

# 다양한 케이블 요소를 이용한 강사장교의 극한강도 평가

Evaluation of Limit Strength for Steel Cable-Stayed Bridges  
using Various Cable Elements

송 원 근\*

이 종 우\*\*

Song, Weon-Keun Rhee, Jong Woo

## Abstract

This paper deals with the influence of behavior of a variety of cable elements on the limit strength of steel cable-stayed bridges. The softening plastic-hinge model, which is represented in this study for the limit strength evaluation of the example bridge, considers both geometric and material nonlinearities. Geometric nonlinearity of beam-column members are accounted by using stability function, and material nonlinearity - by using CRC tangent modulus and parabolic function. Cable sag effect is considered for cable members. The result of this study shows that the limit strength of the example bridge using the equivalent of elasticity for truss straight elements is smaller than those using the cable or the catenary elements.

## 요 지

본 논문에서는 다양한 형태의 케이블 요소들의 거동이 강사장교의 극한강도에 미치는 영향을 검토하였다. 연화소성힌지 모델을 사용한 극한강도 평가 시 보-기둥 부재의 기하학적 비선형은 안정함수를 사용하여 고려하였고 재료적 비선형성을 반영하기 위하여 CRC 접선계수와 포물선 함수를 사용하였다. 케이블 부재는 새그의 영향이 고려되었다. 연구 결과 등가탄성계수가 반영된 등가트러스 요소를 사용한 경우 강사장교의 극한강도가 케이블 요소 또는 현수선 요소를 사용하여 평가한 극한강도 보다 안전측으로 평가되었다.

**Keywords :** Steel cable-stayed bridge, Various cable elements, Limit strength

**핵심 용어 :** 강사장교, 다양한 케이블 요소, 극한강도

\* 정희원, 한국시설안전기술공단 과장, 공학박사

\*\* 정희원, 한국시설안전기술공단 차장, 공학박사

E-mail : song98@kistec.or.kr 031-910-4128

• 본 논문에 대한 토의를 2006년 10월 31일까지 학회로 보내 주시면 2007년 1월호에 토론결과를 게재하겠습니다.

## 1. 서 론

지금까지 강사장교의 극한강도 평가에 관한 연구는 Nazmy와 Abdel-Ghaffar(1990), Ermopoulos 등 (1992) 및 Wang 과 Yang(1996) 등에 의하여 수행되었다. 그러나 이들의 연구에서는 강사장교의 강도와 안정성을 평가하기 위해서 비선형 탄성범위 내에서 해석을 수행하였다. 이와 같은 한계를 극복하기 위해 본 연구에서는 다양한 형태의 케이블 요소들이 적용된 Fan-type 강사장교의 극한강도 평가결과를 분석하기 위해 강사장교에 대한 초기형상해석을 수행하고, 결정된 케이블 장력(initial cable tensions)과 초기형상(initial shape)을 고려하는 비선형 비탄성 해석을 수행하였다.

연화소성힌지 모델을 사용한 비선형 비탄성 해석시 보-기둥 부재의 재료적 비선형성은 CRC 접선계수와 포물선 함수를 사용하여 고려하였다. 보-기둥 부재의 기하학적 비선형을 고려하기 위하여 안정함수를 사용하였으며, 케이블 새그 비선형을 고려하기 위하여 등가트러스 요소의 등가탄성계수, 케이블 요소 및 현수선 요소의 접선강도행렬을 사용하여 비선형 해석을 수행하였다. 이때 케이블 부재의 거동은 탄성 영역내에서 유효하다고 가정하였다. 또한, 대변위 효과를 고려하기 위하여 비선형 반복 단계마다 강도행렬을 재구성하였다.

## 2. 비선형 해석

### 2.1 보-기둥 부재의 비선형성

본 연구에서는 보-기둥 부재의 기하학적 비선형성을 고려하기 위하여 안정함수를 사용하였으며(Kim과 Chen, 1996(a); Kim과 Chen, 1996(b)). 보-기둥 부재의 재료적 비선형성을 고려하기 위하여 CRC 접선계수와 연화소성힌지(softening plastic hinge)를 사용하였다. 접선계수는 식(1)과 같이 축방향력의 함수로 나타낼 수 있다.

$$P \leq 0.5P_y : E_t = 1.0E \quad (1a)$$

$$P > 0.5P_y : E_t = 4 \frac{P}{P_y} \left(1 - \frac{P}{P_y}\right)E \quad (1b)$$

여기서,  $E$ 는 탄성계수,  $E_t$ 는 접선계수,  $P$ 는 축력을,  $P_y$ 는 축방향 항복력을 의미한다. 연화소성힌지는 포물선함수 식(2)로 나타낼 수 있다.

$$\alpha \leq 0.5 : \eta = 1 \quad (2a)$$

$$\alpha > 0.5 : \eta = 4\alpha(1-\alpha) \quad (2b)$$

여기서,  $\alpha$ 는 단면에 작용하는 부재력의 크기를 나타내는 함수로서 AISC-LRFD (2001)의 완전 소성면을 활용하여 다음과 같이 각각 나타낼 수 있다.

$$\frac{P}{P_y} \geq \frac{2}{9} \frac{M}{M_p} : \alpha = \frac{P}{P_y} + \frac{8}{9} \frac{M}{M_p} \quad (3a)$$

$$\frac{P}{P_y} < \frac{2}{9} \frac{M}{M_p} : \alpha = \frac{P}{2P_y} + \frac{M}{M_p} \quad (3b)$$

여기서,  $M$ 은 모멘트를,  $M_p$ 는 소성모멘트를 의미한다.

### 2.2 케이블 부재의 비선형성

케이블 새그로 인한 기하학적 비선형성을 고려하기 위하여 등가탄성계수를 적용한 등가트러스 요소와 케이블 요소 및 현수선 요소의 접선강도행렬의 재구성이 가능한 비선형 수치해석 알고리즘을 사용하였다.

#### 2.2.1 등가트러스 요소

경사진 케이블의 새그로 인한 비선형성을 고려하기 위해서는 등가탄성계수를 갖는 등가직선트러스 요소를 사용하는 것이 적절하다. 등가탄성계수 개념은 Ernst (1965)에 의하여 처음 소개되었다. 등가탄성계수는 재하 전에 케이블에 도입되는 최초의 장력만을 고려하는 접선탄성계수(Flenig, 1979)와 최초의 장력과 하중 재하 후 변화하는 장력을 함께 고려하는 활선탄성계수(Gimsing, 1983)로 분류된다. 접선탄성계수식

과 할선탄성계수식은 각각 식(4) 및 식(5)와 같다.

$$E_{eq} = E_{c,t} = \frac{E_c}{1 + \frac{(w_c l_c)^2}{12(T_c^b)^3} E_c A_c} \quad (4)$$

$$E_{eq} = E_s = \frac{E_c}{1 + \frac{(w_c l_c)^2 (T_c^b + T_c^a)}{24(T_c^b)^2 (T_c^a)^2} E_c A_c} \quad (5)$$

여기서,  $E_{eq}$ 는 케이블의 등가탄성계수,  $E_{c,t}$ 는 케이블의 접선(Tangent)탄성계수,  $E_s$ 는 케이블의 할선(Secant)탄성계수,  $E_c$ 는 케이블의 탄성계수,  $A_c$ 는 케이블 단면적,  $w_c$ 는 케이블 단위길이당 자중,  $l_c$ 는 케이블 수평 투영길이,  $T_c^b$ 는 하중재하 전 케이블 장력,  $T_c^a$ 는 하중재하 후 케이블 장력을 의미한다.

본 논문에서는 케이블 부재의 새그(sag)로 인한 비선형성을 고려하기 위하여 할선탄성계수와 접선탄성계수를 모두 사용하여 그 결과를 비교·평가하였다. 이때 부재당 1개의 요소를 사용하는 2절점 등가트러스 요소를 적용하여 강도행렬을 구성하였다.

### 2.2.2 케이블 요소

케이블 부재의 해석에 기하학적 비선형성을 반영하기 위하여 절점당 2개의 자유도를 갖는 케이블 요소에 대한 절점강도행렬을 potential energy method를 이용하여 식(6)과 같이 나타낼 수 있다.(Smith, 1999)

$$K_T = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial U_1} & \frac{\partial F_1}{\partial U_2} & \frac{\partial F_1}{\partial U_3} & \frac{\partial F_1}{\partial U_4} \\ \frac{\partial F_2}{\partial U_1} & \frac{\partial F_2}{\partial U_2} & \frac{\partial F_2}{\partial U_3} & \frac{\partial F_2}{\partial U_4} \\ \frac{\partial F_3}{\partial U_1} & \frac{\partial F_3}{\partial U_2} & \frac{\partial F_3}{\partial U_3} & \frac{\partial F_3}{\partial U_4} \\ \frac{\partial F_4}{\partial U_1} & \frac{\partial F_4}{\partial U_2} & \frac{\partial F_4}{\partial U_3} & \frac{\partial F_4}{\partial U_4} \end{pmatrix} \quad (6)$$

식(6)의  $\frac{\partial F_i}{\partial U_j}$ 는 index notation을 이용하여 식(7)과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial F_i}{\partial U_j} = \frac{E_c A_c}{l_c^b} \left[ \left( \frac{l_c^i}{l_c^a} \right)^2 (1 - \Delta) + \Delta \right], \quad i = j, \quad i, j = 1, 2 \quad (7a)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial U_j} = \frac{E_c A_c}{l_c^b} \left[ \left( \frac{l_c^i}{l_c^a} \right) \left( \frac{l_c^j}{l_c^a} \right) (1 - \Delta) \right], \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2 \quad (7b)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial U_j} = \frac{\partial F_{i+2}}{\partial U_{j+2}} = -\frac{\partial F_{i+2}}{\partial U_j} = -\frac{\partial F_i}{\partial U_{j+2}} \quad (7c)$$

$$\Delta = \frac{l_c^a - l_c^b}{l_c^a} \quad (7d)$$

여기서,  $l_c^b$ 는 변형 전 케이블 길이,  $l_c^a$ 는 변형 후 케이블 길이 그리고  $l_c^i$ 는 변형 후 케이블의  $i$ -방향 투영길이를 나타낸다.

또한, 식(6)과 식(7)의 위첨자 1 및 2는 전체좌표계에서의 X 및 Y 좌표를 의미한다.

### 2.3 현수선 요소

2차원 직각좌표상에 놓여 있는 현수선 요소에 대하여 임의 지점에서 케이블 장력 ( $T_c$ )과 각 방향 분력 성분과의 관계를 규정하는 평형방정식을 정의한 후 Hooke의 법칙을 사용하여 직각좌표계와 Lagrangian 좌표계의 대응식을 구성할 수 있다. 이때 경계조건식을 고려하면 현수선 요소의 적합방정식이 유도되며 요소의 상대 변위( $l_c^1, l_c^2$ )의 변화량과 절점력( $F_c^1, F_c^2$ )의 변화량과의 관계는 양변을 미분하여 얻을 수 있다. 이를 절점에 대해 행렬형태로 표현하면 식(8)과 같다.

$$\begin{Bmatrix} dl_c^1 \\ dl_c^2 \end{Bmatrix} = F \begin{Bmatrix} dF_c^1 \\ dF_c^2 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

여기서 절점( $n, m$ )의 상대변위 변화량과 절점력 변화량과의 관련성을 정의하는 유연도행렬은 식(9)와 같다. 따라서 강도행렬은 유연도행렬의 역행렬 식(11)이 되며 절점강도행렬은 변환행렬을 사용하여 식(12)와 같이 절점에서 2개의 자유도를 갖도록 정의할 수 있다.

$$[F] = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \quad (9)$$

여기서,

$$f_{11} = \frac{l_c^b}{E_c A_c} + \frac{(F_c^1)^2}{w_c H_c} \left( \frac{-F_c^2}{T_c^n} + \frac{F_c^2 - w_c l_c^b}{T_c^m} \right) + \frac{1}{w_c} \left[ \sinh^{-1} \left( \frac{F_c^2}{H_c} \right) - \sinh^{-1} \left( \frac{F_c^2 - w_c l_c^b}{H_c} \right) \right] \quad (10a)$$

$$f_{12} = \frac{F_c^2}{w_c} \left( \frac{1}{T_c^n} - \frac{1}{T_c^m} \right) \quad (10b)$$

$$f_{21} = f_{12} \quad (10c)$$

$$f_{22} = \frac{l_c^o}{E_c A_c} + \frac{1}{w_c} \left( \frac{F_c^2}{T_c^n} - \frac{F_c^2 - w_c l_c^o}{T_c^m} \right) \quad (10d)$$

$$[K] = [F]^{-1} \quad (11)$$

$$K_T = [a]^T [K] [a] \quad (12)$$

여기서,  $[a]$ 는 변환행렬로 다음과 같다.

$$[a] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

## 2.4 비선형 해석 절차

본 논문에서는 비선형 수치해석 기법으로 각 단계별로 증분하중을 작용시키며 증분하중에 해당하는 증분변위를 구하기 위하여 직접반복법(Direct Iteration)을 사용하였다. 따라서 각 단계별로 부재 강도행렬을 재구성하게 된다. 비선형 비탄성 해석을 수행하기 전에 강사장교의 초기형상 해석을 수행한다. 첫 번째 단계(NSI=1: number of shape iteration)는 변형 전 형상으로부터 사하중 하에서 초기형상 해석을 위한 비선형 수치해석을 수행한다. 이 단계에서는 케이블의 장력이 도입되지 않는다. 두 번째 단계(NSI=2)에서는 첫 번째 단계에서 얻어진 케이블 장력과 변위, 즉 구조물형상(updated structural configuration)을

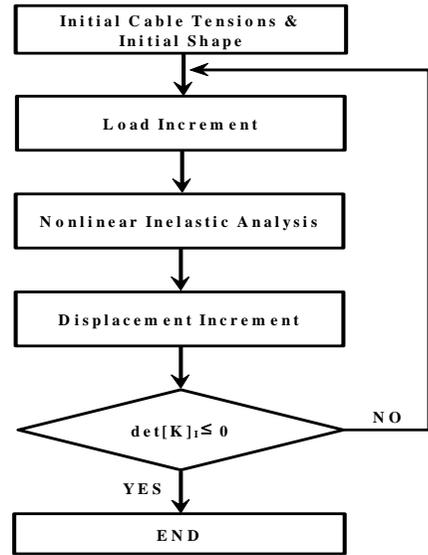


Fig. 1 비선형 비탄성 해석절차

고려하여 비선형 수치해석을 수행한다. 구조물형상이란 변형 전 형상을 기준으로 발생한 변위에 대해 절대값이 같고 부호가 반대인 변위 값에 의해 형성된 구조물의 변형 형상으로 수치해석의 형상해석 각 단계의 초기 값으로 사용된다. 이와 같이 초기형상 해석을 위한 수치해석 단계를 거치면서 모든 절점 변위 값의 합이 허용치를 만족하면 초기형상 해석을 종료한다. 이때, 종료조건 판단의 기준 좌표는 변형 전 형상의 절점좌표이다.

강사장교의 초기형상해석 후 극한강도를 평가하기 위하여 비선형 비탄성 해석을 수행하여야 하며 그 절차는 Fig. 1과 같다.

## 3. 사장교 해석치 검증

### 3.1 Fan-type 사장교 예제 검증

본 절에서는 Fig. 2의 Fan-type 강사장교에 대하여 ABAQUS를 사용하여 예제 검증을 수행하였다. 이때 케이블은 Secant value를 반영한 등가트러스 요소를 사용하였으며 단면상수 및 물성치는 Table 1과 같다.

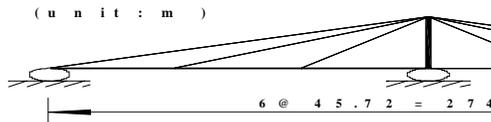


Fig. 2 Fan-type 사장교의 FE 모델

Table 1 2차원 Fan-type 사장교의 단면상수 및 물성치

Member	$E, E_c$	$A, A_c$	$I$	$A_s$	$w, w_c$	$F_y$	$F_u$
	GPa	m <sup>2</sup>	m <sup>4</sup>	m <sup>2</sup>	kN/m	MPa	MPa
Girder (6.0×0.6×0.05)	207.0	0.650	2.243	0.600	87.5	248	-
Pylon① (4.0×0.5×0.03)	207.0	0.269	0.432	0.240	-	248	-
Pylon② (3.7×0.5×0.03)	207.0	0.228	0.345	0.222	-	248	-
Pylon③ (3.1×0.5×0.03)	207.0	0.203	0.211	0.186	-	248	-
Exterior Cable ( $\phi$ 0.1)	158.6	0.00785	-	-	0.475	1,103	1,517
Interior Cable ( $\phi$ 0.1)	158.6	0.00785	-	-	0.475	1,103	1,517

초기형상해석에 사용된 사하중은 강사장교의 자중과 주형에 상재되는 사하중을 고려하여 각 절점에 재하하였다. SOD가 0.1 m 보다 같거나 작을 경우 초기형상 해석을 종료하였으며 NSI=4일 때 초기형상을 얻을 수 있었다. 보-기둥 부재(주탑, 보강형)의 응력-변형률 관계는 탄성-완전소성으로 가정한다. 케이블의 응력-변형률 관계는 탄성 영역 내에서 유효하다고 가정한다. 비선형 비탄성 해석에 사용한 하중은 AASHTO-LRFD(1998)에서 규정하고 있는 사하중, 활하중, 충격 하중만을 고려하였으며, 사하중은 강사장교의 자중과 주형에 상재되는 사하중을, 활하중은 영향선을 고려하여 각 절점에 재하하였다. 하중계수로는 사하중 1.25, 활하중 1.75, 충격계수 0.33을 사용하였다. ABAQUS를 사용한 극한강도 해석 시 기하강성도행렬을 사용하여 기하학적 비선형을 섬유보요소법을 적용하여 재료비선형을 반영하였다. Fig. 3에서 살펴볼 수 있듯이 보강형 중앙에서의 하중-변위 곡선은 ABAQUS 기준으로 극한강도측면에서 2.00% 그리고 변위 기준으로 6.51%의 오차를 나타내고 있다.

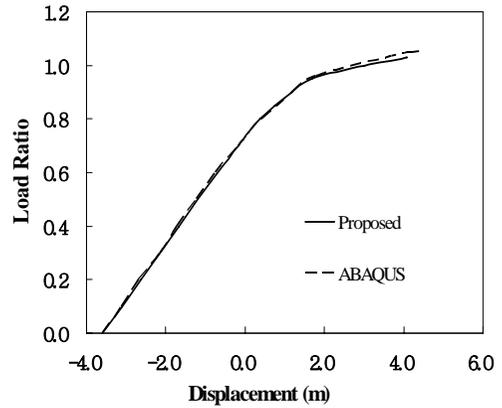


Fig. 3 극한강도 검증

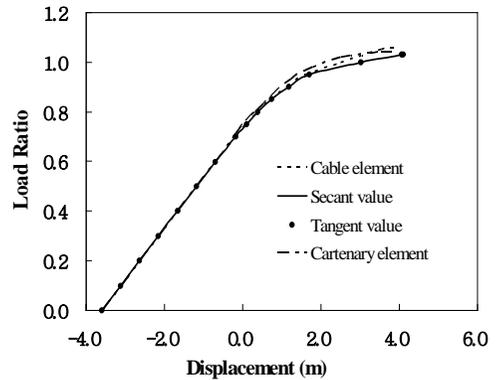


Fig. 4 보강형 중앙의 변위-하중 곡선

### 3.2 극한강도 비교 평가

극한강도 평가 시 Smith 케이블 요소를 4개 이상 사용한 경우 일정한 극한값에 수렴하는 결과를 얻을 수 있었다. 따라서, 수치해석 오차를 최소화하기 위하여 케이블 요소의 경우 하나의 케이블 부재 당 4개의 요소로 구성하였고 활선탄성계수 및 접선탄성계수를 사용한 1개의 등가트러스 요소와 현수선요소를 적용하여 각각 극한강도를 평가하고 그 결과를 서로 비교하였다.

케이블요소를 사용한 강사장교의 비례증분하중비 (load ratio)는 1.068로 산정되었으며 활선탄성계수 및 접선탄성계수를 적용한 등가트러스 요소를 사용한

강사장교의 비례증분 하중비는 1.031로 동일하게 산정되었다. 이는 장력의 증분량이 케이블 강성에 비해 상대적으로 매우 작아 초기 하중재하전과 후의 장력값을 분리해서 고려하는 경우와 초기 하중재하 전의 장력값만을 고려하는 경우 전체 구조계의 강성 변화에 차이가 없는 것으로 판단된다. 그리고 현수선요소를 적용한 경우는 극한강도가 1.042로 나타났다. 제안한 4가지 케이블 요소 형태에 따라 보강형 중앙의 하중-변위 곡선을 각각 그림 4에 비교하였다. 수치해석 결과에서 알 수 있듯이 등가트러스 요소를 사용한 경우 극한강도가 다른 요소를 사용한 경우 보다 최대 3.60% 작게 나타나 안전측으로 평가되었다. 이를 다른 관점에서 살펴보면 등가 트러스 요소로 구성된 케이블 부재가 상대적으로 다른 케이블 요소들보다 새그량을 작게 반영하여 전체 구조계의 유연도를 떨어뜨림으로써 극한강도가 작게 평가되는 것으로 판단된다.

#### 4. 결 론

본 논문에서는 강사장교의 초기형상을 고려한 연화소성형지법을 적용하여 극한내하력을 산정하였다. 본 연구를 통해 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 연화소성형지법에 의한 하중-변위 곡선은 ABAQUS의 해석결과와 잘 일치하여 수치해석의 정확성을 입증하였다
- 2) 등가트러스요소를 사용하여 강사장교의 극한강도를 해석할 때 활선탄성계수를 사용한 경우와 접선탄성계수를 사용 경우 극한값이 서로 일치하고 있으며, 이 경우 다른 케이블 요소들을 사용한 극한강도 결과보다 안전측인 것으로 평가되었다.
- 3) 강사장교 초기의 하중-변위 곡선은 직선 형태를 보이며, 일정한 수의 단면에 부분적인 소성화가 발현된 이후부터 극한점(limit point)에 이르는 곡선 부에서 비선형성이 크게 나타나고 있다. 이와 같은 사실은 기하학적 비선형성이 사장교의 초기 극한거동에 미치는 영향은 매우 작으며 극한점에 이르게 될 수록 구조계의 붕괴시 발생하는 대변위와 더불어 재료적인 비선형성이 극한거동을 지배한다는 것을 알 수 있었다.

#### 참고문헌

1. AISC (2001), Load and resistance factor design specification, AISC, 3rd ed., Chicago.
2. AASHTO, AASHTO LRFD Bridge Design Specification, AASHTO, 1998.
3. El-Zanaty, M., Murray, D., and Bjorhovde, R. (1980) Inelastic behavior of multistory steel frames, Structural Engineering Report No. 83, University of Alberta, Alberta, Canada.
4. Ermopoulos, J. C., Vlahinos, A. S., and Wang, Y. C. (1992) Stability analysis of cable-stayed bridges, Computers and Structures, 44(5), pp. 1083-1089.
5. Ernst, H.J. (1965) Der E-Modul von Seilen unter Beruecksichtigung des Durchhanges, Der Bauingenieur 40, pp. 52-55.
6. Fleming, J.F. (1979) Nonlinear static analysis of cable-stayed bridge structures, Computer & Structures, 10(4), pp. 621-635.
7. Gimsing, N. J. (1983) Cable Supported bridges- Concepts and Design, John Wiley & Sons.
8. Karoumi, R. (1999) Some modeling aspects in the nonlinear finite element analysis of cable supported bridges, Computers & Structures, 71, pp. 397-412.
9. Kim, S.E. and Chen, W.F. (1996(a)) Practical advanced analysis for unbraced steel frame design, ASCE J. Struct. Eng., ASCE, 122(11), pp. 1259-1265.
10. Kim, S.E. and Chen, W.F. (1996(b)) Practical advanced analysis for braced steel frame design, ASCE J. Struct. Eng., 122(11), pp. 1266-1274.
11. Nazmy, A.S. and Abdel-Ghaffar, A.M. (1990) Three-dimensional nonlinear static analysis of cable-stayed bridges, Computers and Structures, 34(2), pp. 257-271.
12. Smith, P.S. (1999) Cable Mechanics and Computation in B2000, Delft University of Technology Faculty of Aerospace Engineering, The Netherlands.
13. Wang, P.H., Yang, C.G. (1996) Parametric Studies on Cable-Stayed Bridges, Computer & Structures, 60(6), pp. 243-260.

(접수일자 : 2006년 1월 17일)