.3	203.1	205.9	208.7

P_2/D_{11} \ P_1/D_{11}	1	2	3	4	5
-5	182.3	185.4	188.5	191.5	194.5
-4	185.4	188.5	191.5	194.5	197.4
-3	188.5	191.5	194.5	197.4	200.3
-2	191.5	194.5	197.4	200.3	203.1
-1	194.5	197.4	200.3	203.1	205.9
0	197.4	200.3	203.1	205.9	208.7
1	200.3	203.1	205.9	208.7	211.4
2	203.1	205.9	208.7	211.4	214.1
3	205.9	208.7	211.4	214.1	216.7
4	208.7	211.4	214.1	216.7	219.3
5	211.4	214.1	216.7	219.3	221.9

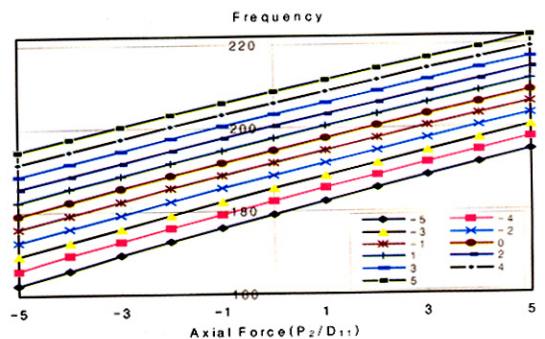


그림 3. 축방향력에 따른 고유진동수

$\alpha = 30^\circ$, $\beta = -30^\circ$, $\gamma = 0^\circ$ 그리고 $r=5$ 일 때, 축방향 하중 P_1 과 P_2 를 받는 $[\alpha\beta\beta\gamma\alpha\alpha\beta]_r$ 형태의 적층판에 대한 진동해석 결과를 표 12에 나타내었다.

표 12. $[\alpha\beta\beta\gamma\alpha\alpha\beta]_r$ 형태의 적층판에 대한 고유진동수($\omega_n/\sqrt{\rho h}$)
($\alpha = -\beta = 30^\circ$, $\gamma = 0^\circ$, $r = 5$, $a=b=1$ m)

P_1/D_{11} \ P_2/D_{11}	-5	-4	-3	-2	-1	0
-5	197.0	201.8	206.6	211.2	215.8	220.2
-4	201.8	206.6	211.2	215.8	220.2	224.6
-3	206.6	211.2	215.8	220.2	224.6	228.8
-2	211.2	215.8	220.2	224.6	228.8	233.0
-1	215.8	220.2	224.6	228.8	233.0	237.2
0	220.2	224.6	228.8	233.0	237.2	241.2
1	224.6	228.8	233.0	237.2	241.2	245.2
2	228.8	233.0	237.2	241.2	245.2	249.1
3	233.0	237.2	241.2	245.2	249.1	253.0
4	237.2	241.2	245.2	249.1	253.0	256.8
5	241.2	245.2	249.1	253.0	256.8	260.5

P_1/D_{11} \ P_2/D_{11}	1	2	3	4	5
-5	224.6	228.8	233.0	237.2	241.2
-4	228.8	233.0	237.2	241.2	245.2
-3	233.0	237.2	241.2	245.2	249.1
-2	237.2	241.2	245.2	249.1	253.0
-1	241.2	245.2	249.1	253.0	256.8
0	245.2	249.1	253.0	256.8	260.5
1	249.1	253.0	256.8	260.5	264.2
2	253.0	256.8	260.5	264.2	267.9
3	256.8	260.5	264.2	267.9	271.4
4	260.5	264.2	267.9	271.4	275.0
5	264.2	267.9	271.4	275.0	278.5

표 13-b. $[\alpha\beta\beta\gamma\alpha\alpha\beta]_r$ 형태의 적층판에 대한
고유진동수($\omega_n/\sqrt{\rho h}$)

($\alpha = -\beta = 30^\circ$, $\gamma = 0^\circ$, $r = 5$, $a=b=1$ m)

P_1/D_{11} \ P_2/D_{11}	1	2	3	4	5
-5	227.2	230.8	234.3	237.8	241.2
-4	230.8	234.3	237.8	241.2	244.6
-3	234.3	237.8	241.2	244.6	248.0
-2	237.8	241.2	244.6	248.0	251.3
-1	241.2	244.6	248.0	251.3	254.5
0	244.6	248.0	251.3	254.5	257.7
1	248.0	251.3	254.5	257.7	260.9
2	251.3	254.5	257.7	260.9	264.1
3	254.5	257.7	260.9	264.1	267.2
4	257.7	260.9	264.1	267.2	270.2
5	260.9	264.1	267.2	270.2	273.3

$\alpha = 30^\circ$, $\beta = -30^\circ$, $\gamma = 90^\circ$ 그리고 $r=5$ 일 때, 축방향 하중 P_1 과 P_2 를 받는 $[\alpha\beta\beta\gamma\alpha\alpha\beta]_r$ 형태의 적층판에 대한 진동해석 결과를 표 13에 나타내었다.

6. 결론

본 논문에서는 매우 정확하고 간편하게 고유진동수를 계산하는 방법을 구체적인 예와 함께 제시하였다. 특별직교이방성 적층판에 적용되는 방법으로 해석할 수 있는 $[\alpha\beta]_r$, $[\alpha\beta\beta\alpha\alpha\beta]_r$, $[\alpha\beta\beta\gamma\alpha\alpha\beta]_r$ 형태의 적층판들을 제시하였으며 이들이 유사균질성을 나타내고 적층수가 증가함에 따라 횡-전단연계강성(B_{16})와 인장-비틀림연계강성(B_{26})이 감소함을 알 수 있었다. 또한 이러한 적층판에 축방향 하중이 작용할 때 진동해석 결과를 제시하였다. 일반적으로 판에 작용하는 하중은 판에 수직하거나 축방향이거나 이들의 조합일 수 있다. 본 연구에서 제시한 방법은 구조물의 해석과 설계 초기 단계에서 이미 사용되는 처짐에 대한 영향계수를 이용하여 쉽게 문제들을 해결할 수 있다.

축방향 하중을 받는 사변단순지지된 복합적층판의 진동해석을 위해 본 해석방법을 적용하여 간편하게 매우 정확한 결과를 얻을 수 있었다.

참고 문헌

원치문(2002) 다양한 경계조건을 갖는 복합적층판의 간편한 고유진동수 해석방법, 한국강구조학회 논문집, 제14권, 1호, pp. 23-29.
Kim, D. H.(1974) A method of vibration analysis of

표 13-a. $[\alpha\beta\beta\gamma\alpha\alpha\beta]_r$ 형태의 적층판에 대한 고유진동수($\omega_n/\sqrt{\rho h}$)
($\alpha = -\beta = 30^\circ$, $\gamma = 0^\circ$, $r = 5$, $a=b=1$ m)

P_1/D_{11} \ P_2/D_{11}	-5	-4	-3	-2	-1	0
-5	204.2	208.2	212.1	216.0	219.8	223.5
-4	208.2	212.1	216.0	219.8	223.5	227.2
-3	212.1	216.0	219.8	223.5	227.2	230.8
-2	216.0	219.8	223.5	227.2	230.8	234.3
-1	219.8	223.5	227.2	230.8	234.3	237.8
0	223.5	227.2	230.8	234.3	237.8	241.2
1	227.2	230.8	234.3	237.8	241.2	244.6
2	230.8	234.3	237.8	241.2	244.6	248.0
3	234.3	237.8	241.2	244.6	248.0	251.3
4	237.8	241.2	244.6	248.0	251.3	254.5
5	241.2	244.6	248.0	251.3	254.5	257.7

- irregularly shaped structural elements, *International Symposium on Engineering Problems in Creating Coastal Industrial Sites*, Seoul, Korea, pp. 39-63.
- Kim, D. H., Hwang, J. W., Chun, D. S.(1989) A simple method of vibration analysis of irregularly shaped composite structural elements, *1st Japan Int'l SAMPE Symposium*, Nov.28-Dec.1, pp. 863-68.
- Kim, D. H., Hwang, J. W., Chun, D. S.(1990) Vibration analysis of irregularly shaped composite structural members-for higher modes, *8th Structural Congress, American Society of Civil Engineers*, Baltimore, MD, U.S.A., Apr.30-Mar.3, pp. 63-4.
- Kim, D. H.(1991) Vibration analysis of irregularly shaped laminated thick composite plates, *ICCM 8*, Honolulu, Hawaii, July, pp. 30-J.
- Kim, D. H., Park, J. S., Kim, K. J.(1991) Vibration analysis of irregularly shaped laminate thick composite plate II, *2nd Japan International SAMPE Symposium and Exhibition*, Dec., pp. 1310-17.
- Kim, D. H.(1995) *Composite structures for civil and architectural engineering*, Published by E&FN SPON, Chapman & Hall, London.
- Whitney, J.E., Leissa, A.W.(1969) Analysis of heterogeneous anisotropic plates, *J. Appl. Mech.* Am. Soc. Mech. Engrs, 28, June, pp. 261-266.
- (접수일자 : 2005. 10. 15 / 심사일 2005. 11. 1 / 심사완료일 2006. 2. 10)