

## 열화시스템의 수리를 위한 베이지안 의사결정 모형의 개발

김택상<sup>1</sup> · 안선웅<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>한양대학교 산업공학과 / <sup>2</sup>한양대학교 정보경영공학과

### A Bayesian Decision Model for a Deteriorating Repairable System

Taeksang Kim<sup>1</sup> · Suneung Ahn<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Industrial Engineering, Hanyang University, Seoul 133-791

<sup>2</sup>Department of Information and Industrial Engineering, Hanyang University, Ansan 426-791

This paper presents the development of a decision model to examine the optimal repair action for a deteriorating system. In order to make a reasonable decision, it is necessary to perform an analysis of the uncertainties embedded in deterioration and to evaluate the repair actions based on the expected future cost. Focusing on the power law failure model, the uncertainties related to deterioration are analyzed based on the Bayesian approach. In addition, we develop a decision model for the optimal repair action by applying a repair cost function. A case study is given to illustrate a decision-making process by analyzing the loss incurred due to deterioration.

**Keywords:** decision analysis, Bayesian probability model, power law failure model, prior distribution

#### 1. 서론

대부분의 공학 시스템(engineering system)은 가동시간이 경과함에 따라 고장 발생시간 간격이 짧아지는 열화(deterioration) 과정을 갖는다. 이러한 시스템의 열화는 해당 시스템의 신뢰성과 생산되는 제품의 품질을 저하시킴으로써 품질비용과 시스템의 정지에 의한 기회손실을 초래한다 따라서 열화로 인한 시스템의 고장에 효과적으로 대응하기 위해서는 열화에 의해 초래되는 손실을 최소화 할 수 있는 수리활동에 대한 의사결정이 필요하다.

이때 열화시스템의 수리를 위한 합리적인 의사결정을 수립하기 위해서는 시스템의 열화 정도에 대한 면밀한 분석이 필요하다. 이를 위해 대부분의 경우 데이터에 의존한 분석을 수행해왔으나, 열화과정을 갖는 공학 시스템에서는 충분한 관측 데이터를 확보할 수 없는 경우가 빈번히 발생한다 이러한 경우 현실 시스템의 열화와 관련된 불확실성에 대한 분석은 대상 시스템에 대한 다양한 정보를 활용해 가용 데이터의 부족으로 인한 분석의 한계를 극복해야 하며, 이를 위한 하나의 방법으로서 베이지안 확률 모형화 접근법(Bayesian probability

modeling approach)을 들 수 있다.

베이지안 확률 모형(Bayesian probability model)을 이용해 시스템의 열화를 분석하기 위해서는 열화과정을 설명하기 위한 모형의 모수(parameter)에 대한 사전분포(prior distribution)가 필요하다. 이와 관련하여 가동시간의 경과에 따라 고장강도(failure intensity)가 급격히 증가하지 않아 현실적인 모형의 개발이 가능한 멱수법칙 고장모형(power law failure model)을 중심으로 다양한 연구들이 수행되었다(Ascher and Feingold, 1984; Leemis, 1995). 하지만 이들 가운데 수리적 편의성을 추구하는 선행 연구(Newby, 1991)에서는 불확실성의 원인이 되는 요인 간의 독립성(independence)을 가정한 분석을 수행하였다. 그러나 이러한 가정은 현실적 상황을 분석하기에는 적합하지 않다는 사실이 지적되었다(Huang and Bier, 1999). 이러한 요인 간의 독립성에 대한 가정을 완화(relaxation)한 분석방법을 제시한 연구(Huang and Bier, 1998) 또한 시스템의 열화에 대한 해석적 의미를 제공하는데 있어서 한계를 갖는 확률분포(probability distribution)를 사용하고 있다.

따라서 본 연구에서는 멱수법칙 과정(power law process)을 따르는 시스템의 열화에 대한 분석을 위한 사전분포를 추론한

이 논문은 한양대학교의 지원에 의하여 수행된 연구임(HY-2004-S).

\* 연락저자 : 안선웅 교수, 426-791 경기도 안산시 상록구 사 1동 1271 한양대학교 정보경영공학과, E-mail : sunahn@hanyang.ac.kr

2006년 1월 접수; 2006년 2월 수정본 접수; 2006년 2월 게재 확정.

다. 특히 자연공역사전분포(natural conjugate prior distribution)를 추론하는 방법을 이용해 사전정보(prior knowledge)와 상위모수(hyperparameter)에 대한 해석과 사후분석(posterior analysis)이 용이한 사전분포를 추론한다(Migon and Gemerman, 1999; Raiffa and Schlaifer, 1961).

이와 함께 시스템의 수리를 위한 최적 대안을 선정하기 위해서는 수리에 의한 열화의 개선 정도와 이에 따른 수리비용의 발생을 고려해야 한다. 이를 위해 본 연구에서는 열화의 개선 정도와 수리비용 간의 관계를 고려하기 위한 수리비용함수를 적용한 의사결정 모형을 제시한다. 그리고 수리 후 발생하게 될 손실에 대한 분석을 통해 효율적으로 최적의 수리대안을 선정하기 위한 방법을 제시한다.

본 논문은 다음과 같이 구성된다. 2장에서는 베이지안 확률모형을 이용하여 열화시스템에 내재된 불확실성을 분석하기 위한 확률분포를 추론한다. 3장에서는 열화시스템의 수리를 위한 베이지안 의사결정 모형과 수리비용함수를 고려한 최적대안의 선정 방법에 대해 설명한다. 4장에서는 개발된 의사결정 모형을 실험예제에 적용하고, 5장에서는 연구의 결론을 다룬다.

## 2. 사전분포의 추론

고장 발생률이 멱수법칙 강도함수(power law intensity function)를 따르는 열화시스템의 수리를 위한 의사결정을 위해서는 시스템의 열화와 관련된 미지의 모수(unknown parameter)에 대한 분석이 필요하다. 이를 위해 전통적 통계기법에서는 특정 통계량(statistic)을 이용한 분석을 수행하며, 이러한 분석은 충분한 데이터가 가용할 때 신뢰할 만한 결과를 제공할 수 있다. 하지만 현실의 공학 시스템에서는 충분한 수의 관측 데이터를 획득할 수 없는 경우가 자주 발생하게 되며, 이러한 경우 데이터에 의존한 분석은 합리적인 의사결정을 보장할 수 없게 된다. 그러나 만일 고장발생에 대한 데이터와 시스템에 대한 사전 정보(prior knowledge)를 효과적으로 이용할 수 있는 분석이 가능하다면, 실증적 데이터에만 의존하는 통계적 분석의 한계를 극복할 수 있을 것이다.

위와 같은 분석을 수행하기 위해서는 먼저 미지의 모수를 확률변수로 고려한 사전분포를 추론해야 한다. 이러한 사전분포는 시스템의 열화와 관련된 불확실성의 해석을 위한 출발점이 되며, 정보의 효율적인 분석을 위한 틀을 제공하게 된다. 이때 사전분포로서 자연공역사전분포를 이용하게 되면 상위모수와 사전 정보에 대한 의미 해석과 가용한 데이터를 활용하는 사후분석(posterior analysis)이 용이해지게 된다(Migon and Gemerman, 1999; Raiffa and Schlaifer, 1961).

### 2.1 우도함수의 추론

기계적인 원리에 의해 작동되는 시스템은 최초 가동 이후

가동시간이 경과함에 따라 고장발생 시간간격이 점차 짧아지는 열화를 겪게 된다. 따라서 열화시스템에 대한 분석에는 시간의 흐름에 따른 시스템의 성능 저하를 적절히 표현할 수 있는 모형이 고려되어야 하며, 이를 위해 비정상 포아송과정(nonhomogeneous Poisson process)을 이용할 수 있다(Leemis, 1995).

비정상 포아송과정을 따라 고장이 발생할 때 고장 발생률은 시간의 함수인 강도함수(intensity function)  $\lambda(t)$ 로 표현된다. 또한 누적 강도함수(cumulative intensity function)  $\Lambda(t)$ 는 식 (1)과 같이 정의되며, 시점  $t$ 까지 누적된 고장발생 횟수를 의미한다.

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(\tau) d\tau. \quad (1)$$

강도함수가  $\lambda(t)$ 인 비정상 포아송과정을 따라 고장이 발생할 때,  $(0, t]$  동안의 고장횟수  $N(t)$ 의 확률분포는 식 (2)와 같으며, 비정상 포아송과정에서  $n$ 개의 고장을 관측하였을 때, 이들의 발생 시간  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 에 대한 결합확률밀도함수(joint probability density function)는 식 (3)과 같다.

$$\Pr [N(t) = n] = \frac{\left[ \int_0^t \lambda(\tau) d\tau \right]^n \exp \left[ - \int_0^t \lambda(\tau) d\tau \right]}{n!}, \quad (2)$$

$$f_{T_1, T_2, \dots, T_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \left\{ \prod_{i=1}^n \lambda(t_i) \right\} \exp[-\Lambda(t_n)]. \quad (3)$$

비정상 포아송과정을 이용하여 열화시스템의 고장발생과정을 모형화하기 위해 제안된 모형들(Cox and Lewis, 1966; Hartler, 1989; Hjorth, 1980; Yamada and Osaki, 1983) 중 멱수법칙 고장모형은 식 (4)와 같은 강도함수를 갖는다. 이러한 멱수법칙 고장모형은 시간의 경과에 따라 고장발생 강도가 급격히 변하지 않으므로 공학 시스템을 대상으로 한 현실적인 모형의 개발이 가능하다는 장점을 가지고 있다(Ascher and Feingold, 1984; Leemis, 1995).

$$\lambda(t) = \lambda_0 \beta t^{\beta-1} \quad (\lambda_0 > 0, \beta > 0). \quad (4)$$

이때  $\lambda_0$ 는 배율(scaling factor)이며,  $\beta$ 는 열화모수(deterioration parameter)이다. 따라서 식 (3)과 식 (4)로부터 멱수법칙 과정을 따라 발생하는  $n$ 개의 고장을 관측하였을 때 이들의 발생 시간에 대한 결합확률밀도함수를 식 (5)와 같이 구할 수 있다.

$$f_{T_1, T_2, \dots, T_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \lambda_0^n \beta^n \left( \prod_{i=1}^n t_i \right)^{\beta-1} \exp[-\lambda_0 t_n^\beta]. \quad (5)$$

자연공역사전분포를 추론하는 방법으로 사전분포를 추론하기 위해서는 미지의 모수에 대한 객관적 정보를 담고 있는 관측 데이터들의 발생에 관한 확률적 표현(probabilistic descri-

ption)인 우도함수(likelihood function)를 추론해야 한다(Migon and Gemerman, 1999). 본 연구에서는 식 (5)의 결합확률밀도함수를 먹수법칙 고장모형 내의 미지의 모수  $\lambda_0$ 와  $\beta$ 에 대한 우도함수로 이용한다. 즉,  $\lambda_0$ 와  $\beta$ 에 대한 우도함수는 식(6)과 같다.

$$\ell(\lambda_0, \beta; t_1, t_2, \dots, t_n) = \lambda_0^n \beta^n \left( \prod_{i=1}^n t_i \right)^{\beta-1} \exp[-\lambda_0 t_n^\beta]. \quad (6)$$

이때,  $n$ 은 양의정수,  $t_n > 0$ ,  $\prod_{i=1}^n t_i > 0$ 이다.

자연공액사전분포는 우도함수를 중심(kernel)으로 구성되므로 식 (7)과 같다.

$$\begin{aligned} f(\lambda_0, \beta) &\propto \lambda_0^n \beta^n \left( \prod_{i=1}^n t_i \right)^{\beta-1} \exp[-\lambda_0 t_n^\beta] \\ &= K \cdot \lambda_0^n \beta^n \left( \prod_{i=1}^n t_i \right)^{\beta-1} \exp[-\lambda_0 t_n^\beta]. \end{aligned} \quad (7)$$

이때 식 (7)의 사전분포가 확률분포로의 정의를 만족시키기 위해서 비례상수  $K$ 는 식 (8)과 같이 정의되어야 하며, 상위모수  $\left( m, y_m, \prod_{j=1}^m y_j \right)$ 는 각각 대응되는 충분통계량  $\left( n, t_i, \prod_{i=1}^n t_i \right)$ 과 동일한 영역(domain)에 존재해야 하므로  $m$ 은 양의정수,  $y_m > 0$ ,  $\prod_{j=1}^m y_j > 0$ 이다. 결과적으로, 비례상수  $K$ 는 식 (8)로 나타난다.

$$K = \{\Gamma(m+1)\}^{-2} \cdot \left\{ \ln(y_m^{m+1}) - \ln\left(\prod_{j=1}^m y_j\right) \right\}^{m+1}. \quad (8)$$

### 2.2 상위모수의 결정

식 (7)의 사전분포는 자연공액사전분포를 추론하는 방법으로 얻어진 결과이므로 사전분포의 상위모수들은 우도함수의 충분통계량으로부터 그 의미를 해석할 수 있다. 즉  $y_j$ 와  $m$ 은 분석대상 시스템과 동일한 시스템의  $j$ 번째 고장발생 시간과 고장발생 횟수를 의미하게 되므로, 동일 시스템의 고장발생 데이터가 가용하다면 이를 이용하여 상위모수의 값을 결정할 수 있다.

그러나 이러한 객관적 사전 정보가 가용하지 않다면 시스템에 대한 주관적 사전 정보를 이용해 상위모수의 값을 결정할 수 있다. 즉, 확률변수로 고려된 모수의 평균과 분산에 대한 주관적 사전정보를 획득하고 사전정보와 상위모수와의 관계를 이용하여 식 (9), 식 (10), 식 (11)과 같이 상위모수의 값을 결정할 수 있다.

$$m = \frac{(E[\beta])^2}{Var(\beta)} - 1 \quad (9)$$

$$\prod_{j=1}^m y_j = \exp \left[ \frac{(m+1)}{E[\beta]} \cdot \left\{ \frac{(m+1)^{m+2}}{(E[\lambda_0])^{m+1}} - m \right\} \right], \quad (10)$$

$$y_m = \exp \left[ \frac{(m+1)}{E[\beta]} \cdot \left\{ \left( \frac{m+1}{E[\lambda_0]} \right)^{m+1} - 1 \right\} \right]. \quad (11)$$

하지만 일반적으로 모수에 대한 관측이 쉽지 않으므로 모수의 평균과 분산에 대한 주관적 사전 정보를 획득하는 것 역시 용이하지 않다. 이러한 경우 다음과 같은 방법으로 시스템에 대한 주관적 사전정보를 획득할 수 있다. 시스템의 고장발생 강도가 식 (4)와 같은 먹수법칙 강도함수(power law intensity function)를 따를 때 시점  $t$ 까지 누적된 고장발생 횟수를 의미하는 누적 강도함수는 식(12)와 같다.

$$\Lambda(t) = \lambda_0 t^\beta. \quad (12)$$

식 (12)에서  $t = 1$ 까지 발생한 고장횟수는  $\lambda_0$ 이므로, 시점 1까지 발생한 고장횟수에 대한 주관적 견해는  $\lambda_0$ 에 대한 사전 정보로 활용될 수 있다. 따라서  $t = 1$ 까지 발생한 고장횟수에 대한 주관적 견해로부터 <Figure 1>과 같이  $[\lambda_0^L, \lambda_0^U]$ 에서 정의되는  $\lambda_0$ 의 확률분포  $f(\lambda_0)$ 를 얻을 수 있으며, 이를 이용해  $E[\lambda_0]$ 를 구할 수 있다.

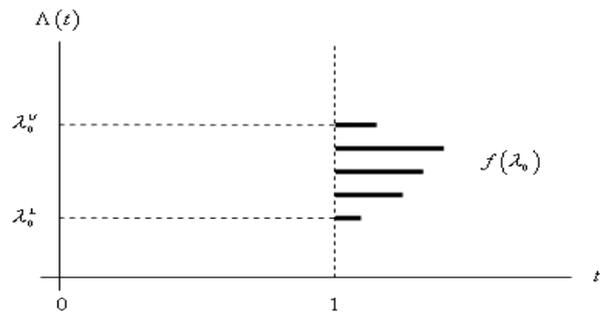


Figure 1. Subjective prior information on  $\lambda_0$ .

그리고 <Figure 2>와 같이  $\lambda_0 = \lambda_0^L$  일 때 의사결정 시점  $t_d$ 에서의 누적 고장강도  $\Lambda(t_d)$ 에 대한 주관적 견해는  $\beta$ 에 대한 사전 정보로 해석될 수 있으며, 이로부터 조건부 확률분포  $g(\beta | \lambda_0^L)$ 를 얻을 수 있다. 따라서  $\lambda_0$ 에 따른  $\beta$ 의 조건부 확률분포들과  $\lambda_0$ 의 확률분포를 이용해  $E[\beta]$ 와  $Var(\beta)$ 를 구할 수 있다.

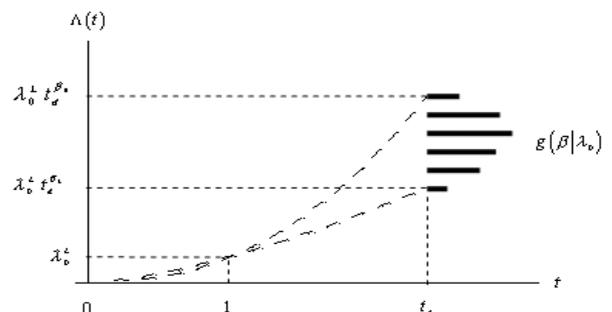


Figure 2. Subjective prior information on  $\beta$ .

### 3. 베이저안 의사결정 모형

#### 3.1 사전분석

본 연구에서는 열화시스템의 수리를 위한 베이저안 의사결정 분석을 수행하기 위해 아래와 같은 사항들을 가정한다

- (1) 고장발생 즉시 수리가 이뤄지며 수리시간은 무시될 수 있다
- (2) 수리에 의해 시스템의 고장강도가 감소되며 수리대안의 고장강도 감소율이  $\rho$ 인 경우 수리 후 시스템의 고장강도는 수리 직전의  $(1 - \rho)$ 배로 감소된다.
- (3) 의사결정자는 위험중립적(risk neutral)이며, 수리대안의 시행에 따른 기대손실(expected loss)을 기준으로 의사결정을 수립한다.
- (4) 수리대안의 시행에 따른 손실은 수리비용과 수리 후 계획 교체 시점까지 발생하게 될 고장비용의 합이다.
  - (i) 수리비용은 고장강도 감소율  $\rho$ 의 함수로 표현되며  $\rho = 1$ 인 경우 시스템 교체에 필요한  $c_o$ 의 비용이 발생한다.
  - (ii) 수리 후 계획교체 시점까지 고장이 발생할 때마다  $c_b$ 의 고장비용이 소요된다.

고장강도가 식 (4)의 멱수법칙 강도함수를 따르는 열화시스템에서 시점  $t_d$ 에 고장이 발생했을 때 고장강도 감소율이  $\rho$ 인 수리가 시행되면, 수리 후 시스템의 고장강도는 수리 직전의  $(1 - \rho)$ 배로 감소된 식(13)과 같은 강도함수  $\lambda'(t)$ 를 따르게 된다.

$$\lambda'(t) = (1 - \rho)\lambda_0\beta t^{\beta-1}. \tag{13}$$

식 (13)으로부터 수리 후 계획교체 시점  $T$ 까지 발생할 고장 횟수  $\Phi$ 를 식 (14)와 같이 구할 수 있다.

$$\Phi = \int_{t_d}^T \lambda'(\tau) d\tau = (1 - \rho)\lambda_0(T^\beta - t_d^\beta). \tag{14}$$

식 (14)에 의해 수리 후 계획교체 시점까지 발생할 고장비용  $C_F$ 은 식 (15)과 같으며,

$$C_F = c_b \cdot \Phi = c_b(1 - \rho)\lambda_0(T^\beta - t_d^\beta). \tag{15}$$

수리비용  $C_R$ 은 고장강도 감소율의 함수로 가정하였으므로 수리대안의 시행에 따른 손실  $L_S$ 은 식 (16)과 같다.

$$L_S(\lambda_0, \beta; \rho) = C_F + C_R = c_b(1 - \rho)\lambda_0(T^\beta - t_d^\beta) + C(\rho). \tag{16}$$

이때  $\lambda_0$ 와  $\beta$ 는 확률변수이므로 수리대안의 시행에 따른 손실은 기대값인 기대손실로 평가되어야 하며, 사전분석에서는 식 (7)의 사전분포를 이용해 식 (17)과 같이 사전 기대손실을 구할 수 있다.

$$E[L_S(\lambda_0, \beta; \rho)] = c_b N_1(1 - \rho) + C(\rho), \tag{17}$$

여기서

$$N_1 = (m + 1) \left( \ln \frac{y_m^{m+1}}{\prod_{j=1}^m y_j} \right)^{m+1} \left[ \left( \ln \frac{y_m^{m+2}}{\prod_{j=1}^m y_j} - \ln T \right)^{-(m+1)} - \left( \ln \frac{y_m^{m+2}}{\prod_{j=1}^m y_j} - \ln(t_d) \right)^{-(m+1)} \right]. \tag{18}$$

#### 3.2 사후분석

사전정보와 함께 시스템에 대한 실제적인 정보를 이용해 시스템에 내재된 불확실성을 분석한다면 보다 합리적인 의사결정을 수립할 수 있을 것이다. 이를 위해서는 먼저 실제 관측 데이터를 이용해  $\lambda_0$ 와  $\beta$ 에 대한 사후분포(posterior distribution)를 추론해야 한다. 열화시스템의 실제 고장에 대한  $n$ 개의 데이터가 가용하다면 베이즈 공식(Bayes' formula)을 이용해 식 (19)와 같이  $\lambda_0$ 와  $\beta$ 에 대한 사전분포를 사후분포로 갱신(update)할 수 있다.

$$\begin{aligned} f(\lambda_0, \beta | t_1, t_2, \dots, t_n) &= \frac{\ell(\lambda_0, \beta | t_1, t_2, \dots, t_n) \cdot f(\lambda_0, \beta)}{\int_0^\infty \int_0^\infty \ell(\lambda_0, \beta | t_1, t_2, \dots, t_n) \cdot f(\lambda_0, \beta) d\lambda_0 d\beta} \\ &= N \cdot \lambda_0^{n+m} \beta^{n+m} \left\{ \left( \prod_{i=1}^n t_i \right) \cdot \left( \prod_{j=1}^m y_j \right) \right\}^\beta \exp[-\lambda_0(t_n^\beta + y_m^\beta)], \end{aligned} \tag{19}$$

여기서

$$N = \Gamma(n + m + 1) \int_0^\infty \beta^m \left\{ \left( \prod_{i=1}^n t_i \right) \cdot \left( \prod_{j=1}^m y_j \right) \right\}^\beta \cdot (t_n^\beta + y_m^\beta)^{-(n+m+1)} d\beta. \tag{20}$$

하지만 식 (20)의 정규화상수(normalizing constant)가 닫힌 형태(closed form)를 갖지 않으므로 식 (19)의 사후분포 또한 닫힌 형태를 갖지 못하게 되며, 이로 인해 사후 의사결정의 기준이 될 식 (21)의 사후 기대손실에 대한 계산이 용이하지 않게 된다.

$$\begin{aligned} E[L_S(\lambda_0, \beta | t_1, t_2, \dots, t_n)] &= c_b(1 - \rho) \cdot E[\lambda_0(T^\beta - t_d^\beta) | t_1, t_2, \dots, t_n] + C(\rho). \end{aligned} \tag{21}$$

따라서 본 연구에서는 라플라스 근사법(Laplace approximation)을 이용해 식 (22)와 같이 사후 기대손실의 근사값을 구한다 (Tierney and Kadane, 1986).

$$\begin{aligned} \hat{E}[L_S(\lambda_0, \beta | t_1, t_2, \dots, t_n)] &= c_b(1 - \rho) \cdot \hat{E}[\lambda_0(T^\beta - t_d^\beta) | t_1, t_2, \dots, t_n] + C(\rho), \end{aligned} \tag{22}$$

여기서

$$\begin{aligned} \hat{E}[\lambda_0(T^\beta - t_d^\beta) | t_1, t_2, \dots, t_n] &= \left[ \frac{\det \Omega^*}{\det \Omega} \right]^{\frac{1}{2}} \exp[n \{L^*(\hat{\lambda}_0^*, \hat{\beta}^*) - L(\hat{\lambda}_0, \hat{\beta})\}], \end{aligned} \tag{23}$$

$$\Phi(\lambda_0, \beta) = \lambda_0 (T^\beta - t_d^\beta). \quad (24)$$

이때  $(\hat{\lambda}_0^*, \hat{\beta}^*)$ 과  $(\hat{\lambda}_0, \hat{\beta})$ 는  $L^*$ 와  $L$ 을 최대화 시켜주는  $(\lambda_0, \beta)$ 의 값이며,  $\Omega^*$ 와  $\Omega$ 는  $L^*(\hat{\lambda}_0^*, \hat{\beta}^*)$ 와  $L(\hat{\lambda}_0, \hat{\beta})$ 의 헤시안 행렬(Hessian matrix)의 역행렬에 -1을 곱한 행렬이다.

$$\begin{aligned} L(\lambda_0, \beta) &= \frac{1}{n} \ln [\ell(\lambda_0, \beta | t_1, t_2, \dots, t_n) \cdot f(\lambda_0, \beta)] \\ &= \frac{1}{n} \ln \left[ \frac{\left( \prod_{i=1}^n t_i \right)^{-1}}{\{\Gamma(m+1)\}^2} \left( \ln \frac{y_m^{m+1}}{\prod_{j=1}^m y_j} \right)^{m+1} \lambda_0^{n+m} \beta^{n+m} \right. \\ &\quad \left. \left\{ \left( \prod_{i=1}^n t_i \right) \left( \prod_{j=1}^m y_j \right) \right\}^\beta \exp[-\lambda_0 (t_n^\beta + y_m^\beta)] \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} L^*(\lambda_0, \beta) &= \frac{1}{n} \ln [\Phi(\lambda_0, \beta) \cdot \ell(\lambda_0, \beta | t_1, t_2, \dots, t_n) \cdot f(\lambda_0, \beta)] \\ &= \frac{1}{n} \ln \left[ \frac{\left( \prod_{i=1}^n t_i \right)^{-1}}{\{\Gamma(m+1)\}^2} \left( \ln \frac{y_m^{m+1}}{\prod_{j=1}^m y_j} \right)^{m+1} \lambda_0^{n+m} \beta^{n+m} \right. \\ &\quad \left. \left\{ \left( \prod_{i=1}^n t_i \right) \left( \prod_{j=1}^m y_j \right) \right\}^\beta \exp[-\lambda_0 (t_n^\beta + y_m^\beta)] \right] \\ &\quad + \frac{1}{n} \ln [\lambda_0 (T^\beta - t_d^\beta)]. \end{aligned} \quad (26)$$

식 (23)과 같은 방법으로 근사값을 계산하기 위해서는 사후 분포가 단봉(unimodal)이어야 한다.

본 연구에서 추론된 사후분포는 단봉이 되어 위와 같은 근사를 수행하기 위한 정칙조건(regularity condition)을 만족시킴을 확인할 수 있다(Ahmad and Jaheen, 1995; Al-Hussaini and Jaheen, 1994; Tierney and Kadane, 1986). 따라서 식 (23)의 근사값을  $N_2$ 라고 할 때 식 (22)의 사후 기대손실은 식 (27)과 같이 고장강도 감소율  $\rho$ 의 함수로 표현된다.

$$\hat{E}[L_S(\lambda_0, \beta | t_1, t_2, \dots, t_n)] = c_0 N_2 (1 - \rho) + C(\rho). \quad (27)$$

### 3.3 멱수형 수리비용함수를 고려한 의사결정 모형

본 연구에서는 식 (28)과 같은 멱수(power)형 수리비용함수를 갖는 의사결정모형을 고려하며,

$$C_R = c_0 \rho^k \quad (k > 0). \quad (28)$$

식 (28)의 수리비용함수는  $k$ 의 값에 따라 <Figure 3>과 같은 세 가지 형태를 갖는다.  $k = 1$ 일 때 수리비용은 <Figure 3-(a)>와 같이 고장강도 감소율에 비례해 증가하게 된다.  $k > 1$  경우에는 <Figure 3-(b)>와 같이 고장강도 감소율이 커짐에 따라 수리비용의 증가율이 증가하게 되며,  $0 < k < 1$  경우에는 <Figure 3-(c)>와 같이 고장강도 감소율이 커짐에 따라 수리비용의 증가율은 감소하게 된다.

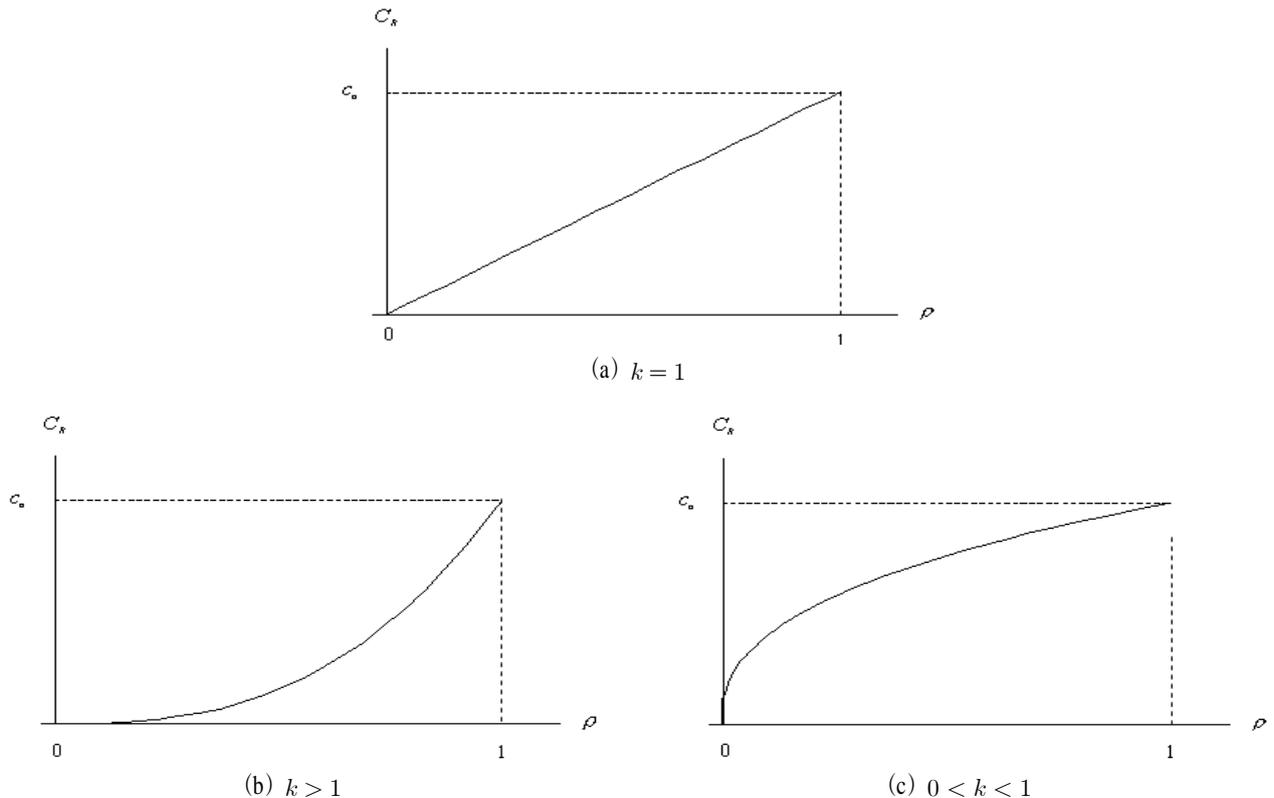


Figure 3. Power law repair cost function.

식 (17)과 식 (28)로부터 역수형 수리비용함수를 고려한 수리대안의 시행에 따른 손실은 식(29)와 같다.

$$E[L_S(\lambda_0, \beta; \rho)] = c_b N_1 (1 - \rho) + c_o \rho^k. \quad (29)$$

식 (29)의 사전 기대손실은 고장강도 감소율  $\rho$ 의 함수이므로, 기대손실에 대한 분석을 통해 역수형 수리비용함수를 고려한 경우의 최적 고장강도 감소율  $\rho_1^*$ 와 최적 기대손실  $E[L_S(\lambda_0, \beta; \rho_1^*)]$ 를 결정할 수 있다. 먼저  $k \geq 1$ 인 경우에 대해 아래와 같은 분석을 통해 열화시스템의 수리를 위한 의사 결정을 수립할 수 있다. 식 (29)로부터 고장강도 감소율  $\rho$ 에 대한 사전 기대손실의 도함수(derivative)는 식 (30)과 같다.

$$\frac{d}{d\rho} E[L_S(\lambda_0, \beta; \rho)] = -c_b N_1 + k c_o \rho^{k-1}. \quad (30)$$

식 (30)에서  $0 \leq \rho \leq 1$ 이므로  $c_b N_1 > k c_o$ 이면 사전 기대손실의 기울기는 항상 음의 값을 갖게 되며, 식 (29)의 사전 기

대손실은 <Figure 4>와 같이  $\rho$ 의 구간  $[0, 1]$ 에서 단조감소(monotonically decreasing)하게 된다. 따라서  $c_b N_1 > k c_o$ 일 때 사전분석에 의한 최적 고장강도 감소율  $\rho_1^* = 1$ 이며, 최적 기대손실  $E[L_S(\lambda_0, \beta; \rho_1^*)] = c_o$ 이다.

$k = 1$ 일 때  $c_b N_1 = k c_o$ 라면 <Figure 5-(a)>와 같이 구간  $[0, 1]$  사이의 모든  $\rho$ 에 대해  $c_o$ 의 동등한 기대손실이 발생하게 된다. 그리고  $k > 1$ 일 때  $c_b N_1 = k c_o$ 라면 사전 기대손실은 <Figure 5-(b)>와 같은 형태를 취하게 하게 되므로, 사전 기대손실이  $c_o$ 인  $\rho = 1$ 이 최적 고장강도 감소율로 결정된다

$k = 1$ 일 때  $0 < c_b N_1 < k c_o$ 이면 구간  $[0, 1]$ 에 속하는 모든  $\rho$ 에 대한 사전 기대손실의 기울기는 항상 양의 값을 갖는  $-c_b N_1 + k c_o$ 이 되므로, <Figure 6-(a)>와 같은 형태의 사전 기대손실이 발생하게 된다. 따라서 이와 같은 경우에서 최적 고장강도 감소율  $\rho_1^* = 0$ 으로 최적 기대손실  $E[L_S(\lambda_0, \beta; \rho_1^*)] = c_b N_1$ 으로 결정된다.

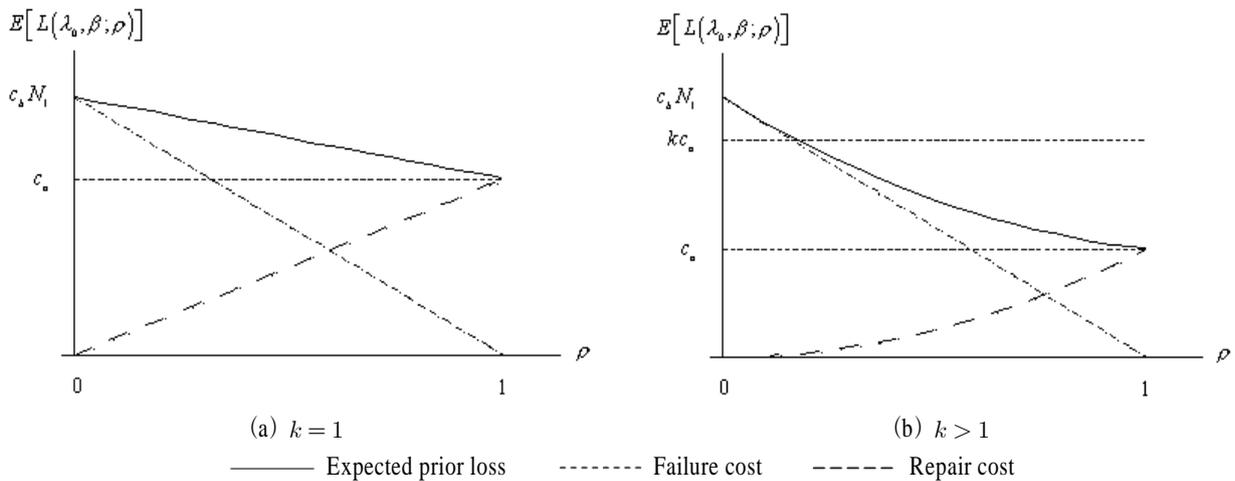


Figure 4. The expected prior loss( $k \geq 1, c_b N_1 > k c_o$ ).

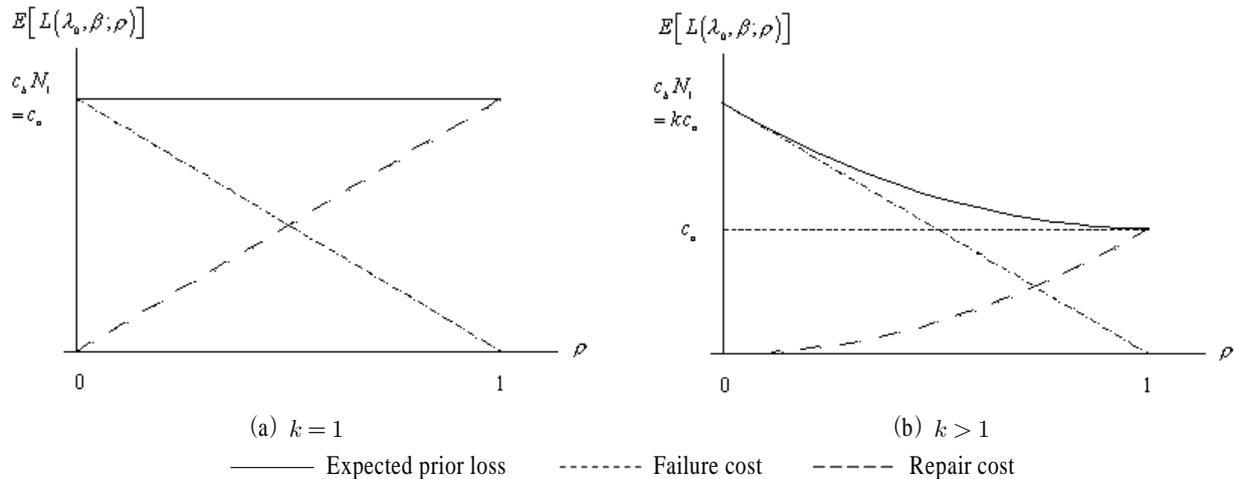


Figure 5. The expected prior loss( $k \geq 1, c_b N_1 = k c_o$ ).

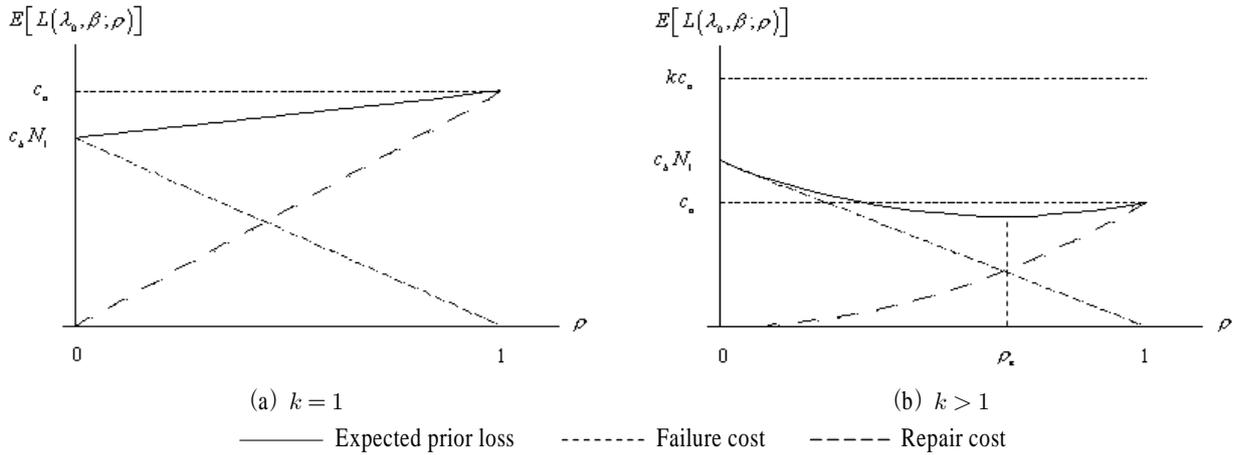


Figure 6. The expected prior loss( $k \geq 1, 0 < c_b N_1 < k c_o$ ).

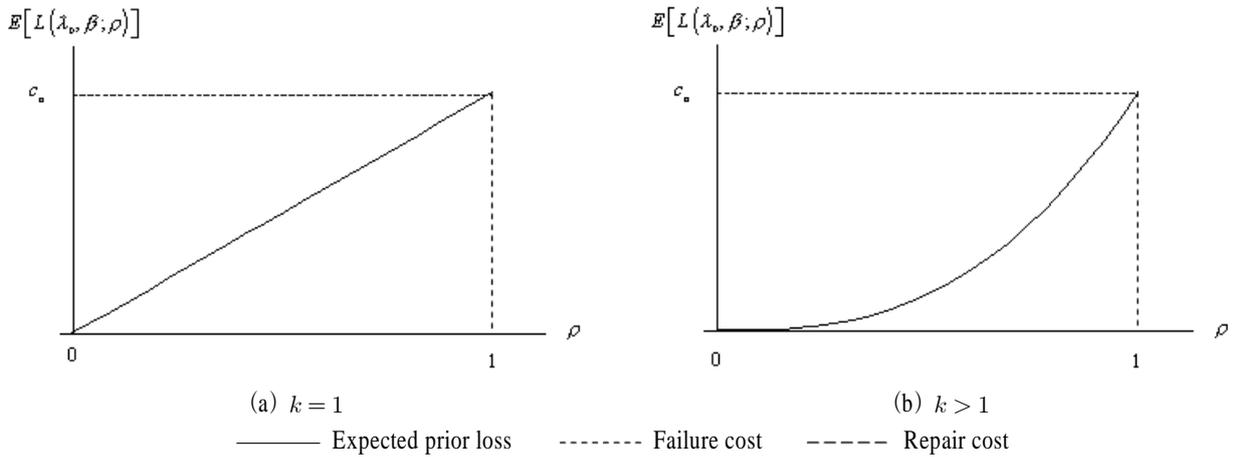


Figure 7. The expected prior loss( $k \geq 1, c_b N_1 = 0$ ).

$k > 1$ 일 때  $0 < c_b N_1 < k c_o$  이라면  $\rho$ 의 구간  $[0, 1]$  내에서 사전 기대손실의 기울기는 음에서 양으로 변하게 되므로 <Figure 6-(b)>와 같은 최소의 사전 기대손실이 발생하는 점의  $\rho$ 좌표는  $[0, 1]$  사이의 값을 갖게 된다. 따라서  $\frac{d}{d\rho} E[L_S(\lambda_0, \beta; \rho)] = 0$ 이 되게 하는 식 (31)과 같은 고장강도감소율  $\rho_e$ 가 사전분석에 의한 최적 고장강도감소율로 결정되며 이때의 사전 기대손실은 식 (29)에 식 (31)을 대입해 구할 수 있다.

$$\rho_e = \left( \frac{c_b N_1}{k c_o} \right)^{\frac{1}{k-1}}. \tag{31}$$

$c_b N_1 = 0$ 라면 식 (29)의 사전 기대손실은 수리비용만으로 구성되므로, <Figure 7>과 같이  $k \geq 1$ 일 때  $E[L_S(\lambda_0, \beta; \rho)] = 0$ 인  $\rho = 0$ 이 사전분석에 의한 최적 고장강도 감소율로 결정된다 따라서  $k \geq 1$ 인 멱수형 수리비용함수를 고려한 최적 고장강도감소율  $\rho_1^*$ 과 기대손실  $E[L_S(\lambda_0, \beta; \rho_1^*)]$ 은 <Table 1>과 같다.

Table 1. Optimal decision via prior analysis( $k \geq 1$ )

$k$	$c_b N_1$	$\rho_1^*$	$E[L_S(\lambda_0, \beta; \rho_1^*)]$
$k \geq 1$	$c_b N_1 > k c_o$	1	$c_o$
$k > 1$	$c_b N_1 = k c_o$	1	$c_o$
$k = 1$		real number in $[0, 1]$	
$k > 1$	$0 < c_b N_1 < k c_o$	$\left( \frac{c_b N_1}{k c_o} \right)^{\frac{1}{k-1}}$	$E \left[ L_S \left( \lambda_0, \beta; \rho_1^* = \left( \frac{c_b N_1}{k c_o} \right)^{\frac{1}{k-1}} \right) \right]$
$k = 1$		0	$c_b N_1$
$k \geq 1$	0	0	0

$0 < k < 1$  인 멱수형 수리비용함수를 고려한 사전 의사결정은 아래와 같다.  $0 < k < 1$  일 때  $c_b N_1 > c_o$  이면  $\frac{d}{d\rho} E[L_S(\lambda_0, \beta; \rho)] = 0$  이 되게 하는 식 (31)의  $\rho_e$  는 구간  $[0, 1]$  사이에 존재하게 된다. 식 (29)의 사전 기대손실은  $(\rho, E[L_S(\lambda_0, \beta; \rho)]) = (0, c_b N_1)$  과  $(\rho, E[L_S(\lambda_0, \beta; \rho)]) = (1, c_o)$  을 만족하므로, 사전 기대손실은  $\rho$  의 구간  $[0, 1]$  에서 <Figure 8-(a)>와 같은 형태를 취하게 된다. 따라서 이와 같은 경우  $\rho = 1$  에서 최소의 기대손실  $c_o$  가 발생하게 된다.

$0 < k < 1$  이며  $c_b N_1 = c_o$  일 경우에도  $\rho_e$  는 구간  $[0, 1]$  사이에 존재하게 되므로 사전 기대손실은  $\rho$  의 구간  $[0, 1]$  에서 <Figure 8-(b)>와 같은 형태를 갖게 되며,  $\rho = 0$  과  $\rho = 1$  에서 최소의 기대손실  $c_o$  가 발생하는 된다. 따라서 이때 최적 고장강도 감소율  $\rho_1^*$  는 0 또는 1로 결정된다.

$0 < k < 1$  일 때  $c_b N_1 > k c_o$  라면  $\frac{d}{d\rho} E[L_S(\lambda_0, \beta; \rho)] = 0$  이 되게 하는  $\rho_e$  는 구간  $[0, 1]$  사이에 존재하게 된다. 그러므로 이와 같은 경우에 사전 기대손실의 그래프는 <Figure 8-(c)>와 같

은 형태를 갖게 되므로, 최적 고장강도 감소율  $\rho_1^* = 0$  으로 최적 기대손실  $E[L_S(\lambda_0, \beta; \rho_1^*)] = c_b N_1$  으로 결정된다.

$0 < k < 1$  일 때  $c_b N_1 = k c_o$  라면  $\rho_e = 1$  이므로 사전 기대손실의 그래프는 <Figure 8-(d)>와 같은 형태를 갖게 된다. 따라서 이때에도 최적 고장강도 감소율  $\rho_1^* = 0$  으로 최적 기대손실  $E[L_S(\lambda_0, \beta; \rho_1^*)] = c_b N_1$  으로 결정된다. 이와 함께  $0 < k < 1$  일 때  $0 < c_b N_1 < k c_o$  라면  $\rho_e > 1$  이므로 사전 기대손실의 그래프는 <Figure 8-(e)>와 형태를 가지며, 이와 같은 경우에도 최적 고장강도 감소율  $\rho_1^* = 0$  이며 최적 기대손실  $E[L_S(\lambda_0, \beta; \rho_1^*)] = c_b N_1$  이 된다.

$0 < k < 1$  일 때  $c_b N_1 = 0$  이면 사전 기대손실은 수리비용만으로 구성된다. 그러므로 <Figure 8-(f)>와 같이  $E[L_S(\lambda_0, \beta; \rho)] = 0$  인  $\rho = 0$  이 사전분석에 의한 최적 고장강도 감소율로 결정된다. 따라서  $0 < k < 1$  인 멱수형 수리비용함수를 고려한 경우 사전분석에 의한 최적 고장강도 감소율  $\rho_1^*$  과 기대손실  $E[L_S(\lambda_0, \beta; \rho_1^*)]$  은 <Table 2>와 같다.

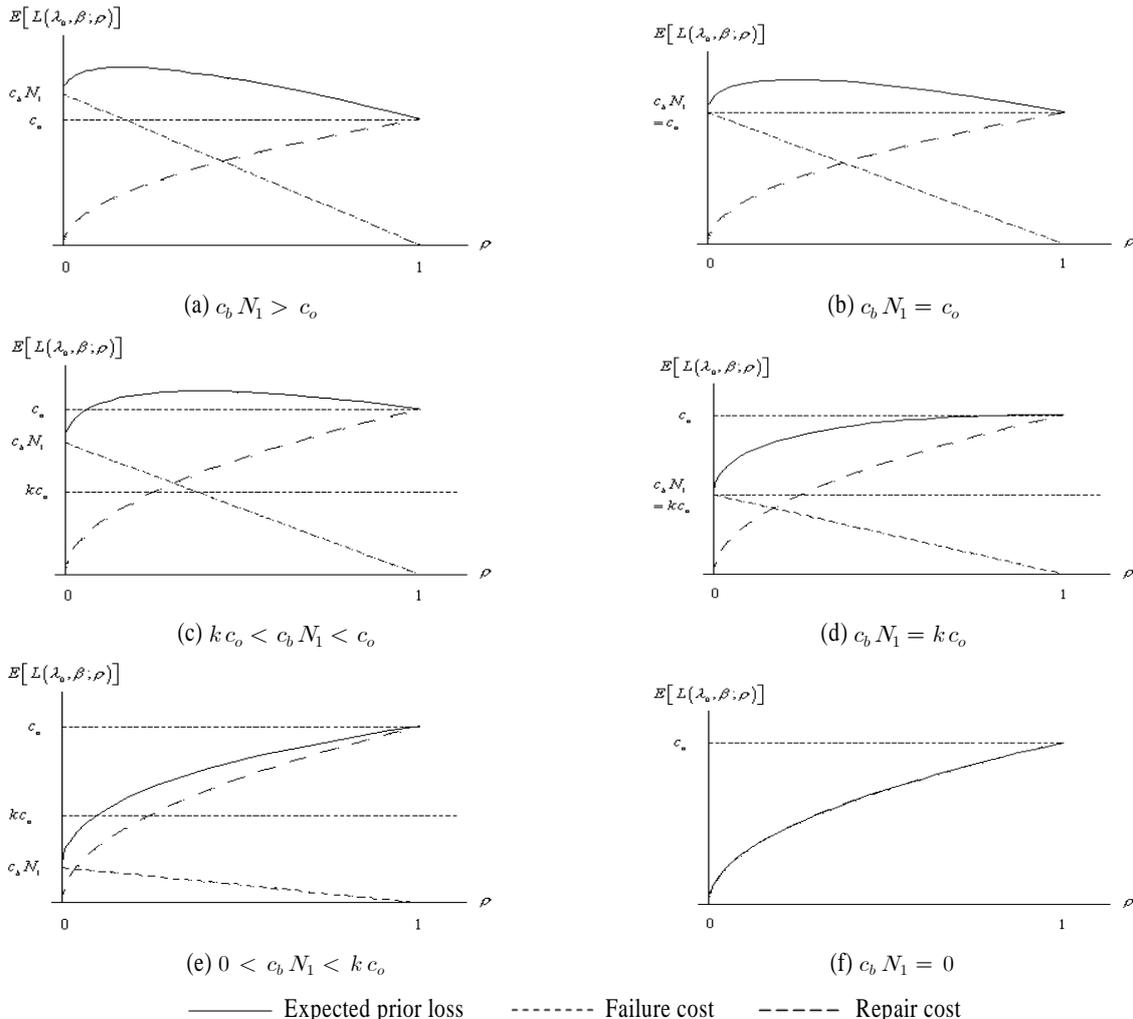


Figure 8. The expected prior loss ( $0 < k < 1$ ).

**Table 2.** Optimal decision via prior analysis( $0 < k < 1$ )

$c_b N_1$	$\rho_1^*$	$E[L_S(\lambda_0, \beta; \rho_1^*)]$
$c_b N_1 > k c_o$	1	$c_o$
$c_b N_1 = c_o$	0 or 1	$c_o$
$0 < c_b N_1 < c_o$	0	$c_b N_1$

식 (27)과 식 (28)로부터 먹수형 수리비용함수를 고려한 경우의 사후 기대손실의 근사값은 식(32)와 같다.

$$\hat{E}[L_S(\lambda_0, \beta | t_1, t_2, \dots, t_n)] = c_b N_2 (1 - \rho) + c_o \rho^k. \quad (32)$$

식 (29)의 사전 기대손실과 비교했을 때 식 (32)의 사후 기대손실은  $\rho = 0$ 인 수리가 시행되었을 때 고장회수의 기대값이  $N_1$ 에서  $N_2$ 로 바뀌었을 뿐 사전 기대손실과 동일한 함수 형태를 갖는다. 따라서 사후분석에서도  $k$ 와  $c_b N_2$ 의 값에 따라 사전 분석과 동일한 방식으로 사후분석에 의한 최적 고장강도감소율과 기대손실을 결정할 수 있다.

#### 4. 수치예제

본 장에서는 앞서 제안된 의사결정 모형을 이용해 가압경수로 보조 급수시스템(pressurized water reactor auxiliary feedwater system)을 구성하는 증기터빈 펌프(turbine-driven pump)의 실제 고장 사례(Wolford, Atwood, and Roesener, 1992)에 대한 의사결정 분석을 수행한다. 1973년 5월 1일에 설치된 증기터빈 펌프의 수명은 20년으로 추정되며, 1985년 8월 19일에 증기터빈 펌프의 수리를 위한 의사결정을 수립해야 한다. 시스템 교체비용  $c_o$ 와 평균 고장발생 비용  $c_b$ 는 각각 \$75,000와 \$10,000로 가정하며, 사전정보로는 선행연구(Huang and Bier, 2001)와 동일하게  $E[\lambda_0] = 0.1$ ,  $E[\beta] = 1.62$ ,  $Var(\beta) = 0.14^2$ 을 사용한다. 증기터빈 펌프의 고장시간에 대한 데이터는 <Table 3>과 같다.

**Table 3.** Failure data of the turbine-driven pump

Observation period	Failure dates
	November 18, 1980
	May 13, 1982
	December 7, 1982
August 24, 1977	February 6, 1983
to	March 14, 1983
October 1, 1987	March 21, 1983
	September 27, 1983
	October 13, 1983
	March 30, 1984
	August 19, 1985

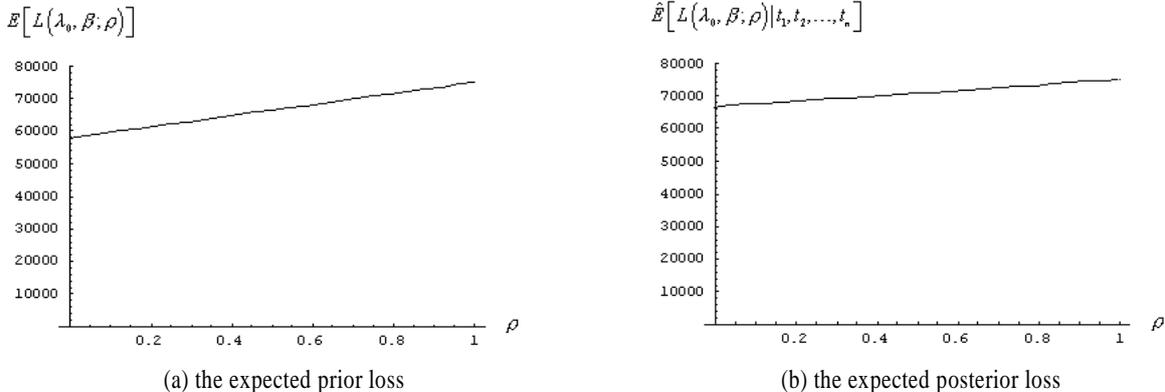
시스템에 대한 주관적 사전정보를 이용해 구한  $N_1 = 5.79014$ 이므로, 먹수형 수리비용함수를 고려한 경우의 사전 기대손실은 식 (33)과 같다.

$$E[L_S(\lambda_0, \beta; \rho)] = 10000 \times 5.79014 \times (1 - \rho) + 75000 \times \rho^k \quad (33)$$

먼저  $k = 1$ 인 경우 식 (33)에서  $c_b N_1 < c_o$ 이므로 <Table 1>로부터 사전분석에 의한 최적 고장강도 감소율  $\rho_1^* = 0$ 으로 기대손실은  $E[L_S(\lambda_0, \beta; \rho_1^*)] = 57901.4$ 로 결정할 수 있다. 이와 같은 사전정보에 기초한 의사결정 결과를 <Figure 9-(a)>를 통해 확인할 수 있다. 이와 함께 주관적 사전정보를 이용해 구한  $N_2 = 6.66188$ 이므로, 사후 기대손실은 식 (34)와 같다.

$$\begin{aligned} \hat{E}[L_S(\lambda_0, \beta; \rho) | t_1, t_2, \dots, t_n] &= \\ &= 10000 \times 6.66188 \times (1 - \rho) + 75000 \times \rho^k. \end{aligned} \quad (34)$$

$k = 1$ 인 경우 식 (34)의 사후 기대손실에서도  $c_b N_2 < c_o$ 이다. 따라서 사전정보와 함께 시스템의 실제 고장에 대한 정보를 이용해 분석한 최적 고장강도 감소율  $\rho_2^* = 0$ 이며, 기대손실  $\hat{E}[L_S(\lambda_0, \beta | t_1, t_2, \dots, t_n)] = 66618.8$ 이다. 사후분석에 의한 의사결정 결과는 <Figure 9-(b)>를 통해 확인할 수 있다.



**Figure 9.** The expected loss ( $k = 1$ ).

$k > 1$ 인 경우에도  $c_b N_1 < c_o$ 이다. 따라서 <Table 1>에 제시된 것과 같이 사전분석에 의한 최적 고장강도 감소율은 식(35)와 같이 결정되며

$$\rho_1^* = \left( \frac{10000 \times 5.79014}{k \times 75000} \right)^{\frac{1}{k-1}} \quad (35)$$

사전분석에 의한 최적 기대손실은 식(36)과 같다.

$$E[L_S(\lambda_0, \beta; \rho_1^*)] = 10000 \times 5.79014 \times \left\{ 1 - \left( \frac{10000 \times 5.79014}{k \times 75000} \right)^{\frac{1}{k-1}} \right\} + 75000 \times \left( \frac{10000 \times 5.79014}{k \times 75000} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (36)$$

식 (35)의 최적 고장강도 감소율과 식(36)의 최적 기대손실은  $k$ 의 함수이므로  $\rho_1^*$ 와  $E[L_S(\lambda_0, \beta; \rho_1^*)]$ 는  $k$ 의 따라 각각 <Figure 10-(a)>, <Figure 10-(b)>와 같은 그래프 위의 점으로 결정된다.

사후분석에 이용되는  $N_2 = 6.66188$ 이므로  $k > 1$ 인 멱수형 수리비용함수를 고려한 모형에서의 사후 기대손실은 식 (37)과 같으며

$$\hat{E}[L_S(\lambda_0, \beta; \rho) | t_1, t_2, \dots, t_n] = 10000 \times 6.66188 \times (1 - \rho) + 75000 \times \rho^k. \quad (37)$$

이때  $c_b N_2 < k c_o$ 이다. 따라서 사후분석에 의한 최적 고장강도 감소율  $\rho_2^*$ 는 식 (38)과 같으며 사후분석에 의한 최적 기대손실은 식 (39)와 같다.

$$\rho_2^* = \left( \frac{10000 \times 6.66188}{k \times 75000} \right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (38)$$

$$\hat{E}[L_S(\lambda_0, \beta; \rho_2^*) | t_1, t_2, \dots, t_n] = 10000 \times 6.66188 \times \left\{ 1 - \left( \frac{10000 \times 6.66188}{k \times 75000} \right)^{\frac{1}{k-1}} \right\} + 75000 \times \left( \frac{10000 \times 6.66188}{k \times 75000} \right)^{\frac{k}{k-1}}. \quad (39)$$

사후분석에 의한 최적 고장강도 감소율과 기대손실 역시  $k$ 의 함수이므로,  $k$ 가 증가함에 따라 <Figure 11-(a)>, <Figure 11-(b)>와 같은 형태를 갖게 된다. 따라서  $k > 1$ 인 경우 <Figure 12>의 점선과 실선에서  $k$ 의 값에 따른 사전분석과 사후분석에 의한 최적 고장강도 감소율과 기대손실이 결정된다

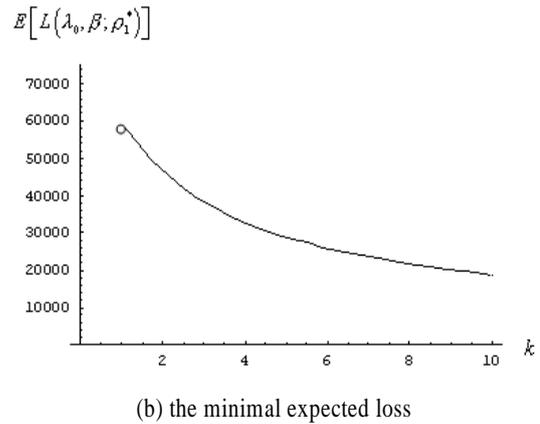
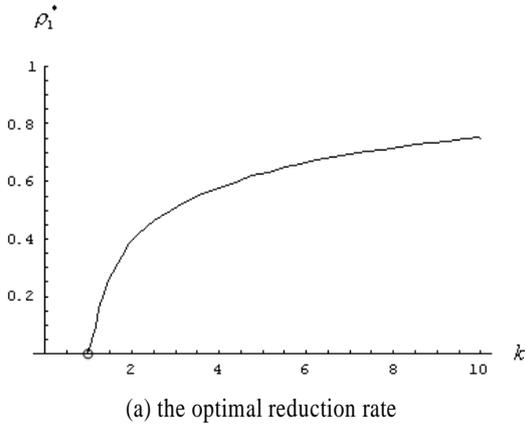


Figure 10. The optimal decision via prior analysis ( $k > 1$ ).

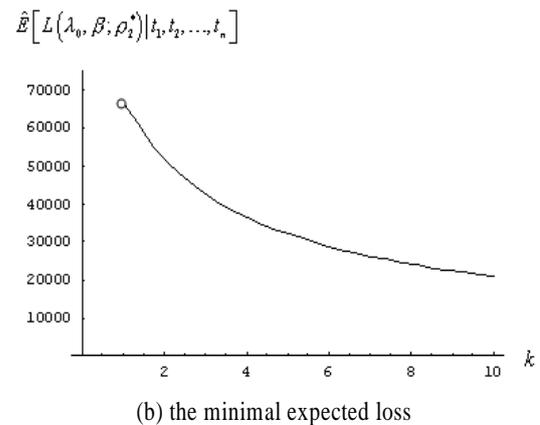
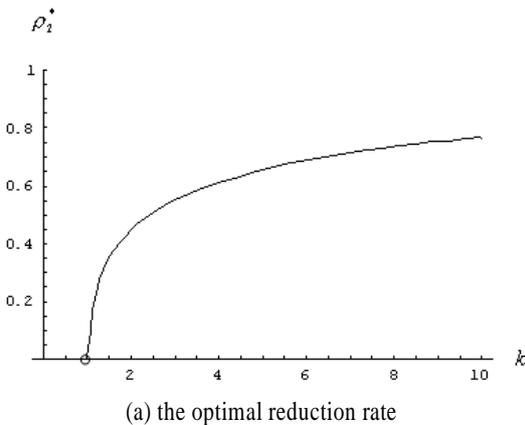


Figure 11. The optimal decision via posterior analysis ( $k > 1$ ).

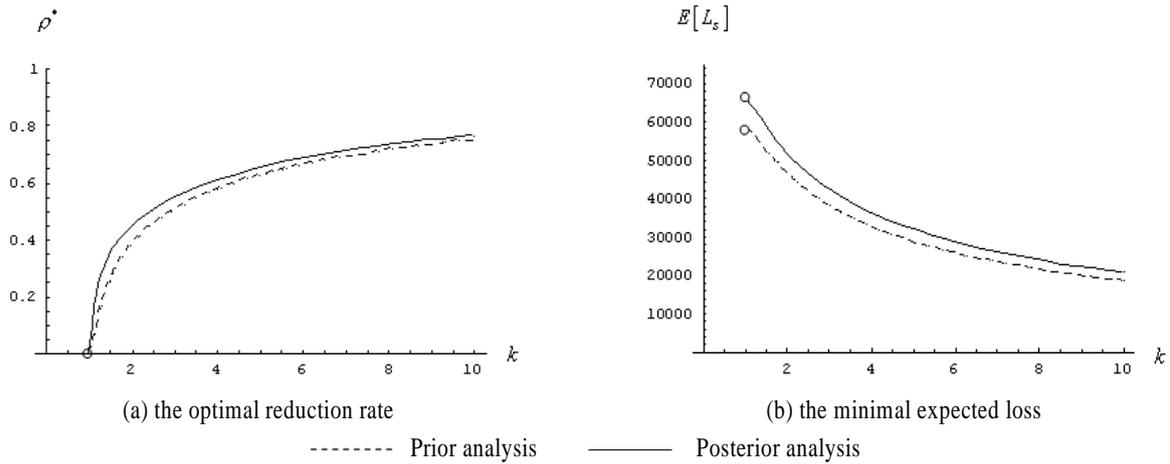


Figure 12. The optimal decision via prior and posterior analysis ( $k > 1$ ).

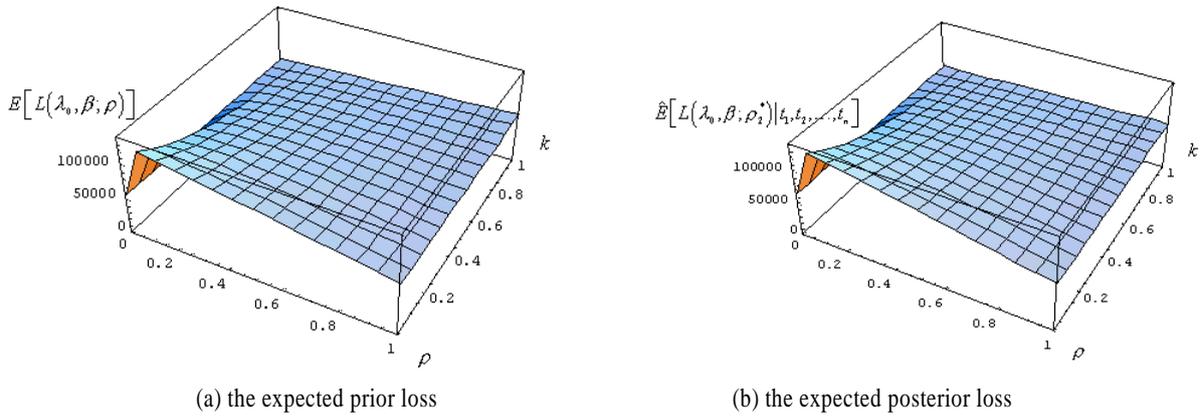


Figure 13. The expected loss ( $0 < k < 1$ ).

$0 < k < 1$ 인 경우에도  $c_b N_2 < c_o$ 이다. 따라서 <Table 2>에 따라 사전분석에 의한 최적 고장강도 감소율  $\rho_1^* = 0$ 으로 기대손실은  $E[L_S(\lambda_0, \beta; \rho_1^*)] = 57901.4$ 로 결정된다.  $0 < k < 1$ 인 멱수형 수리비용함수를 고려한 사전 기대손실은 <Figure 13-(a)>과 같은 형태를 취하게 되므로  $k$ 의 각 값에 대해  $\rho = 0$ 에서 최소의 사전 기대손실이 발생함을 확인할 수 있다 사후 분석에서도  $c_b N_2 < c_o$ 이므로 최적고장강도감소율  $\rho_2^* = 0$ 으로  $E[L_S(\lambda_0, \beta; \rho_2^*) | t_1, t_2, \dots, t_n] = 66618.8$ 로 결정되며, <Figure 13-(b)>로부터 이를 확인할 수 있다.

### 5. 결론

본 연구에서는 열화로 인해 초래되는 손실을 최소화 할 수 있는 수리방안을 진단하기 위한 의사결정 모형을 제안하였다 먼저 시스템에 대한 사전 정보를 이용해 시스템의 열화에 내재된 불확실성을 분석하기 위한 사전분포를 추론하고, 이를

이용해 시스템의 수리를 위한 의사결정을 수립하기 위한 과정에 대한 설명하였다. 그리고 시스템에 대한 사전 정보와 함께 시스템의 열화에 대한 실제적인 정보를 활용할 수 있는 의사결정 분석에 대해 설명하였다. 이와 함께 시스템의 열화에 의한 손실의 분석에 열화의 개선 정도와 수리비용과의 관계를 반영할 수 있는 수리비용함수를 고려함으로써 시스템의 특성을 반영할 수 있는 의사결정 모형을 제시하였다.

시스템의 열화에 대한 분석을 위해 본 연구에서 제시한 방법은 가용 데이터의 부족으로 인한 기존 분석 방법의 한계를 극복할 수 있는 대안으로 이용될 수 있을 것이며 멱수법칙 고장모형을 비롯해 시스템의 열화를 분석하기 위한 다양한 모형에 내재된 불확실성의 분석을 위한 기초를 제공할 수 있을 것이다. 또한 제안된 의사결정 모형은 고장강도 감소율의 함수로 표현되는 수리비용을 고려할 수 있도록 개발되었으므로 다양한 수리비용함수를 고려한 의사결정에 활용될 수 있을 것이다.

본 연구에서는 정보의 활용과 의미 해석이 용이한 확률분포를 이용해 시스템의 열화에 내재된 불확실성을 분석하였다.

하지만 열화의 개선을 위한 현실적인 의사결정을 수립하기 위해서는 분석대상의 특성을 고려한 분석이 수행되어야 할 것이다. 따라서 향후 연구에서는 다양한 정보의 활용과 시스템의 물리적, 구조적 특성을 반영한 분석이 가능한 확률분포를 추론해야 할 것이다. 제안된 모형에서는 열화에 의해 초래되는 손실은 고장비용과 수리비용으로 구성되며 고장이 발생할 때마다 동일한 고장비용이 발생한다고 가정하였다 그러나 현실 시스템에서는 열화에 의해 다양한 비용이 확률적인 형태로 발생하게 될 것이다. 따라서 현실적인 손실의 분석과 이에 기초한 합리적인 의사결정을 위해서는 열화에 의해 초래되는 손실에 대한 세부적인 분석이 필요할 것이다.

## 참고문헌

- Ahmad, K. E. and Jaheen, Z. F. (1995), Approximate Bayes Estimators Applied to the Inverse Gaussian Lifetime Model, *Computers and Mathematics with Applications*, **29**(12), 39-47.
- Al-Hussaini, E. K. and Jaheen, Z. F. (1994), Approximate Bayes Estimators Applied to the Burr Model, *Communications in Statistics : Theory and Methods*, **23**(1), 99-121.
- Ascher, H. E. and Feingold, H. (1984), *Repairable Systems Reliability*, Marcel Dekker, New York.
- Cox, D. R. and Lewis, P. A. W. (1966), *The Statistical Analysis of Series of Events*, Chapman and Hall, London.
- Hartler, G. (1989), The nonhomogeneous Poisson process a model for the reliability of complex repairable systems, *Microelectronics and Reliability*, **29**(1), 381-386.
- Hjorth, U. (1980), A reliability distribution with increasing, decreasing, constant and bathtub-shaped failure rates, *Technometrics*, **22**(1), 99-107.
- Huang, Y. S. and Bier, V. M. (1998), A Natural Conjugate Prior for the Non-homogeneous Poisson Process with a Power Law Intensity Function, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **27**(2), 525-551.
- Huang, Y. S. and Bier, V. M. (1999), A Natural Conjugate Prior for the Nonhomogeneous Poisson Process with an Exponential Intensity Function, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **28**(6), 1479-1509.
- Huang, Y. S. and Bier, V. M. (2001), A decision model for deteriorating repairable systems, *IIE Transaction*, **33**(1), 479-485.
- Leemis, L. M. (1995), *Reliability: Probabilistic Models and Statistical Methods*, Prentice-Hall, New Jersey.
- Migon, H. S. and Gemerman, D. (1999), *Statistical Inference : An Integrated Approach*, Arnold, London.
- Newby, M. (1991), Repairable systems and growth models, *Bayesian Methods in Reliability*, edited by P. Sander and R. Badoux, 101-117, Kluwer Academic, Dordrecht, Netherlands.
- Raiffa, H. and Schlaifer, R. (1961), *Applied Statistical Decision Theory*, Harvard University Press, Cambridge.
- Tierney, L. and Kadane, J. B. (1986), Accurate Approximations for Posterior Moments and Marginal Densities, *Journal of the American Statistical Association*, **81**(393), 82-86.
- Yamada, S. and Osaki, S. (1983), Reliability based on nonhomogeneous Poisson processes, *Microelectronics and reliability*, **23**(1), 91-112.
- Wolford, A. J., Atwood, C. L., and Roesener, W. S. (1992), *Aging Data Analysis and Risk Assessment - Development and Demonstration Study*, EG&G Idaho, Inc., Idaho Falls.