

# 가변두께를 가지는 원판의 진동해석에 관한 연구

## Vibration Analysis of Circular Plate with Continuously Varying Thickness

신 영 재<sup>1)</sup> · 전 수 주<sup>2)</sup> · 윤 종 학<sup>3)</sup> · 유 영 찬<sup>4)</sup>  
*Shin, Young Jae · Jaun, Su Ju · Yun, Jong Hak · Yoo, Yeong Chan*

요 약 : 본 논문은 원형 판의 진동 해석에 미분변환법을 적용하였다. 계산된 수치적인 결과들은 이전의 연구결과들과 비교되었다. 그 결과를 기존의 연구 결과와 비교하여 미분변환법의 타당성을 검증하였고, 두께 형상과 경계조건 및 내경변화에 의한 고유진동수의 변화를 해석 및 고찰하였다. 또한 가변 두께를 가지는 원판 해석에 있어 미분변환법의 유용성을 입증하였다.

ABSTRACT : This paper presents the results of the use of the differential transformation technique in analyzing the free vibration of circular plates. calculations were carried out and were compared with previously published results. The results that were obtained when this method was used coincide with the results of previous applications that had been reported in past works. The present analysis shows the usefulness and validity of differential transformation in solving a solid-circular and annular-plate problem in terms of free-vibration responses.

핵심용어 : 미분변환법, 원형판, 축대칭진동

KEYWORDS : Differential Transformation Method, circular plate, free axisymmetric vibration

### 1. 서론

원판은 구조물 및 기계를 구성하는 기본 구조물로서 기계설계시 매우 중요한 요소 중의 하나이다. 이러한 원판은 건축구조물, 마이크로폰(Microphones), 확성기(Loud-speakers), CD, 펌프(Pumps), 압축기(Compressors), 압력 조절기(Pressure regulators) 등 다양한 분야에 적용되고 있다. 그러나 원판의 해석 시 특이성 문제(Singularity problem)로 인한 어려움이 있으며, 이와 같은 문제를 해결하기 위해 많은 연구자들은 다양한 방법을 이용하여 연구를 수행하였다.

Selmane(1999) 등은 가변단면을 가지는 원판의 고유진동수를 해석하였으며, Zhou(2001) 등은 원판의 비선형 진동과 좌굴에 대하여 Shooting method를 이용하여 연구를 수행하였다. 또한 Kovacs(2001)는 링 형상의 얇은 원판에 대하여 연구하였고, Laura(1995)와 Gutierrez(1995, 1996)는 균열을 가지는 다양한 원판과 비균질 원판에 대한 해석 및 원판의 중간 지점에 단

순지지를 가지는 원판과 좌굴에 대해 해석하였다. Thomas(2002)는 외경의 경계조건이 자유일 경우 원판의 강제진동에 대한 연구를 수행하였고, Utku(2000)는 환형판(Annular plate)에 다수의 탄성지반 모델을 적용하여 고유진동수를 연구 하였으며, Wu(2001)는 Generalized differential quadrature rule에 의한 다양한 두께를 가지는 원판의 고유진동수를 해석하였다. 이와 같이 원판에 대한 연구는 다양한 방법으로 많은 연구자들에 의하여 지금까지 활발히 연구되고 있다.

이러한 원판에 대한 연구들은 해석적 방법과 수치적인 방법을 통하여 행하여지고 있지만, 해석적 방법으로 원판을 해석할 경우 복잡한 지배방정식과 특이성 문제로 인하여 해를 얻기가 어렵고, 해를 얻더라도 많은 시간이 소요 된다. 이와 같은 문제를 해결하기 위해 원판의 해석 시 간단한 수식관계에 의한 빠른 수렴성을 갖는 수치해석 방법이 요구되며, 이와 같은 요구조건을 충족하는 수치해석 방법 중의 하나가 미분변환법(Differential transformation method)이다. 이 수치해

1) 교신저자, 정회원, 안동대학교 기계공학부 교수  
(Tel : 054-820-5435, Fax : 054-841-1630, E-mail : yjshin@andong.ac.kr)  
2) 안동대학교 대학원(suju25@empal.com)  
3) 안동대학교 대학원 박사과정(yun1121@anuis.andong.ac.kr)  
4) 정회원, 안동대학교 건축공학부 조교수(ycyoo@andong.ac.kr)

본 논문에 대한 토의를 2006년 8월 30일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

석법은 Zhou(1986)가 전기회로에 관한 연구에서 선형과 비선형 초기값 문제의 해를 구하기 위해 처음 사용하였으며, Chen과 Ho(1999)는 진동문제에 이 방법을 처음 적용하였다. 그리고 Malik(1998)등은 미분변환법을 적용한 연속시스템(Continuous system)에서 진동을 해석하여 미분변환법의 타당성과 빠른 수렴성을 검증하였다. 이와 같이 미분변환법은 많은 연구자들에 의해 활발히 연구되고 있으며 다양한 공학 분야에 적용되고 있다.

따라서 본 연구의 목적은 가변 두께를 가지는 원판의 지배방정식을 유도하고, 유도된 지배방정식과 경계조건에 미분변환법을 적용하여 고유진동수를 해석하는 것으로, 외경의 경계조건이 각각 고정(Clamped)과 단순지지(Simply supported) 그리고 자유(Free)인 경우와 내경의 경계조건이 자유인 경우에 대하여 수치해석을 수행하였다. 그 결과를 기존의 연구 결과와 비교하여 미분변환법의 타당성을 검증하였고, 두께 형상과 경계조건 및 내경변화에 의한 고유진동수의 변화를 해석 및 고찰하였다. 또한 가변 두께를 가지는 원판 해석에 있어 미분변환법의 유용성을 입증하였다.

## 2. 지배방정식

회전관성(Rotary inertia), 전단변형(Shear deformation) 및 워핑(Warping)을 가지는 원판은 복잡한 거동 특성으로 인하여 수치해석 시 상당한 어려움을 가진다. 이러한 이유로 본 연구에서는 원판의 축대칭진동(Axisymmetric vibration)에 국한된 연구만을 수행한다. 휨강성(Flexural rigidity)을 고려한 가변 두께를 가지는 원판의 지배방정식을 유도하기 위하여, 원판의 축대칭진동 해석 시 원판의 중심축으로부터 같은 거리의 휨변위는 일정하다고 가정하고, 원판의 휨변위  $w$ 는 두께  $h$ 에 비해 매우 작다고 가정한다.

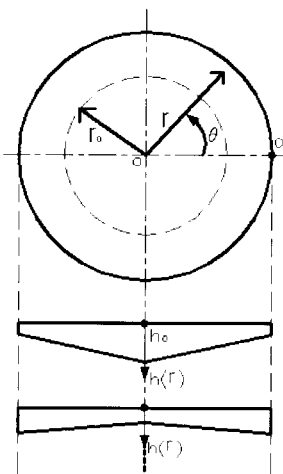


그림 1. 가변 두께를 가지는 원판

본 연구에서 사용된 가변 두께를 가지는 그림 1과 같은 원판의 지배방정식을 Arthur에 의해 식 (1)과 같다.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left[ D(r) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) - \frac{\partial D(r)}{\partial r} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] \right\} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

식(1)의 일반해를  $w(r,t) = W(r)e^{i\lambda t}$  로 가정하여 식(1)에 대입하면

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \left[ D(r) \frac{d}{dr} \left( \frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} \right) - \frac{dD}{dr} \left( \frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dW}{dr} \right) \right] \right\} - \rho h \lambda^2 W = 0 \quad (2)$$

와 같이 표현되고, 이것을 다시 정리하면 식(3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$DrW^{IV} + 2(D+rD')W''' + \left( -\frac{D}{r} + (2+\mu)D' + rD'' \right)W'' + \left( \frac{D}{r^2} - \frac{D}{r} + \mu D' \right)W' - \rho h \lambda^2 rW = 0 \quad (3)$$

상기의 식은 가변 두께를 가지는 원판의 자유 축대칭진동(Free axisymmetric vibration)에 대한 지배방정식이 된다.

일반적인 형상의 원판을 해석하기 위하여 단위길이당 두께 함수를  $f(r) = (\gamma r^n + 1)$ 로 가정하면, 휨강성은 식(4)와 같이 표현된다.

$$D(r) = D_0 g(r) \quad (4)$$

여기서  $\gamma$ 와  $n$ 은 원판 형상에 의해 결정되는 값들이며,  $D_0 = \frac{Eh_0^3}{12(1-\mu^2)}$ ,  $g(r) = f^3(r)$ 이다.

두께함수와 휨강성 그리고 무차원 변수  $\bar{r} = \frac{r}{a}$ 를 식(3)에 대입하여 정리하면, 가변두께를 가지는 원판의 자유 축대칭진동에 대한 지배방정식은 아래와 같이 유도된다.

$$g\bar{r}W^{IV} + 2(g+\bar{r}g')W''' + \left( -\frac{g}{\bar{r}} + (2+\mu)g' + \bar{r}g'' \right)W'' + \left( \frac{g}{\bar{r}^2} - \frac{g}{\bar{r}} + \mu g' \right)W' - \Omega^2 f\bar{r}W = 0 \quad (5)$$

여기서  $\Omega^2$ 은 무차원 고유진동수(Non-dimensional natural frequency)로  $\Omega^2 = \frac{\rho h_0 a^4 \lambda^2}{D_0}$  이다.

본 연구에서는 가변 두께를 가지는 원판의 외경의 경계조건으로 각각 고정과 단순지지 그리고 자유인 경계조건을 고려하였으며, 이를 수식으로 표현하면 아래와 같다.

(1) 원형판의 경우

•  $\bar{r} = 0$ 일 때

$$W'(0) = 0, W'''(0) = 0 \quad (6)$$

•  $\bar{r} = 1$ 일 때

$$\text{고 정 : } W(1) = 0, W'(1) = 0 \quad (7)$$

단순지지 :  $W(1) = 0,$

$$W''(1) + \mu W'(1) = 0 \quad (8)$$

자 유 :  $W'''(1) + \mu W'(1) = 0,$

$$W'''(1) + W''(1) - W'(1) = 0 \quad (9)$$

(2) 환형판의 경우

•  $\bar{r} = v$ 일 때

$$W''(v) + \frac{\mu}{v} W'(v) = 0,$$

$$W'''(v) + \frac{1}{v} W''(v) - \frac{1}{v^2} W'(v) = 0 \quad (10)$$

여기서  $v = \frac{r_0}{a}$  이다.

•  $\bar{r} = 1$ 일 때

$$\text{고 정 : } W(1) = 0, W'(1) = 0 \quad (11)$$

단순지지 :  $W(1) = 0,$

$$W''(1) + \mu W'(1) = 0 \quad (12)$$

자 유 :  $W'''(1) + \mu W'(1) = 0,$

$$W'''(1) + W''(1) - W'(1) = 0 \quad (13)$$

### 3. 미분변환법

미분변환법은 테일러 시리즈(Taylor series expansion)에 기본을 두었다. 이 방법은 선형과 비선형의 공학문제에 적용할 수 있고, 간단한 순환관계에 의해서 해를 구할 수 있으며, 해의 정확도가 대단히 높은 수치해석 기법이다.

임의의 원함수(Original function)에 대한 미분변환(Differential transformation)은 다음과 같이 정의 된다

$$Y(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0} \quad (14)$$

여기서  $Y(k)$ 를 T-function이라 한다.

$Y(k)$ 의 미분역변환(Differential inverse transformation)은 다음과 같이 정의 된다.

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x-x_0)^k Y(k) \quad (15)$$

여기서 미분변환의 정의 식(14)를 미분역변환 식(15)에 대입하여 다시 쓰면 원함수  $y(x)$ 는 다음과 같이 유도된다.

$$y(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0} \quad (16)$$

상기 식(16)에서 미분변환은 테일러 시리즈로부터 유래되었다는 것을 알 수 있다.

표 1은 미분변환법에 관한 기본적인 연산의 예를 나타낸다.

실제의 적용에 있어서는  $y(x)$ 는 근사적으로 유한개의 항만을 고려하여 다음과 같이 표시된다.

$$y(x) = \sum_{k=0}^n (x-x_0)^k Y(k) \quad (17)$$

여기서  $n$ 은 자연수로서 해의 수렴도에 의해 결정되어진다.

표 1. 원함수와 미분변환 함수의 관계

Original function	T-function
$w(x) = y(x) \pm z(x)$	$W(k) = Y(k) \pm Z(k)$
$z(x) = \lambda y(x)$	$Z(k) = \lambda Y(k)$
$w(x) = \frac{d^n y(x)}{dx^n}$	$W(k) = (k+1)(k+2) \cdot (k+n) Y(k+n)$
$w(x) = y(x)z(x)$	$W(k) = \sum_{l=0}^k Y(l)Z(k-l)$
$w(x) = x^m$	$W(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k x^m}{dx^k} \right]_{x=x_0}$

### 4. 미분변환법의 적용

가변두께를 가지는 원판의 자유 축대칭진동에 대한 무차원 지배방정식 (5)에 적용이 용이하게 목록화된 표 1을 사용하여 미분변환법의 기본연산을 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{l=0}^k (k+1-l)(k+2-l)(k+3-l)(k+4-l) \bar{W}(k+4-l) \sum_{n=0}^l R_3(n) G(l-n) \\
 & + 2 \sum_{l=0}^k (k+1-l)(k+2-l)(k+3-l) \bar{W}(k+3-l) \sum_{n=0}^l R_2(n) G(l-n) \\
 & + 2 \sum_{l=0}^k (k+1-l)(k+2-l)(k+3-l) \bar{W}(k+3-l) \sum_{n=0}^l R_3(n)(l-n) G(l-n) \\
 & - \sum_{l=0}^k (k+1-l)(k+2-l) \bar{W}(k+2-l) \sum_{n=0}^l R_1(n) G(l-n) \\
 & + (2+\mu) \sum_{l=0}^k (k+1-l)(k+2-l) \bar{W}(k+2-l) \sum_{n=0}^l R_2(n)(l+1-n) G(l+1-n) \\
 & + \sum_{l=0}^k (k+1-l)(k+2-l) \bar{W}(k+2-l) \sum_{n=0}^l R_3(n)(l+1-n)(l+2-n) G(l+2-n) \\
 & + \sum_{l=0}^k (k+1-l) \bar{W}(k+1-l) G(l) \\
 & - \sum_{l=0}^k (k+1-l) \bar{W}(k+1-l) \sum_{n=0}^l R_1(n)(l+1-n) G(l+1-n) \\
 & + \mu \sum_{l=0}^k (k+1-l) \bar{W}(k+1-l) \sum_{n=0}^l R_2(n)(l+1-n)(l+2-n) G(l+2-n) \\
 & - \mathcal{L}^2 \sum_{l=0}^k \bar{W}(k-l) \sum_{n=0}^l R_3(n) F(l-n) = 0 \tag{18}
 \end{aligned}$$

여기서  $\bar{W}, F, G$  함수는  $W, f, g$  함수의 미분변환이며  $R_1, R_2, R_3$  함수는  $r, r^2, r^3$ 의 미분변환을 나타낸다.

가변 두께를 가지는 원판의 경계조건식(6-13)에 대한 미분변환은 다음과 같이 표현한다.

#### (1) 원형판의 경우

- $\bar{r}=0$ 일 때

$$\sum_{k=0}^n k(-x_0)^{(k-1)} \bar{W}(k) = 0 \tag{19}$$

$$\sum_{k=0}^n k(k-1)(k-2)(-x_0)^{(k-3)} \bar{W}(k) = 0 \tag{20}$$

- $\bar{r}=1$ 일 때

고 정 :

$$\sum_{k=0}^n (1-x_0)^k \bar{W}(k) = 0 \tag{21}$$

$$\sum_{k=0}^n k(1-x_0)^{(k-1)} \bar{W}(k) = 0 \tag{22}$$

단순지지 :

$$\sum_{k=0}^n (1-x_0)^k \bar{W}(k) = 0 \tag{23}$$

$$\sum_{k=0}^n [k(k-1)(1-x_0)^{(k-2)} \bar{W}(k) + \mu k(1-x_0)^{(k-1)} \bar{W}(k)] = 0 \tag{24}$$

자 유 :

$$\sum_{k=0}^n [k(k-1)(1-x_0)^{(k-2)} \bar{W}(k) + \mu k(1-x_0)^{(k-1)} \bar{W}(k)] = 0 \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n [k(k-1)(k-2)(1-x_0)^{(k-3)} \bar{W}(k) + k(k-1)(1-x_0)^{(k-2)} \bar{W}(k) \\
 - k(1-x_0)^{(k-1)} \bar{W}(k)] = 0 \tag{26}
 \end{aligned}$$

#### (2) 환형판의 경우

- $\bar{r}=v$ 일 때

$$\sum_{k=0}^n [k(k-1)(v-x_0)^{(k-2)} \bar{W}(k) + \frac{\mu}{v} k(v-x_0)^{(k-1)} \bar{W}(k)] = 0 \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n [k(k-1)(k-2)(v-x_0)^{(k-3)} \bar{W}(k) + \frac{1}{v} k(k-1)(v-x_0)^{(k-2)} \bar{W}(k) \\
 - \frac{1}{v^2} k(v-x_0)^{(k-1)} \bar{W}(k)] = 0 \tag{28}
 \end{aligned}$$

- $\bar{r}=1$ 일 때

고 정 :

$$\sum_{k=0}^n (1-x_0)^k \bar{W}(k) = 0 \tag{29}$$

$$\sum_{k=0}^n k(1-x_0)^{(k-1)} \bar{W}(k) = 0 \tag{30}$$

단순지지 :

$$\sum_{k=0}^n (1-x_0)^k \bar{W}(k) = 0 \tag{31}$$

$$\sum_{k=0}^n [k(k-1)(1-x_0)^{(k-2)} \bar{W}(k) + \mu k(1-x_0)^{(k-1)} \bar{W}(k)] = 0 \tag{32}$$

자 유 :

$$\sum_{k=0}^n [k(k-1)(1-x_0)^{(k-2)} \bar{W}(k) + \mu k(1-x_0)^{(k-1)} \bar{W}(k)] = 0 \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n [k(k-1)(k-2)(1-x_0)^{(k-3)} \bar{W}(k) + k(k-1)(1-x_0)^{(k-2)} \bar{W}(k) \\
 - k(1-x_0)^{(k-1)} \bar{W}(k)] = 0 \tag{34}
 \end{aligned}$$

### 5. 수치해석 결과 및 고찰

본 연구에서 원판의 진동해석은 원형판(Solid circular plate)과 환형판의 두 경우로 나누어 수치해석을 수행하였으며, 여기서  $\mu$ 는 원판해석 시 일반적으로 사용되는 0.3으로 가정하였다.

가변두께를 가지는 원판의 축대칭진동을 해석하기 위해서, 미분변환된 지배방정식(18)과 각 경계조건식(19-34)으로 다음과 같은 매트릭스 방정식을 구성한다.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{W}(0) \\ \overline{W}(1) \\ \vdots \\ \overline{W}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

상기 방정식의 해인  $\overline{W}(0), \overline{W}(1), \dots, \overline{W}(n)$ 가 0이 아닌 값을 가지기 위해서는 식(35)의 행렬식이 0이 되어야 한다.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} = 0 \quad (36)$$

고유진동수 방정식(Natural frequency equation)인 상기의 식으로 부터 가변 두께를 가지는 원판에 대한 무차원 고유진동수를 구할 수 있다.

#### 5.1 원형판

가변 두께를 가지는 원형판의 축대칭진동을 해석하기 위하여 외경의 경계조건이 각각 고정과 단순지지 그리고 자유인 경우 미분변환법을 이용한 수치해석을 수행하였다.

표 2는 가변두께 원판의 지배방정식과 각 경계조건에 미분변환법을 적용하여 축대칭진동을 하는 원형판의 제1차 고유진동수를 수치적으로 구한 결과이다. 이때 외경의 경계조건은 각각 고정과 단순지지일 경우이며, 원판의 다양한 형상을 다루기 위해 두께변화( $n=1,2,3$ ) 및 단면 형상의 기울기변화( $\gamma=0.1, -0.1$ )를 고려하였다. 두 경계조건에서  $\gamma$ 가 0인 경우 미분변환법을 이용한 수치해석결과와 미분구적법(Generalized differential quadrature) 및 Rayleigh-Ritz method을 적용하여 구한 기존의 결과가 정확하게 일치함을 알 수 있으며, 두 경계조건에서  $\gamma$ 가 0.1과 -0.1이고  $n$ 의 값이 1일 경우에는 기존해석법의 결과와 본 연구의 결과는 작은 오차를 가지며,  $n$ 의 값이 2와 3일 경우에는 본

연구 결과와 기존의 해석결과가 거의 일치함을 알 수 있다.

표 2. 축대칭 가변두께 원판의 제 1고유진동수

n	$\gamma$	Method		
		DQ	Rayleigh-Ritz	DT
simply supported boundary condition				
1	0	4.936	4.935	4.935
	0.1	5.206	5.206	5.216
	-0.1	4.664	4.664	4.655
2	0	4.936	4.935	4.935
	0.1	5.114	5.114	5.114
	-0.1	4.758	4.758	4.758
3	0	4.936	4.935	4.935
	0.1	5.070	5.060	5.060
	-0.1	4.807	4.807	4.807

표 3은 표 2와 같은 조건하에서 제2차 고유진동수를 구한 결과이다. 외경의 경계조건이 각각 고정과 단순지지이고  $\gamma=0, n=1, 2, 3$ 일 경우 본 연구에 의한 수치 해석 결과는 미

표 3. 축대칭 가변두께 원판의 제 2고유진동수

	$\gamma$	Method		
		DQ	Rayleigh-Ritz	DT
simply supported boundary condition				
1	0	29.753	29.720	29.720
	0.1	31.347	31.346	31.365
	-0.1	28.138	28.078	28.056
2	0	29.753	29.720	29.720
	0.1	30.772	30.768	30.766
	-0.1	28.667	28.644	28.643
3	0	29.753	29.720	29.720
	0.1	30.554	30.445	30.445
	-0.1	28.956	28.962	28.962

분구적법과 Rayleigh-Ritz method를 이용한 기존의 수치해석 결과와 정확하게 일치함을 알 수 있다. 외경의 경계조건이 단순지지일 경우  $n$ 의 값이 3이고  $\gamma$ 가 0.1과 -0.1일 때, 본 연구의 수치해석결과는 Rayleigh-Ritz method를 이용한 결과와 정확하게 일치함을 알 수 있으며,  $n$ 의 값이 1이고

$\gamma$ 가 0.1과 -0.1일 경우와  $n$ 의 값이 2이고  $\gamma$ 가 0.1과 -0.1일 경우에는 본 연구결과와 기존의 연구결과는 작은 오차를 가지고 있다. 외경의 경계조건이 고정인 경우  $n$ 의 값이 2이고  $\gamma$ 가 0.1과 -0.1일 때 본 연구의 수치 해석결과와 Rayleigh-Ritz method에 의한 수치 해석결과는 정확하게 일치하고 있으며, 다른  $n$ 값인 경우에는 기존의 결과와 본 연구에 의해 구하여진 결과가 작은 오차를 보인다.

표 4. 두께가 일정한 원형판의 제 1 고유진동수

k	$x_0$					
	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1
8	10.105	10.188	10.221	10.286	10.427	10.326
9	10.163	10.212	10.215	10.226	10.396	10.806
10	10.227	10.218	10.216	10.209	10.169	10.113
11	10.221	10.216	10.216	10.216	10.210	10.199
12	10.215	10.215	10.215	10.215	10.216	10.214
13	10.215	10.215	10.215	10.215	10.220	10.220
14	10.215	10.215	10.215	10.215	10.215	10.215
15	10.215	10.215	10.215	10.215	10.215	10.215

표 5. 두께가 일정한 원형판의 제 2 고유진동수

k	$x_0$					
	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1
11	35.131	40.614	39.704	38.649	39.212	-
12	-	40.209	39.777	39.427	36.170	36.109
13	42.792	39.691	39.773	39.920	38.065	33.618
14	38.775	39.728	39.771	39.829	43.338	38.775
15	39.466	39.779	39.771	39.754	39.867	41.078
16	39.937	39.775	39.771	39.767	39.606	39.675
17	39.812	39.771	39.771	39.772	39.708	39.219
18	39.755	39.771	39.771	39.771	39.806	39.796
19	39.767	39.771	39.771	39.771	39.773	39.941
20	39.775	39.771	39.771	39.771	39.770	39.772
21	39.749	39.771	39.771	39.771	39.771	39.763
22	39.969	39.771	39.771	39.771	39.771	39.773
23	38.294	39.771	39.771	39.771	39.771	39.771
24	-	39.771	39.771	39.771	39.771	39.771

표 4는 외경의 경계조건이 고정일 때 두께가 일정한 원형판의 제1차 무차원 고유진동수를 구하기 위해 미분변환법을 적용하여 수치해석을 수행하였다. 그리고 제1차 무차원 고유진동수를  $x_0$ 의 값이 0.1에서 1까지 변화할 경우 급수항

(Series size)에 따른 수렴 경향을 나타내었다. 급수항이 12개일 때  $x_0$ 가 0.1~0.7의 값에서 수렴하는 것을 알 수 있고,  $x_0$ 의 값이 0.9와 1일 때에는 급수항이 14개에서 수렴하여 상대적으로 낮은 수렴도를 나타내고 있으며, 이와 같은 수렴된 각각의  $x_0$ 값은 표의 어두운 부분으로 표현하였다.

표 5는 표 4와 같은 조건에서  $x_0$ 의 변화에 대한 제2차 무차원 고유진동수의 수렴도를 보여준다.  $x_0$ 가 0.5인 경우 급수항이 15개에서 수렴하여 높은 수렴도를 나타내고, 급수항이 23개인 경우에는  $x_0=0.1$ 을 제외한 모든 값에서 수렴하고 있다. 그리고  $x_0$ 가 0.1일 때 급수항이 23개까지는 큰 오차 범위의 고유진동수를 구할 수 있지만, 급수항의 개수가 24개 부터는 고유진동수를 구할 수 없다.

표 6. 제 1 고유진동수 :  $f(r) = 1 - 0.1r^3$

k	$x_0$					
	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1
10	9.597	9.577	9.574	9.453	5.691	-
11	9.561	9.576	9.575	9.654	-	-
12	9.587	9.576	9.574	9.529	6.382	-
13	9.578	9.575	9.574	9.601	-	-
14	9.573	9.575	9.574	9.559	7.053	-
15	9.576	9.574	9.574	9.583	-	-
16	9.575	9.574	9.574	9.570	7.665	-
17	9.567	9.574	9.574	9.577	-	-
18	9.635	9.574	9.574	9.573	8.187	-
19	9.100	9.574	9.574	9.575	11.651	-
20	-	9.574	9.574	9.574	8.606	-
21	-	9.574	9.574	9.575	10.708	-
22	-	9.574	9.574	9.574	8.924	-
23	-	9.574	9.574	9.574	10.230	-
24	-	9.574	9.574	9.574	-	-
25	-	9.574	9.574	9.574	9.960	-
26	-	9.574	9.574	9.574	9.308	-
27	-	9.574	9.574	9.574	9.802	-
28	-	9.574	9.574	9.574	9.410	-
29	-	9.574	9.574	9.574	-	-

표 6은  $n=3$ ,  $\gamma=-0.1$ 의 두께함수를 가지는 원형판의 축대칭진동에서 외경의 경계조건이 고정일 때, 미분변환법에 의한 제1차 무차원 고유진동수를 구하여,  $x_0$ 의 값이 0.1~1까지 변화할 경우 급수항의 변화에 대한 수렴 특성을 나타내었

다. 급수항이 12개일 때  $x_0$ 가 0.5에서 수렴하여 높은 수렴도를 보이며, 급수항의 개수가 20개인 경우에는  $x_0$ 의 값이 0.3~0.7의 범위에서 수렴함을 알 수 있다. 이와 같이 급수항에 따른 수렴된  $x_0$ 의 값은 표에서 어두운 부분으로 표현하였다.  $x_0$ 가 0.1인 경우에는 급수항이 19개까지 큰 오차범위의 고유진동수를 구할 수 있지만, 급수항이 20~29개 사이에서는 고유진동수를 구할 수 없었다.  $x_0$ 의 값이 0.9에서는 급수항이 18~28개 범위에서 오차가 큰 고유진동수를 구할 수 있으나, 급수항이 29개에서는 고유진동수를 구할 수 없었다. 그리고  $x_0$ 가 1인 경우에는 급수항을 29개까지 사용하더라도 고유진동수를 구할 수 없었다.

표 7. 제 2 고유진동수 :  $f(r) = 1 - 0.1r^3$

k	$x_0$					
	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1
12	-	38.227	38.257	39.031	-	-
13	36.358	38.216	38.258	37.643	-	-
14	38.065	38.292	38.260	38.665	-	-
15	39.081	38.262	38.258	38.019	-	-
16	38.066	38.256	38.258	38.415	-	-
17	38.281	38.259	38.258	38.165	-	-
18	37.446	38.258	38.258	38.313	38.626	-
19	-	38.258	38.258	38.225	20.620	-
20	-	38.258	38.258	38.276	-	-
21	-	38.258	38.258	38.247	23.819	-
22	-	38.258	38.258	38.264	-	-
23	-	38.258	38.258	38.254	26.511	-
24	-	38.258	38.258	38.260	-	-
25	-	38.258	38.258	38.257	28.882	-
26	-	38.258	38.258	38.258	-	-
27	-	38.258	38.258	38.258	30.970	-
28	-	38.258	38.258	38.258	-	-
29	-	38.258	38.258	38.258	-	-

표 7은 표 6과 동일한 조건에서, 제2차 무차원 고유진동수에 대하여  $x_0$ 와 급수항의 변화에 따른 수렴 경향을 표시한다. 급수항이 15개일 경우  $x_0$ 가 0.5에서만 수렴하여 높은 수렴도를 보이며, 그다음으로 급수항의 개수가 18개에서  $x_0$ 의 값이 0.3일 때 수렴한다. 그리고  $x_0$ 의 값이 0.7일 경우 급수항의 개수가 26개에서 수렴하고 있다. 하지만  $x_0$ 가 0.1일 때 급수항이 13~18개에서 큰 오차를 가지는 고유진동수

를 구할 수 있으나, 급수항의 개수가 19~29개일 경우에는 고유진동수를 구할 수 없었다.  $x_0$ 가 0.9일 때 급수항의 개수가 28개 이상인 경우에는 고유진동수를 구할 수 없으며,  $x_0$ 가 1에서는 급수항의 개수를 29개까지 적용하여도 고유진동수를 구할 수 없었다.

## 5.2 환형판

### 5.2.1 일정두께의 경우

일정두께를 가지는 환형판에서 외경의 경계조건은 각각 고정과 단순지지 그리고 자유일 경우와 내경의 경계조건이 자유일 때, 축대칭진동을 하는 환형판의 고유진동수를 구하기 위해 미분변환법에 의한 수치해석을 수행하였다. 환형판이 일정 두께일 경우 두께함수는  $f(r) = 1$ 과 같이 표현 된다. 내경  $r_0$ 의 변화에 대한 무차원 고유진동수를 해석하여 그 결과를 소수점 넷째 자리까지 나타내었다.

표 8. 환형판의 고유진동수 :  $f(r) = 1$

$r_0$	Free			
	mode 1	mode 2	mode 3	mode 4
0.1	9.3044	39.7044	91.6261	166.4321
0.2	8.9122	42.9836	105.2670	197.9816
0.3	9.0663	51.6090	132.0579	252.8938
0.4	9.5378	66.8112	176.0303	340.4823
0.5	10.4539	93.3055	250.4909	487.3340
0.6	12.0716	143.0489	388.6341	758.7512
0.7	15.0114	251.3697	687.9859	1346.0357
0.8	21.1668	561.7752	1544.2165	3024.9190
0.9	40.0553	2239.5085	6169.4159	12092.4164

표 8은 축대칭진동을 하는 일정두께의 환형판에서 외경과 내경의 경계조건이 자유일 경우 무차원 고유진동수를 구하기 위해 미분변환법을 적용하여 수치해석을 수행하였다. 그리고  $r_0$ 의 변화에 따른 제1~4차까지 고유진동수의 변화를 나타내었다. 제1차 고유진동수는  $r_0$ 의 값이 0.2인 경우 가장 낮은 고유진동수를 가지며,  $r_0$ 가 0.2에서 0.9까지 증가할 때 고유진동수 또한 증가하고 있다. 그리고 제 2, 3, 4차 고유진동수는  $r_0$ 가 0.1일 때 가장 낮은 고유진동수를 보이며 그 이후에는  $r_0$ 의 값이 커질수록 고유진동수의 값도 커지고 있다.

표 9. 환형판의 고유진동수 :  $f(r) = 1$

$r_0$	clamped		simply supported	
	mode 1	mode 2	mode 1	mode 2
0.1	11.1185	41.3498	5.5903	31.1016
0.2	10.4287	43.0493	4.7637	31.4741
0.3	11.4239	51.7453	4.6642	37.0424
0.4	13.6027	67.1585	4.7640	47.4640
0.5	17.7145	93.8470	5.0768	65.8417
0.6	25.6742	143.6639	5.7107	100.4171
0.7	43.1422	251.6403	6.9309	175.6371
0.8	93.0351	559.8383	9.5554	390.7543
0.9	360.3500	2219.4832	17.7087	1550.6201

표 9는 일정두께의 환형판에서 외경의 경계조건이 각각 고정과 단순지지이고 내경의 경계조건이 자유일 경우, 미분변환법에 의한 환형판의 고유진동수를 수치 해석하여, 제1차와 제2차 고유진동수를  $r_0$ 의 변화에 따라 나타내었다. 외경의 경계조건이 고정단인 경우 제1차 고유진동수는  $r_0$ 가 0.2에서 가장 낮은 값을 가지며,  $r_0$ 가 0.1일 때 가장 낮은 제2차 고유진동수를 보인다. 외경의 경계조건이 단순지지일 경우 제1차 고유진동수와 제2차 고유진동수는 각각  $r_0$ 의 값이 0.3과 0.1에서 가장 낮은 값을 가진다. 또한 두 경계조건에서 가장 낮은 고유진동수가 나타나는  $r_0$ 값을 기준으로,  $r_0$ 의 값이 증가할수록 고유진동수의 크기도 커지는 것을 알 수 있다.

5.2.2 선형 가변두께의 경우

선형 가변두께를 갖는 환형판의 두께함수는  $f(r) = 1 + \gamma r$ 로 표현할 수 있으며, 여기서  $\gamma$ 는 0.1과 -0.1인 경우를 고려하였다.

외경의 경계조건이 각각 고정과 단순지지이고 내경은 자유일 때 미분변환법을 적용하여 선형 가변두께를 갖는 환형판의 축대칭진동에 대한 수치해석을 수행하였다. 내경  $r_0$ 의 변화에 따른 제1차와 제2차 무차원 고유진동수를 소수점 넷째 자리까지 나타내었다.

표 10은 환형판에서 외경의 경계조건이 각각 고정과 단순지지이고 내경의 경계조건이 자유일 때, 미분변환법을 이용하여 축대칭진동을 해석하였다. 해석 시 환형판은  $\gamma$ 가 0.1인 선형 가변두께를 가지며,  $r_0$ 가 0.1에서 0.9까지 변화할 때 수치해석을 수행하여, 제1차와 제2차 무차원 고유진동수를 나타내었다. 외경의 경계조건이 고정에서  $r_0$ 가 0.2인 경우 가장 낮은 제1차 고유진동수를 가지며, 가장 낮은 제2차 고유진동수는

$r_0$ 가 0.1에서 나타난다. 그리고 외경의 경계조건이 단순지지일 경우  $r_0$ 가 0.3에서 가장 낮은 제1차 고유진동수를 구할 수 있고,  $r_0$ 의 값이 0.2에서 가장 낮은 제2차 고유진동수가 나타난다. 그리고 두 경계조건에서 가장 낮은 고유진동수가 나타나는  $r_0$ 값을 기준으로,  $r_0$ 의 값이 커질수록 고유진동수의 크기 또한 증가하는 특성을 보이고 있다.

표 10. 환형판의 고유진동수 :  $f(r) = 1 + 0.1r$

$r_0$	clamped		simply supported	
	mode 1	mode 2	mode 1	mode 2
0.1	12.4096	44.8416	6.3462	34.7164
0.2	11.3693	46.0885	5.0979	33.5753
0.3	12.4757	55.6308	4.9604	39.6627
0.4	14.9230	72.5125	5.0935	51.0793
0.5	19.4929	101.6986	5.4597	71.1645
0.6	28.2936	156.1908	6.1751	108.9550
0.7	47.5601	274.4177	7.5321	191.2553
0.8	102.5223	612.3084	10.4311	426.9693
0.9	396.7778	2434.5021	19.4096	1700.0391

표 11. 환형판의 고유진동수 :  $f(r) = 1 - 0.1r$

$r_0$	clamped		simply supported	
	mode 1	mode 2	mode 1	mode 2
0.1	10.7157	39.8010	5.6714	30.3672
0.2	9.6416	40.1997	4.5244	29.5062
0.3	10.3851	47.8522	4.3750	34.4217
0.4	12.2903	61.7873	4.4379	43.8412
0.5	15.9432	85.9775	4.6969	60.5105
0.6	23.0613	131.1186	5.2487	91.8716
0.7	38.7303	228.8436	6.3315	160.0104
0.8	83.5538	507.3496	8.6809	354.5306
0.9	323.9284	200.4456	16.0085	1401.1960

표 11은 표 10과 같은 경계조건에서  $\gamma$ 가 -0.1인 선형 가변두께를 가지는 환형판에 대한 제1차와 제2차 무차원 고유진동수를 나타낸다. 외경의 경계조건이 각각 고정과 단순지지일 경우 각 경계조건에 대한 무차원 고유진동수의 변화는 표 10과 동일한 특성을 보이고 있다.



5.2.3 2차 함수형태 가변두께의 경우

환형판의 두께에 대한 변화가 2차 함수형태일 경우에는 두께함수를  $f(r) = 1 + \gamma r^2$  로 표현하여,  $\gamma$ 가 0.1과 -0.1일 때 해석 및 고찰하였다.

2차 함수형태의 가변두께를 갖는 환형판에서 외경의 경계조건이 각각 고정과 단순지지이고, 내경이 자유단일 경우에 미분변환법을 적용하여 환형판의 축대칭진동을 해석하였고, 내경  $r_0$ 의 변화에 따른 제1차와 제2차 무차원 고유진동수를 소수점 넷째 자리까지 나타내었다.

표 12. 환형판의 고유진동수 :  $f(r) = 1 + 0.1r^2$

$r_0$	clamped		simply supported	
	mode 1	mode 2	mode 1	mode 2
0.1	12.0226	45.1576	6.3530	33.9199
0.2	11.3855	45.5453	5.0736	33.0176
0.3	12.3823	54.8083	4.8758	38.9226
0.4	14.8450	71.5372	5.0075	50.2149
0.5	19.4391	100.5043	5.3771	70.1270
0.6	28.2716	154.6652	6.0966	107.6499
0.7	47.5831	272.3278	7.4580	189.4943
0.8	102.6226	609.0804	10.3612	424.2848
0.9	397.0871	2427.8454	19.3438	1694.5651

표 13. 환형판의 고유진동수 :  $f(r) = 1 - 0.1r^2$

$r_0$	clamped		simply supported	
	mode 1	mode 2	mode 1	mode 2
0.1	11.0355	40.9403	5.9842	31.5923
0.2	9.7901	40.9611	4.7162	30.2960
0.3	10.4816	48.6567	4.4706	35.1567
0.4	12.3701	62.7343	4.5269	44.6869
0.5	16.0012	87.1369	4.7828	61.5272
0.6	23.0895	132.6070	5.3305	93.1541
0.7	38.7158	230.8926	6.4087	161.7467
0.8	83.4642	510.5311	8.7531	357.1885
0.9	323.6324	2011.0613	16.0756	4548.9846

표 12는 외경의 경계조건이 각각 고정과 단순지지이고 내경

의 경계조건이 자유이며,  $\gamma$ 가 0.1인 2차 함수형태의 두께함수를 가지는 환형판의 경우 미분변환법을 적용하여 수치해석을 수행하였다. 내경  $r_0$ 가 0.1에서 0.9까지 변화하는 경우 제1차와 제2차 무차원 고유진동수를 나타내었다. 외경의 경계조건이 고정일 경우  $r_0$ 가 0.2에서 가장 낮은 제1차 고유진동수를 가지며, 가장 낮은 제2차 고유진동수는  $r_0$ 가 0.1에서 나타난다. 그리고 외경의 경계조건이 단순지지일 때  $r_0$ 의 값이 0.3에서 가장 낮은 제1차 고유진동수가 나타나며,  $r_0$ 가 0.2에서 가장 낮은 제2차 고유진동수를 가진다. 그리고 두 경계조건에서 가장 낮은 고유진동수가 나타나는  $r_0$ 값을 기준으로,  $r_0$ 의 값이 커질수록 고유진동수의 크기 또한 커지고 있다.

6. 결론

본 연구에서는 가변 두께를 가지는 원판의 축대칭진동에 대한 지배방정식을 유도하였으며, 외경의 경계조건이 각각 고정과 단순지지 그리고 자유단을 가지는 원판에 다양한 두께함수를 적용하여 축대칭진동을 하는 원판의 고유진동수를 미분변환법을 적용하여 해석하였다. 본 연구에 의한 수치해석 결과를 기존의 연구 결과와 비교하여 본 연구의 타당성을 입증하였다. 그리고 미분변환법의 적용 시 특이성 문제를 해결하기 위해 사용된 테일러 시리즈의  $x_0$  값에 따른 수렴특성을 고찰하였으며, 원판의 두께와 내경의 변화에 따른 무차원 고유진동수의 변화를 분석 및 검토하였다.

미분변환법을 적용하여 수치 해석적으로 구한 가변두께를 가지는 원판의 축대칭진동에 대한 수치해석결과를 통하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

- (1) 미분변환법에 의한 수치해석 결과는 미분구적법과 Rayleigh-Ritz method에 의한 기존해석법의 결과와 일치한다.
- (2) 원판의 고유진동수에 대한 수렴에 있어, 미분변환법에 의한 수치해석의 수렴도는 두께함수의 차수에 영향을 받는다.
- (3) 미분변환법에 의한 원형판의 수치해석에 있어  $x_0$ 의 값이 0.5일 경우 높은 수렴성을 보인다.
- (4) 환형판의 내경에 따른 고유진동수의 변화에 있어, 가장 낮은 고유진동수를 가지는 내경 이후에는 내경이 증가할수록 고유진동수 또한 증가하는 특성을 가진다.
- (5) 가변 두께를 가지는 원판의 축대칭진동 문제를 해석하는데 있어, 해가 정확하여 효율적인 수치 해석법임을 알 수 있었다.

### 감사의 글

이 논문은 2004학년도 안동대학교 학술연구 조성비에 의하여 연구되었음

### 참 고 문 헌

권경문, 신영재, 유영순.(2001) 미분변환에 의한 비균질 보의 진동 해석, 한국소음진동공학회 2001년도 추계학술대회 논문집, pp. 617-621.

신영철, 신영재.(2001) Differential Transformation방법에 의한 가변단면을 갖는 봉의 진동해석, 한국해양공학회 2001년도 춘계학술대회 논문집, pp. 229-233.

신영재, 권경문, 윤종학, 유영찬, 이주형.(2004) 미분변환법과 일반화 미분구적법을 이용한 가변단면 원호 아치의 진동해석, 한국강구조학회 논문집, 제16권 1호, pp. 81-89.

유영찬, 신영재.(2003) 조합하중을 받는 전단변형 기둥의 좌굴 후 거동 해석, 한국강구조학회 논문집, 제15권 3호, pp. 313-320.

Arthur H. B. Mechanical Analysis and Design, Elsevier

Chen, C. K and WU, W. J.(1994) Application of the Taylor Differential Transformation Method to Viscous Damped Vibration of Hard and Soft spring System, *Computer and Structures*, vol. 59, no. 4, pp. 631-639.

Chen, C. K and HO, S. H.(1999) Transverse vibration of a rotating twisted Timoshenko Beams under Axial Loading using Differential Transform, *International Journal of Mechanical Sciences*, vol.41, pp. 1339-1356.

Celep, Z. and Gencoglu, M.(2003) Forced vibrations of a rigid circular plate on a tensionless Winkler edge support, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 263, pp. 945-953.

Gutierrez, R. H., Romanelli, E. and Laura, P. A. A.(1996) Vibrations and Elastic Stability of Thin Circular Plates with Variable Profile, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 195(3), pp. 391-399.

Kovacs, B.(2001) Free Vibration of a Laminated circular Ring Segment, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 245(4), pp. 653-667.

Laura, P. A. A. and Gutierrez, R. H.(1995) Analysis of Vibration Circular Plates of Nonuniform Thickness by the Method of Differential Quadrature, *Ocean Engng.* vol. 22, no. 1, pp. 97-100.

Laura, P. A. A. and Gutierrez, R. H.(2001) Transverse Vibration of a Damaged Circular Annular Plate with a Free Edge, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 241(4), pp. 720-724.

Malik, Moinuddin and Dang, H. H.(1998) Vibration Analysis of Continuous Systems by Differential Transformation, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 96, pp. 17-26.

Mehmet Utku, Ergin Citipitioglu and Ilker, Inceleme (2000), Circular plates on elastic foundations modelled with annular plates, *Computers and Structures*, vol. 78, pp. 365-374.

Selmane, A and Lakis, A. A.(1999) Nature Frequencies of Transverse Vibrations of Non-uniform Circular and Annular Plates, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 220(2), pp. 255-249.

Thomas, O. and Chaigne, A.(2002) Asymmetric Non-linear Forced Vibrations of Free-Edge Circular Plates. Part 1: Theory, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 258(4), pp. 649-676.

Wu, T. Y. and Liu, G. R.(2001) Free Vibration Analysis of Circular Plates with variable Thickness by the Generalized Differential Quadrature Rule, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 38, pp. 7967-7980.

Wang, C. Y. and Wang, C. M.(2003) Fundamental frequencies of circular plates with internal elastic ring support, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 263, pp. 1071-1078.

Zhou, J. K.(1986) Differential Transformation and its Application for Electrical Circuits, Huazhong University Press, Wuhan China(in Chinese).

Zhou, Y. H.(2001) Shooting Method for Non-linear Vibration and Thermal Buckling of Heated Orthotropic Circular Plates, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 248(2), pp. 379-386.

Zhou, D., Au, F. T .K., Cheung, Y. K. and Lo, S. H.(2003) Three-dimensional vibration analysis of circular and annular plates via the Chebyshev Ritz method, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 40, pp. 3089-3105.

(접수일자 : 2005. 11. 1 / 심사일 2005. 11. 29 / 심사완료일 2006. 2. 10)