Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 32, No. 4, pp. 369-372, December 2006.

GI/M/1/K 대기행렬의 이탈시점 기준 잔여도착간격 분석

채경철† · 서가이

한국과학기술원 산업공학과

On the Remaining Interarrival Time upon Reaching a Given Level in the GI/M/1/K Queue

Kyung C. Chae · Gai Suh

Department of Industrial Engineering, KAIST, Daejeon 305-701

Suppose that a customer arrives at the GI/M/1/K queueing system when there are $n+m$ customers in the system, $n, m \geq 0$, $n+m \leq K$. Sooner or later, the number of customers in the system will reach m. In this paper, we present the Laplace transform of the remaining interarrival time upon reaching level m, for the first time, since a customer arrived when there are $n+m$ customers in the system.

Keywords: Duality, Residual Service Time, Idle Period

1. 서 론

M/G/1 대기형렬과 GI/M/1 대기행렬에 비해서 M/M/1 대기행렬의 분석이 용이한 이유는 잔여서비스시간과 잔여도착간격에 무기억 속성을 적용할 수 있기 때문이다 그렇지만, M/G/1 대기행렬과 GI/M/1 대기행렬에서도 잔여서비스시간과 잔여도착간격에 대해서 알려진 속성들을 적절히 활용하면 이들 대기행렬을 이해하고 분석하는데 도움이 될 것이다.

최근에 Chydzinski(2004)는 M/G/1 대기행렬의 도착시점 기준 잔여서비스시간에 대한 논문을 발표했다. 본 논문에서는 Chydzinski의 결과를 이용하여 GI/M/1(/K) 대기행렬의 이탈시점 기준 잔여도착간격을 분석한다.

Chydzinski(2004)의 연구대상인 $\beta(n, b)$의 정의는 다음과 같다. M/G/1 대기행렬 시스템에서 어느 고객이 시스템을 이탈한 직후에 시스템에 n명의 고객이 남았다고 하자, $n \geq 0$. 이후 시간이 흐름에 따라 고객수가 변화하다가 처음으로 b명이 되었을 때, $b \geq n+1$, 이때 진행중인 서비스의 잔여시간이 $\beta(n, b)$인데, Chydzinski는 의 $\beta(n, b)$확률분포를 구했다.

기존의 연구대상과 다른 점은b뿐만 아니라 n까지 명시한 점이다. M/G/1 대기행렬에서 어느 고객이 도착한 직후의 고객수가 b일때, $b \geq 1$, 이때 진행중인 서비스의 잔여시간을 $\beta(\bullet, b)$라 하자. $\beta(\bullet, b)$에 대한 연구결과는80년대 초반에 많이 발표되었다. $\beta(\bullet, b)$의 확률분포는 Asmussen (1981)이 구했고, 기대치는 Fakinos(1982)가 구했다. $\beta(\bullet, b)$의 분포와 기대치는 b값에 따라 다르다. Green(1982)의 정리에 의하면

$$\sum_{b=2}^{\infty} \pi_{b-1}\, \beta^*_{\bullet, b}(\theta) = \frac{\lambda}{\mu} \frac{1-S^*(\theta)}{\theta E[S]} \tag{1}$$

인데, 여기서 π_{b-1}은 도착하는 고객이 $b-1$명을 볼 확률이고, $\beta^*_{\bullet, b}(\theta)$와 $S^*(\theta)$는 각각 $\beta(\bullet, b)$와 서비스시간 S의 라플라스 변환이며, λ^{-1}과 μ^{-1}는 각각 평균 도착간격과 평균 서비스시간이다.

[비고 1] $\beta(n, b)$의 라플라스 변환을 $\beta^*_{n,b}(\theta)$라 하면 $\beta^*_{b-1,b}(\theta) = \beta^*_{\bullet, b}(\theta)$ 관계가 성립한다(Chae *et al*., 2006).

본 논문의 연구대상인$\alpha(n+m, m)$의 정의는 다음과 같

† 연락저자 : 채경철 교수, 305-701 대전시 유성구 구성동 373-1 한국과학기술원 산업공학과, Tel : 042-869-2915, Fax : 042-869-3110
E-mail : kcchae@kaist.ac.kr
2006년 03월 접수; 2006년 07월 수정본 접수; 2006년 07월 게재 확정.

다. GI/M/1/K 대기행렬에서 어느 고객이 도착하면서 $n+m$ 명을 보았다고 하자, $n, m \geq 0$, $n+m \leq K$. (비고: $n+m < K$ 경우에는 도착 직후의 고객수가 $n+m+1$명이고, $n+m=K$ 경우에는 도착 직후의 고객수가 K명이다.) 이후 시간이 흐름에 따라 고객수가 변화하다가 처음으로 m명이 되었을 때, 이때 진행중인 도착간격의 잔여시간이 $\alpha(n+m, m)$이다. GI/M/1/K 대기행렬은 유한용량 시스템이므로 도착하면서 K명을 본 고객은 차단되어 도착 즉시 이탈한다. $m=0$ 경우에는 $\alpha(n, 0)$가 $(n+1)$ - 정책 하의 GI/M/1/K 대기행렬의 유휴기간 길이를 의미한다(Lee, 2006).

기존의 연구대상과 다른 점은 m뿐만 아니라 n까지 명시한 점이다. GI/M/1/K 대기행렬에서 어느 고객이 이탈한 직후의 고객수가 m일때, $m \geq 0$, 이때 진행중인 도착간격의 잔여시간을 $\alpha(\bullet, m)$이라 하고 이의 라플라스 변환을 $\alpha^*_{\bullet, m}(\theta)$라 하자. 알려진 대표적인 결과는 $K \to \infty$ 경우인 GI/M/1 대기행렬에서 성립하는

$$\alpha^*_{\bullet, m}(\theta) = \mu \frac{r - A^*(\theta)}{\theta - \mu + \mu r}, \quad m \geq 0 \tag{2}$$

인데(Takács, 1962), 여기서 $A^*(\theta)$는 도착간격 A의 라플라스 변환이고, μ^{-1}은 평균 서비스시간이며, r은 방정식 $r = A^*(\mu - \mu r)$의 해 중에서 유일하게 $|r| < 1$인 것이다. 식 (2)의 우변은 모든 $m \geq 0$에 대해서 동일한데, $\alpha^*_{\bullet, 0}(\theta)$는 GI/M/1 대기행렬의 유휴기간 길이의 라플라스 변환을 의미한다.

본 논문의 주요 결과는 다음과 같다. 첫째로, GI/M/1/K 대기행렬과 M/G/1/K+1 대기행렬 간에 성립하는 쌍대관계(Chae *et al.*, 2003)를 이용해서 Chydzinski(2004)의 결과로 부터 $\alpha(n, 0)$의 라플라스 변환 $\alpha^*_{n, 0}(\theta)$를 얻는다. 둘째로, GI/M/1/K+m 대기행렬의 $\alpha(n+m, m)$의 라플라스 변환 $\alpha^*_{n+m, m}(\theta)$가 GI/M/1/K 대기행렬의 $\alpha^*_{n, 0}(\theta)$와 일치함을 보인다. 셋째로, $K \to \infty$ 경우인 GI/M/1 대기행렬에 대해서 식 (1)에 대응하는 관계식을 도출하고, 또한 [비고 1]에 대응하는 관계로서 $\alpha^*_{m, m}(\theta) = \alpha^*_{\bullet, m}(\theta)$ 관계가 성립함을 보인다.

2. GI/M/1/K + m 대기행렬의 $\alpha^*_{n+m, m}(\theta)$

GI/M/1/K+m 대기행렬에서 $m=0$ 경우를 먼저 고려한다. 도착간격 A의 분포함수를 $A(x)$라 하고, 모수가 j와 μ인 얼랑(Erlang) 확률변수를 $E_{j\mu}$라 하자. d_i와 $\rho^*_j(\theta)$를 다음과 같이 정의한다.

$$d_i = \int_0^\infty \frac{e^{-\mu x} (\mu x)^i}{i!} dA(x), \; 0 \leq i \leq K-1 \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \rho^*_j(\theta) &= \Pr\{A > E_{j\mu}\} E\left[e^{-\theta(A - E_{j\mu})} | A > E_{j\mu}\right] \\ &= \int_0^\infty \int_0^x e^{-\theta(x-y)} \frac{e^{-\mu y} (\mu y)^{j-1}}{(j-1)!} \mu \, dy \, dA(x) \\ &= \left(\frac{\mu}{\mu - \theta}\right)^j A^*(\theta) - \sum_{i=1}^{j-1} \left(\frac{\mu}{\mu - \theta}\right)^{j-i} d_i, \quad 1 \leq j \leq K \end{aligned} \tag{4}$$

(3)의 d_i는 A동안 이탈하는 고객수가 i일 확률이다. (4)의 $\rho^*_j(\theta)$는 두 가지가 결합된 양으로서, 첫째는 j명이 이탈할 때까지 걸리는 시간이 A보다 작을 확률이고, 둘째는 j명째 이탈시점에서 아직 남아있는 A의 라플라스 변환이다. $\rho^*_j(\theta)$와 $\rho^*_{j-1}(\theta)$ 간에는

$$\rho^*_j(\theta) = \left(\frac{\mu}{\mu - \theta}\right) \left\{\rho^*_{j-1}(\theta) - d_{j-1}\right\}, \quad 1 \leq j \leq K$$

관계가 성립하는데, 여기서 $\rho^*_0(\theta) = A^*(\theta)$ 이다.

GI/M/1/K 대기행렬에서 $\alpha^*_{n, 0}(\theta)$에 대한 계차방정식은 다음과 같다.

$$\alpha^*_{n, 0}(\theta) = \rho^*_{n+1}(\theta) + \sum_{i=0}^{n} d_i \alpha^*_{n+1-i, 0}(\theta),$$

$$0 \leq n \leq K-1 \tag{5a}$$

$$\alpha^*_{K, 0}(\theta) = \alpha^*_{K-1, 0}(\theta) \tag{5b}$$

식 (5a)에 대한 설명은 다음과 같다. GI/M/1/K 대기행렬에 고객이 한명 도착해서 총 $n+1$명이 되었다고 하자, $n+1 \leq K$. 만약 다음 고객이 도착하기 전에 $n+1$명의 서비스가 모두 끝나면 바쁜기간이 끝나는데, 이때 유휴기간의 길이는 바쁜기간이 끝난 시점으로부터 다음 고객이 도착할 때까지 걸리는 시간이다. 반면에, 다음 고객이 도착할 때까지 i명이 이탈하는 경우에는, $0 \leq i \leq n$, 다음 고객은 도착시에 $n+1-i$ 명을 보게되는데, 이때 진행중인 서비스의 잔여시간에는 무기억 속성을 적용한다. 식 (5b)에 대한 설명은 다음과 같다. 도착시에 K명을 보는 고객은 차단되어 도착 즉시 이탈하므로 결과적으로 도착시에 K-1명을 보는 경우와 같은 상황이 된다.

같은 방법으로 GI/M/1/K+m 대기행렬에서 $\alpha^*_{n+m, m}(\theta)$에 대한 계차방정식을 세우면

$$\alpha^*_{n+m, m}(\theta) = \rho^*_{n+1}(\theta) + \sum_{i=1}^{n} d_i \alpha^*_{n+m+1-i, m}(\theta),$$

$$0 \leq m \leq n+m \leq K+m-1 \tag{6a}$$

$$\alpha^*_{K+m, m}(\theta) = \alpha^*_{K+m-1, m}(\theta) \tag{6b}$$

를 얻는다. 그런데, 방정식 (5)의 미지수 집합과 방정식(6)의 미지수 집합은 표기만 다를뿐 미지수들 간의 관계식은 정확히 일치한다. 따라서, 모든 $m \geq 0$에 대해서 GI/M/1/K+m 대기행렬의 $\alpha^*_{n+m,\,m}(\theta)$는 GI/M/1/K 대기행렬의 $\alpha^*_{n,\,0}(\theta)$와 동일하다, $0 \leq n \leq K-1$.

이제, Chydzinski(2004)의 결과를 이용해서 GI/M/1/K 대기행렬의 $\alpha^*_{n,0}(\theta)$를 구한다. 먼저 a_i와 $\sigma^*_j(\theta)$를 다음과 같이 정의한다.

$$a_i = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^i}{i!} dS(x) \tag{7}$$

$$\sigma^*_j(\theta) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-\theta}\right)^j S^*(\theta) - \sum_{i=1}^{j-1}\left(\frac{\lambda}{\lambda-\theta}\right)^{j-i} a_i \tag{8}$$

(7)의 a_i는 M/G/1 대기행렬에서 서비스시간 S동안 i명이 도착할 확률로서 (3)의 d_i에 대응하는 것이다. (8)의 $\sigma_j{}^*(\theta)$는 (4)의 $\rho^*_j(\theta)$에 대응하는 것으로서, j명이 도착할 때까지 걸리는 시간이 S보다 작을 확률과 j명째 도착한 시점에서 아직 남아 있는 S에 대한 라플라스 변환이 결합된 양이다. 그리고, $S(x)$와 $S^*(\theta)$는 각각 S의 분포함수와 라플라스 변환이다.

서론에서 언급했듯이 $\beta^*_{k,\,b}(\theta)$는 M/G/1 대기행렬에서 k명을 남긴 이탈 이후 처음으로 고객수가 b명이 되었을 때 진행중인 서비스의 잔여시간이다, $0 \leq k \leq b-1$. 우리의 관심사는 $k = K-n,\ b = K+1$ 경우로서, $\beta^*_{K-n,K+1}(\theta)$에 대한 계차방정식은 다음과 같다(Chydzinski, 2004).

$$\beta^*_{K-n,K+1}(\theta) = \sigma^*_{n+1}(\theta) + \sum_{i=0}^{n} a_i \beta^*_{K-(n+1-i),K+1}(\theta),$$

$$0 \leq n \leq K-1 \tag{9a}$$

$$\beta^*_{K-K,\,K+1}(\theta) = \beta^*_{K-1+1,\,K+1}(\theta) \tag{9b}$$

식 (9)에 대한 설명은 식 (5)에 대한 설명과 같은 방법으로 가능하다. 유의할 점은 식 (5)와 (9)가 서로 짝이 맞는 다는 점이다. 또 한가지 유의할 점은 식 (9)가 M/G/1 대기행렬 뿐만 아니라 M/G/1/K+1 대기행렬에서도 동일하다는 점이다. 사실 식 (5)와 (9)의 관계는 GI/M/1/K 대기행렬과 M/G/1/K+1 대기행렬 간에 성립하는 쌍대관계에 따른 것이다(Chae *et al*., 2003). 쌍대관계를 이용하면 식 (9)의 해로부터 식(5)의 해를 얻을 수 있다.

식 (9)의 해를 간단한 형태로 표현하기 위해서 $\{x_1,\cdots,x_K\}$와 $\{R_1,\cdots,R_K\}$를 다음과 같이 정의한다. M/G/1/K+1 대기행렬의 이탈시점에 내재된 마코프연쇄의 안정상태 확률을 $\{\pi_0,\,\pi_1,\cdots,\pi_K\}$라 하고,

$$x_1 = (\pi_0 + \pi_1)/\pi_0$$

$$x_n = \pi_n/\pi_0, \quad 2 \leq n \leq K$$

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad 1 \leq n \leq K \tag{10a}$$

라 하자. $x_1 = (a_0)^{-1}$이고, $\{x_2,\cdots,x_K\}$를 구하는 방정식은

$$x_1 = x_1(a_0 + a_1) + x_2 a_0 \tag{10b}$$

$$x_n = \sum_{i=1}^{n+1} x_i a_{n+1-i}, \quad 2 \leq n \leq K-1 \tag{10c}$$

인데, 비례관계 속성(Lee, 2006)에 의하면 $\{x_1,\cdots,x_K\}$는 모든 M/G/1/K+m, $m \geq 1$, 대기행렬에서 동일하다. Chydzinski (2004)가 구한 식 (9)의 해는 다음과 같다.

$$\beta^*_{K-0,K+1}(\theta) = \sum_{i=1}^{K} x_i \sigma^*_{K+1-i}(\theta)/x_K \tag{11a}$$

$$\beta^*_{K-n,K+1}(\theta) = R_n \beta^*_{K-0,K+1}(\theta) - \sum_{i=1}^{n} R_i \sigma^*_{n+1-i}(\theta),$$

$$1 \leq n \leq K-1 \tag{11b}$$

식 (5)의 해를 표현하기 위해서 식 (10)에 대응하는 식을 다음과 같이 정의한다.

$$x_1^{'} = (d_0)^{-1} \tag{12a}$$

$$x_1^{'} = x_1^{'}(d_0 + d_1) + x_2^{'} d_0 \tag{12b}$$

$$x_n^{'} = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^{'} d_{n+1-i}, \quad 2 \leq n \leq K-1 \tag{12c}$$

$$R_n^{'} = \sum_{i=1}^{n} x_i^{'}, \quad 1 \leq n \leq K \tag{12d}$$

이는 식 (7)로 정의된 a_i를 식 (3)으로 정의된 d_i로 교체한 것이다. 그러면, 식 (5)의 해는

$$\alpha^*_{0,0}(\theta) = \sum_{i=1}^{K} x_i^{'} \rho^*_{K+1-i}(\theta)/x_K^{'} \tag{13}$$

$$\alpha^*_{n,0}(\theta) = R_n^{'} \alpha^*_{0,0}(\theta) - \sum_{i=1}^{n} R_i^{'} \rho^*_{n+1-i}(\theta), \tag{14}$$

$$1 \leq n \leq K-1$$

인데, 이는 (11)의 x_i와 R_i를 각각 (12)로 정의된 $x_i^{'}$과 $R_i^{'}$으로 교체하고, 식 (8)로 정의된 $\sigma^*_j(\theta)$를 식 (4)로 정의된 $\rho^*_j(\theta)$로

교체한 것이다. 아울러, 상태의 배열이 역순으로 바뀌었는데, $\beta^*_{K-n,K+1}(\theta)$의 $K-n$과 $K+1$은 각각 $\alpha^*_{n,0}$의 n과 0로 교체되었다.

3. GI/M/1 대기행렬의 $\alpha^*_{n+m,m}(\theta)$

2장에서 GI/M/1/K+m 대기행렬의 $\alpha^*_{n+m,\,m}(\theta)$가 GI/M/1/K 대기행렬의 $\alpha^*_{n,\,0}(\theta)$와 일치함을 보였다. 그런데, $K\to\infty$ 이면 GI/M/1/K+m 대기행렬과 GI/M/1/K 대기행렬이 모두 GI/M/1 대기행렬이 되므로, GI/M/1 대기행렬에서는 $\alpha^*_{n+m,\,m}(\theta)=\alpha^*_{n,\,0}(\theta)$ 관계가 성립한다, $m,\ n\geq 0$.

[비고 1]에 의하면 M/G/1/K+1 대기행렬에서 $\beta^*_{K,K+1}(\theta)=\beta^*_{\bullet,K+1}(\theta)$ 관계가 성립하는데, 이에 대응하는 GI/M/1/K 대기행렬에서의 관계는

$$\alpha^*_{0,0}(\theta)=\alpha^*_{\bullet,0}(\theta) \tag{15}$$

이다. 식 (15)는 모든 $K\geq 1$에 대해서 성립하므로 $K\to\infty$ 인 GI/M/1 대기행렬에서도 성립한다. 따라서, GI/M/1 대기행렬에서는 식 (2)에 의해서

$$\alpha^*_{0,0}(\theta)=\mu\,\frac{r-A^*(\theta)}{\theta-\mu+\mu r} \tag{16}$$

이다. 즉, 식 (13)은 $K\to\infty$ 경우에 식 (16)이 된다. 그리고, 식 (14)는 모든 $n\geq 1$에 대해서 유효하다.

마지막으로 식 (1)에 대응하는 관계를 찾는다. 식 (1)에서 π_{b-1}은 M/G/1 대기행렬에서 성립하는 PASTA(Wolff, 1982) 속성에 의해서 임의시점에 $b-1$명의 고객이 있을 확률과 같다. 그리고, 우변의 λ/μ는 $\sum_{b=2}^{\infty}\pi_{b-1}$ 로서 임의시점에 서버가 바쁠 확률을 의미한다. 따라서, (1)은 서버가 바쁠 때 진행중인 서비스의 잔여시간은 평형(equilibrium) 분포를 따름을 의미한다.

서비스는 바쁜기간 중에만 진행되므로 잔여서비스시간은 바쁜기간 중에만 의미가 있다. 반면에, 잔여도착간격은 바쁜기간 뿐만 아니라 유휴기간 중에도 의미가 있다. GI/M/1 대기행렬에서 성립하는 관계는

$$\frac{1-A^*(\theta)}{\theta E[A]}=P^*_0(\theta)+\frac{\lambda}{\mu}\,\alpha^*_{\bullet,0}(\theta) \tag{17}$$

인데, 이에 대한 해석 및 $P^*_0(\theta)$의 정의는 다음과 같다. 식 (17)의 좌변은 도착간격의 평형분포를 의미하고, 우변의 λ/μ는 임의시점에 서버가 바쁠 확률이다. GI/M/1 대기행렬에서 서버가 바쁜 동안의 서비스과정은 포아송 과정이므로PASTA 속성에 의하여 이탈시점 기준 잔여도착간격은 바쁜기간 중의 임의시점에서의 잔여도착간격과 확률적으로 동일하다. 그리고, 식 (2)에 의해서 이탈시점 기준 잔여도착간격은 이탈시에 남긴 고객수 m과 무관하게 확률적으로 동일하다, $m\geq 0$.

t시점의 고객수를 $N(t)$라 하고, t시점에 진행중인 도착간격의 잔여시간을 $X(t)$라 하자. 그리고, $P_0(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$P_0(x)\,dx=\lim_{t\to\infty}\Pr\{N(t)=0,\ x<X(t)<x+dx\}$$

바쁜기간과 이에 후속하는 유휴기간을 합친 재생사이클의 길이를 C라 하면, 재생보상정리에 의해서

$$P_0(x)\,dx=\Pr\{\alpha(\,\bullet\,,0)>x\}dx/E[C] \tag{18}$$

인데, 알려진 결과는 $E[C]=\{\lambda(1-r)\}^{-1}$ 이다. 식 (17)의 $P^*_0(\theta)$의 정의는 $P_0(x)$의 라플라스 변환이므로, (18)로부터 다음을 얻는다.

$$P^*_0(\theta)=\lambda(1-r)\,\frac{1-\alpha^*_{\bullet,0}(\theta)}{\theta}$$

참고문헌

Asmussen, S. (1981), Equilibrium Properties of the M/G/1 Queue, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, **58**, 267-281.

Chae, K-C., Kim, K-H., and Kim, N-K. (2006), Remarks on the Remaining Service Time upon Reaching a Target Level in the M/G/1 Queue, To Appear in *Operations Research Letters*.

Chae, K-C., Yeo, M-S., Kim, N-K., and Ahn, C-W. (2003), An Interpretation and Extensions of Duality Relations among Queueing Systems, *Journal of the Korean Operations Research and Management Science Society*, **28**(1), 37-49.

Chydzinski, A. (2004), On the Remaining Service Time upon Reaching a Given Level in M/G/1 Queues, *Queueing Systems*, **47**, 71-80.

Fakinos, D. (1982), The Expected Remaining Service Time in a Single Server Queue, *Operations Research*, **30**, 1014-1018.

Green, L. (1982), A Limit Theorem on Subintervals of Interrenewal Times, *Operations Research*, **30**, 210-216.

Lee, H-W. (2006), *Queueing Theory*, 3rd Edition, Sigma Press, Seoul, Korea.

Takács, L. (1962), *Theory of Queues*, Oxford University Press, Oxford, UK (reprinted in 1982 by Greenwood Press, Westport, CT, USA).

Wolff, R. W. (1982), Poisson Arrivals See Time Averages, *Operations Research*, **30**, 223-231.