

전단변형을 고려한 적층복합 I형 박벽보의 좌굴해석

Buckling Analysis of Thin-Walled Laminated Composite I-Beams Including Shear Deformation

백성용¹⁾ · 이승식²⁾ · 박용명³⁾
Back, Sung Yong · Lee, Seung Sik · Park, Yong Myung

요약: 본 연구에서는 압축력을 받는 적층복합 I형 박벽보의 좌굴해석을 위한 전단변형을 고려한 유한요소 모델을 제안한다. 직교좌표계에 근거로 변위장은 1차 전단변형을 고려한 보 이론을 사용하여 정의된다. 유도된 요소는 휨 전단변형과 뒹 비틀림에 의한 영향을 고려한다. 지배방정식을 풀기 위하여 본 유한요소에서는 2절점, 3절점, 4절점의 세 가지 보요소를 제안하였다. 선형 좌굴문제를 풀기 위하여 이동기법을 의한 역방향 반복법을 사용하였다. 적층복합 I형 박벽보의 좌굴거동에 전단 유연성과 파이버 방향성의 중요도를 조사하기 위하여 매개변수 해석을 수행하였다. 본 연구의 전단변형을 고려한 모델은 다른 연구자의 수치해석 결과와 유한요소해에 잘 일치하는 것을 확인하였다.

ABSTRACT: In this paper, a shear-flexible finite element model is developed for the buckling analysis of axially loaded, thin-walled composite I-beams. Based on an orthogonal Cartesian coordinate system, the displacement fields are defined using the first-order shear-deformable beam theory. The derived element takes into account flexural shear deformation and torsional warping deformation. Three different types of beam elements, namely, the two-noded, three-noded, and four-noded beam elements, were developed to solve the governing equations. An inverse iteration with shift eigenvalue solution was used to solve the resulting linearized buckling problem. A parametric study was conducted to show the importance of shear flexibility and fiber orientation on the buckling behavior of thin-walled composite beams. A good agreement was obtained among the proposed shear-flexible model, other results available in literature, and the finite element solution.

핵심용어: 적층복합 박벽 I형보, 직교좌표계, 전단변형, 좌굴거동, 이동기법에 의한 역방향반복법, 파이버 방향성

KEYWORDS: thin-walled laminate composite I-beams, orthogonal Cartesian coordinate system, shear deformation, buckling behavior, inverse iteration with shift, fiber orientation

1. 서론

섬유보강 복합재료(FRP, Fiber Reinforced Plastic)는 기존의 강재나 콘크리트 재료들에 비해 가벼운 자중, 강도가 우수하며 피로강도가 높고 부식 저항성과 내구성이 뛰어나서 토목, 기계, 항공, 해양 분야에서의 사용이 증가하고 있는 추세이다. 또한, 이러한 재료의 사용으로 운반의 편의성, 시공기간 단축, 재료 및 유지관리비 절감 등의 효과를 얻을 수 있다. 그러나 재료성질에 대한 규격과 설계기준의 미비 등으로 인하여 그 사용량은 기존 건설재료에 비해 그리 많지 않은 상황이다(Bakis 등, 2002). 복합재료의 이방성 및 다양한 재료 종류로 인하여 전체

(global) 또는 압축플랜지나 복부판의 국부(local) 좌굴현상이 발생하기 쉽다. 따라서 극한하중에 의한 재료의 파괴가 도달하기 전에 좌굴이 파괴양상의 주된 요인이 된다.

고전 박벽보 이론은 Vlasov(1961)와 Gjelsvik(1981)에 의하여 정립되었으며 판형 박벽요소의 2차원 문제를 1차원 문제로 변환시켰다. Bauld와 Tzeng(1984)은 기존의 등방성 박벽보 이론을 대칭 적층된 복합재 개구단면 이방성 박벽보로 확장된 개념을 제시하였다.

FRP I형보의 휨-비틀림 좌굴(lateral-torsional buckling)에 대하여 여러 연구자들에 의해 이론적 및 실험적 연구가 진행되어 오고 있다. Mottram(1992)은 E-glass FRP I형 보의 휨-비틀

1) 교신저자, 정회원, 인제대학교 토목공학과 부교수
(Tel. 055-320-3433, Fax. 055-320-3432, E-mail: cjsvb@inje.ac.kr)

2) 정회원, SK건설연구소 연구원, 공학박사(drslee@naver.com)

3) 정회원, 부산대학교 토목공학과 부교수(ympk@pusan.ac.kr)

본 논문에 대한 토의를 2007년 4월 30일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

거동에 대한 실험을 수행하였으며, 실험결과를 유한차분법을 이용할 수치해와 근접함을 밝혔다. 또한, 전단변형의 영향이 상당히 크다는 것을 발견하였다. Wu와 Sun(1992)은 보의 선형 거동과 좌굴거동에 관한 연구에서 변형도를 무시하면 휨 강성을 과대평가하게 되므로 접선응력방향 응력을 무시하는 것보다 보다 정확한 해석결과를 예측하는 것으로 보고된 바 있다. Barbero와 Raftoyiannis(1994)는 Roberts와 Jhita(1983)의 이론을 확장하여 에너지법과 판 이론을 적용하여 단순지지된 FRP I형보의 횡좌굴 및 단면좌굴에 관한 해석방법을 제안하였다. 이들의 연구는 단면내의 변형(distortional deformation)과 전단변형, 휨-비틀 커플링 영향을 고려하였다. Pandey 등(1995)은 평형지배방정식을 위하여 Galerkin방법을 사용하여 박벽 I형보의 좌굴거동에 관한 이론적 해를 개발하였으며 다른 하중과 경계 조건에 대한 간략한 식을 제안하였다. Ma와 Hughes(1996)는 분포하중하 일축대칭 I형 강재보의 횡방향 비틀 좌굴해석을 위한 에너지법을 제안하였는데 복부판의 좌굴형상을 5차 다항식의 형태로 가정한 해석결과가 유한요소 해석결과와 비교할 때 상당히 정확한 것으로 보고하고 있다. Lin 등(1996)은 FRP 구조부재의 좌굴거동을 위하여 절점당 7자유도를 갖는 요소를 사용하여 유한요소 해석을 수행하였으며 전단변형의 영향이 매우 큰 것으로 지적하였다. Davalos와 Qiao(1997)은 5차 다항식의 형상함수를 사용한 에너지이론을 적용하여 평형방정식을 발견하였고, Rayleigh-Ritz 방법을 사용하여 WF 보의 휨-비틀 좌굴거동을 조사하였다. 해석결과를 인발 보 실험에 의한 결과 및 유한요소 해석결과와 비교하여 해석결과의 정확성을 검증한 후 단순 해석식을 제안하였다. 이들의 연구는 단순보의 지간 중앙에 집중하중이 작용하는 경우에 한정되었다. Maddur와 Chaturvedi(2000)은 인발성형 복합재 I형 단면의 변형 거동을 조사하기 위해 1차 전단변형이론을 기초로 한 유한요소해법 과정을 제안하였다. Lee와 Kim(2001)은 I형 복합재의 좌굴해석을 위하여 변위장에 근거한 일차원 유한요소 모델을 개발하였다. 전단 영향과 휨-비틀 연계성을 고려한 FRP I형 외팔보의 횡좌굴에 대한 이론 및 실험적 연구가 Qiao 등(2003)에 의해 수행되었다. 고유치문제를 풀기위해 3개의 좌굴 형상함수에 대하여 조사하였다. 최근에 Machado와 Cortinez(2005)은 전단변형을 고려한 복합재의 좌굴해석을 위한 비선형 모델을 제안하였다. 비선형 지배방정식의 해를 구하기 위해 Ritz 방법을 사용하였다.

본 연구에서는 백성용 등(2006)에 의해 개발된 휨 해석모델을 압축력을 받는 적층복합재 I형 박벽보의 좌굴해석을 위한 유한요소 모델로 확대하였다. 직교좌표계를 사용하여 1차 전단변형 보이론을 근거로 변위장은 정의되었다. 지배 좌굴방정식은 전체포텐셜에너지 원리로부터 유도되었으며 제안된 보요소는 휨

전단변형과 뒹 비틀에 의한 영향을 고려한다. 절점 수가 다른 세 종류, 2절점, 3절점, 4절점의 보 요소를 제안하였다. 선형좌굴문제는 이동기법에 의한 역방향 반복법을 사용하여 풀었다. 제안된 요소의 유효성과 정확성을 검증하기 위하여 다른 연구자의 결과와 유한요소해와 비교, 분석하였다. 또한, 매개변수해석을 통하여 좌굴거동에 대한 전단 유연성과 파이버 방향성의 중요도를 조사하였다.

2. 지배방정식

2.1 변위장 및 변분의 원리

복합재 박벽보의 일반적인 I형 단면을 그림 1에서 보여주고 있다. 직교좌표계(orthogonal Cartesian coordinate system)의 y축과 z축은 변형전 단면의 도심을 통과하는 주축과 일치하도록 하며 x축은 요소의 길이방향 축이다.

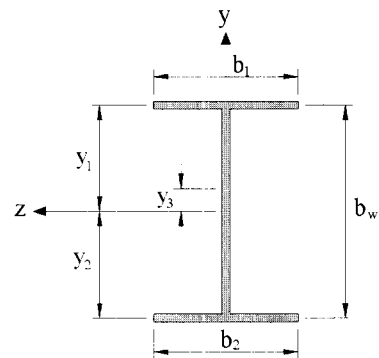


그림 1. I형 단면의 좌표계와 제원

본 연구에서는 아래와 같은 기본가정을 사용하였다.

1. 보 단면의 형상 즉 외형(contour)은 면내에서 변형하지 않는다.
2. 전단중심에서의 비틀각은 상당히 작다.
3. 연직 전단효과(transverse shear effects)는 고려되어진다. 즉, 변형 전 보의 축방향에 수직인 단면은 변형 후 평면을 유지하나 전단변형에 의해 보의 축방향에 수직일 필요는 없다.

구조체의 전체 위치에너지(total potential energy)는 변형률 에너지(strain energy) U 와 작용하중에 대한 위치에너지(potential energy) Ω 의 합으로 다음과 같이 표현된다.

$$\Pi = U + \Omega \quad (1)$$

여기서, 박벽보 이론의 기본적인 가정에 따라 변형판의 변형률 에너지는 아래와 같으며

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \epsilon_x + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dv \quad (2)$$

압축력을 받는 박벽보의 위치에너지는 다음과 같다 (Bleich, 1952).

$$\Omega = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x^o [(\bar{v}')^2 + (\bar{w}')^2] dx \quad (3)$$

여기서 σ_x^o 는 면내 등분포 압축응력이고, \bar{v} 와 \bar{w} 는 각각 y 축과 z 축방향 변위장을 나타내며 () '는 x 에 대한 미분을 나타낸다.

상, 하부 플랜지와 복부로 구성되는 I형 단면의 변형률 에너지는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U = U^{TF} + U^{BF} + U^W = U^s \quad (4)$$

여기서, 위첨자 β 는 상, 하부 플랜지와 복부를 나타내며 1, 2, W의 값을 가진다.

기존의 많은 연구에서 사용하고 있는 외형좌표계(contour coordinate system)를 대신하여 본 연구에서는 직교좌표계를 사용하여 변위장을 정의한다. 평면내 단면형상 변화는 일어나지 않는다는 박벽보 가정과 Vlasov 박벽보 및 Timoshenko 보 이론을 조합하여 중립면에서의 변위장 \bar{v} , \bar{w} 와 종방향 변위 \bar{u} 는 아래와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, y, z) &= u(x) - y\theta_z(x) + z\theta_y(x) - \omega\phi_r(x) \\ \bar{v}(x, y, z) &= v(x) - z\theta_r(x) \\ \bar{w}(x, y, z) &= w(x) + y\theta_r(x) \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ 와 $\theta_x(x)$, $\theta_y(x)$, $\theta_z(x)$ 는 각각 x , y , z 축방향의 강체 변위장과 회전각을 나타내며, $\phi_r(x)$ 는 뒹 변형을 나타낸다.

본 연구에서는 전단변형을 포함하기 때문에 변형에 따른 휨 전단변형 $\theta_y(x)$ 와 $\theta_z(x)$ 는 각 변위장의 미분값에 일치하지 않으며, 뒹 전단변형으로 인하여 $\phi_r(x)$ 는 $\theta_r(x)$ 와 같지 않다. 이러한 회전각들은 아래 식으로 정의되어진다.

$$\begin{aligned} \theta_z &= v' - \gamma_{xy}^o \\ \theta_y &= -w' + \gamma_{xz}^o \\ \phi_r &= \theta_x' - \gamma_x^o \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 γ_{xy}^o 와 γ_{xz}^o 는 부재의 휨에 의한 연직방향 전단 변형률이고 γ_x^o 는 뒹에 의한 비틀림 전단 변형률이다.

I형 단면에 대한 뒹함수 ω 는 뒹 변형을 나타내며 다음과 같이 정의된다.

$$\omega' = y_\alpha z \quad (7)$$

여기서 첨자 α 는 상, 하부 플랜지를 나타내는 1과 2의 값을 가지며 y_α 는 전단중심에서 각 플랜지 중립면까지의 거리를 나타낸다.

상, 하부 플랜지 임의의 점에서의 변위장은 중립면의 변위에 대하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} U^\alpha(x, y, z) &= \bar{u}^\alpha(x, z) + n \frac{\partial v^\alpha}{\partial x}(x, z) \\ V^\alpha(x, y, z) &= \bar{v}^\alpha(x, z) \\ W^\alpha(x, y, z) &= \bar{w}^\alpha(x, z) + n \frac{\partial v^\alpha}{\partial z}(x, z) \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 \bar{u}^α , \bar{v}^α , \bar{w}^α 는 각 플랜지 중립면에서의 판 변위를 나타내며 n 은 접면에 수직방향(면외방향)을 나타낸다.

같은 방법으로, 복부판에 대한 변위장은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} U^w(x, y, z) &= \bar{u}^w(x, y) - n \frac{\partial w^w}{\partial x}(x, y) \\ V^w(x, y, z) &= \bar{v}^w(x, y) - n \frac{\partial w^w}{\partial y}(x, y) \\ W^w(x, y, z) &= \bar{w}^w(x, y) \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 \bar{u}^w , \bar{v}^w , \bar{w}^w 는 복부 중립면에서의 판 변위를 나타낸다.

식 (5), (8), (9)의 변위장에 대한 보의 선형변형률은 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \epsilon_x^o + (z + n \sin\theta)\kappa_y - (y - n \cos\theta)\kappa_z + (\omega - nq)\kappa_w \\ \gamma_{xz} &= \gamma_{xz}^o + \gamma_x^o y + \kappa_{xs} n \cos\theta \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^o - \gamma_x^o z + \kappa_{xs} n \sin\theta \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 축 변형률 ϵ_x^o 와 곡률성분 κ_x , κ_y , κ_z , κ_w 는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x^0 &= u' \\ \kappa_z &= \theta_z', \quad \kappa_y = \theta_y', \quad \kappa_\omega = \phi_x', \quad \kappa_{xs} = -2\theta_x' \end{aligned} \quad (11)$$

식 (8), (9), (10)를 식 (2)과 (3)에 대입하고, 총 위치에너지 변분이 0이 되는 원리를 적용하면 아래의 식을 구하게 된다.

$$\begin{aligned} 0 = \int_1 [& N_x \delta u' + M_y \delta \theta_y' + M_z \delta \theta_z' + M_\omega \delta \phi_x' \\ & + V_z \delta(\omega' + \theta_y) + V_y \delta(v' - \theta_z) + T \delta(\theta_x' - \phi_x) \\ & + M_t \delta(-2\theta_x') - N_x^o (v' \delta v' + w' \delta w' \\ & + \frac{I_p}{A} \theta_x' \delta \theta_x')] dx \end{aligned} \quad (12)$$

여기서 N_x, V_y, V_z 는 각각 x, y, z축에 대한 축력과 전단력을 나타내고 M_y 와 M_z 는 y축과 z축에 대한 모멘트, T 와 M_t 는 판의 중립면과 두께방향에 대한 비틀림 모멘트, M_ω 는 bimoment를 나타내며 아래와 같이 정의된다.

$$N_x = \int_A \sigma_x dydz \quad (13a)$$

$$M_y = \int_A \sigma_x (z + n \sin \theta) dydz \quad (13b)$$

$$M_z = - \int_A \sigma_x (y - n \cos \theta) dydz \quad (13c)$$

$$M_\omega = \int_A \sigma_x (\omega - nq) dydz \quad (13d)$$

$$V_z = \int_A \tau_{xz} dydz \quad (13e)$$

$$V_y = \int_A \tau_{xy} dydz \quad (13f)$$

$$T = \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} x) dydz \quad (13g)$$

$$M_t = \int_A (\tau_{xz} n \cos \theta + \tau_{xy} n \sin \theta) dydz \quad (13h)$$

식 (12)에서 A 는 복합기둥의 단면적이고, I_p 는 탄성중심에 대한 극관성모멘트를 나타내며 다음과 같다.

$$I_p = I_y + I_z \quad (14)$$

여기서, I_y 와 I_z 는 각각 y축과 z축에 대한 단면2차모멘트이며 아래와 같이 표현된다.

$$I_y = \int_A z^2 dA \quad (15a)$$

$$I_z = \int_A y^2 dA \quad (15b)$$

2.2 박판 구성방정식

xyz좌표계에서 플랜지의 k번째 박판 구성방정식은 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^0 \\ \sigma_z^0 \\ \tau_{xz}^0 \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^\alpha & \bar{Q}_{12}^\alpha & \bar{Q}_{16}^\alpha \\ \bar{Q}_{12}^\alpha & \bar{Q}_{22}^\alpha & \bar{Q}_{26}^\alpha \\ \bar{Q}_{16}^\alpha & \bar{Q}_{26}^\alpha & \bar{Q}_{66}^\alpha \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \epsilon_x^\alpha \\ \epsilon_z^\alpha \\ \gamma_{xz}^\alpha \end{Bmatrix} \quad (16)$$

여기서 플랜지의 축소된 변형강성(reduced transformed stiffness)인 \bar{Q}_{ij}^α 는 각 층에 대한 재료의 물성치로 구성되어 있다. 단면의 외형방향에 대한 응력은 0이므로 위 식은 아래와 같이 나타내어진다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^0 \\ \tau_{xz}^0 \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^{*\alpha} & \bar{Q}_{16}^{*\alpha} \\ \bar{Q}_{16}^{*\alpha} & \bar{Q}_{66}^{*\alpha} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \epsilon_x^\alpha \\ \gamma_{xz}^\alpha \end{Bmatrix} \quad (17)$$

여기서 압축된 축소강성은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11}^{*\alpha} &= \bar{Q}_{11} - \frac{\bar{Q}_{12}^2}{\bar{Q}_{22}} \\ \bar{Q}_{16}^{*\alpha} &= \bar{Q}_{16} - \frac{\bar{Q}_{12} \bar{Q}_{26}}{\bar{Q}_{22}} \\ \bar{Q}_{66}^{*\alpha} &= \bar{Q}_{66} - \frac{\bar{Q}_{26}^2}{\bar{Q}_{22}} \end{aligned} \quad (18)$$

같은 방법으로, 복부판에 대한 구성방정식을 표현할 수 있다. 면외응력과 변형률의 구성관계는 $\tau_{nx} = \bar{Q}_{55} \gamma_{nx}$ 으로 표현되며(Reddy, 1997) 이러한 면외응력은 다음과 같이 y축과 z축의 성분으로 표현된다.

$$\tau_{yx}^0 = \bar{Q}_{55}^\alpha \sigma_{yx}^0 \quad (19a)$$

$$\tau_{zx}^0 = \bar{Q}_{55}^w \sigma_{zx}^w \quad (19b)$$

구성방정식 (17), (19)의 응력을 식 (13)에 대입하여 정리하면 적층복합 박벽부재의 구성방정식은 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_y \\ -M_z \\ M_w \\ M_t \\ V_x \\ V_y \\ T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} & E_{16} & E_{17} & E_{18} \\ & E_{22} & E_{23} & E_{24} & E_{25} & E_{26} & E_{27} & E_{28} \\ & & E_{33} & E_{34} & E_{35} & E_{36} & E_{37} & E_{38} \\ & & & E_{44} & E_{45} & E_{46} & E_{47} & E_{48} \\ & & & & E_{55} & E_{56} & E_{57} & E_{58} \\ & & & & & E_{66} & E_{67} & E_{68} \\ & & & & & & E_{77} & E_{78} \\ & & & & & & & E_{88} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^o \\ \kappa_y \\ \kappa_z \\ \kappa_x \\ \kappa_{sz} \\ \gamma_{xz}^o \\ \gamma_{yz}^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} \quad (20)$$

sym.

여기서 E_{ij} 는 복합부재 단면에 의해 결정되는 적층강성을 나타내며 백성용 등(2006)에 정의되어 있다.

3. 유한요소 모델

본 연구의 적층복합 박벽보에 대한 유한요소에서는 요소의 절점 수가 세 종류; 2절점, 3절점, 그리고 4절점, 등매개변수 보 요소(Isoparametric beam element)를 사용하였다. 부재내의 변위는 다음과 같이 나타낼 수 있다. (Back과 Will, 1998)

$$u = \sum_{\alpha=1}^n N_{\alpha} u_{\alpha}, \quad v = \sum_{\alpha=1}^n N_{\alpha} v_{\alpha}, \quad w = \sum_{\alpha=1}^n N_{\alpha} w_{\alpha}$$

$$\theta_i = \sum_{\alpha=1}^n N_{\alpha} \theta_{i\alpha} \quad (i = x, y, z), \quad (21)$$

$$\phi_x = \sum_{\alpha=1}^n N_{\alpha} \phi_{x\alpha}$$

여기서 n 은 요소당 절점수이고 N_{α} 는 절점 α 에서 형상함수를 나타낸다.

절점 변위벡터 d_{α} 와 부재의 변위벡터 d_e 는 다음과 정의한다.

$$d_{\alpha}^T = [u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z, \phi_x] \quad (22a)$$

$$d_e = [d_1, d_2, \dots, d_n]^T \quad (22b)$$

형상함수인 식 (21)을 식 (12)에 대입하고 정리하면 적층복합 박벽보의 요소 선형강성행렬 k_e 와 기하학적 강성행렬 k_g 는 다음과 같은 블록행렬 형식으로 나타내어진다.

$$k_e = \begin{bmatrix} k_{11}^e & k_{12}^e & \dots & k_{1n}^e \\ k_{12}^e & k_{22}^e & \dots & k_{2n}^e \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{1n}^e & k_{2n}^e & \dots & k_{nn}^e \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$k_g = \begin{bmatrix} k_{11}^g & k_{12}^g & \dots & k_{1n}^g \\ k_{12}^g & k_{22}^g & \dots & k_{2n}^g \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{1n}^g & k_{2n}^g & \dots & k_{nn}^g \end{bmatrix} \quad (24)$$

여기서 블록행렬 $k_{\alpha\beta}^e$ 와 $k_{\alpha\beta}^g$ ($\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$)는 각각 다음과 같이 주어진다.

$$k_{11}^e = \int_l E_{11} N_{\alpha}' N_{\beta}' dx$$

$$k_{12}^e = \int_l E_{16} N_{\alpha}' N_{\beta}' dx$$

$$k_{13}^e = \int_l E_{17} N_{\alpha}' N_{\beta}' dx$$

$$k_{14}^e = \int_l (E_{18} - 2E_{15}) N_{\alpha}' N_{\beta}' dx$$

$$k_{15}^e = \int_l (E_{12} N_{\alpha}' N_{\beta}' + E_{16} N_{\alpha}' N_{\beta}') dx$$

$$k_{16}^e = \int_l (E_{13} N_{\alpha}' N_{\beta}' - E_{17} N_{\alpha}' N_{\beta}') dx$$

$$k_{17}^e = \int_l (E_{14} N_{\alpha}' N_{\beta}' - E_{18} N_{\alpha}' N_{\beta}') dx$$

$$k_{22}^e = \int_l E_{66} N_{\alpha}' N_{\beta}' dx$$

$$k_{23}^e = \int_l E_{67} N_{\alpha}' N_{\beta}' dx$$

$$k_{24}^e = \int_l (E_{68} - 2E_{56}) N_{\alpha}' N_{\beta}' dx$$

$$k_{25}^e = \int_l (E_{26} N_{\alpha}' N_{\beta}' + E_{66} N_{\alpha}' N_{\beta}') dx$$

$$k_{26}^e = \int_l (E_{36} N_{\alpha}' N_{\beta}' - E_{67} N_{\alpha}' N_{\beta}') dx$$

$$k_{27}^e = \int_l (E_{46} N_{\alpha}' N_{\beta}' - E_{68} N_{\alpha}' N_{\beta}') dx$$

$$k_{33}^e = \int_l E_{77} N_{\alpha}' N_{\beta}' dx$$

$$k_{34}^e = \int_l (E_{78} - 2E_{57}) N_{\alpha}' N_{\beta}' dx$$

$$k_{35}^e = \int_l (E_{27} N_{\alpha}' N_{\beta}' + E_{67} N_{\alpha}' N_{\beta}') dx$$

$$k_{36}^e = \int_l (E_{37} N_{\alpha}' N_{\beta}' - E_{77} N_{\alpha}' N_{\beta}') dx$$

$$k_{37}^e = \int_l (E_{47} N_{\alpha}' N_{\beta}' - E_{78} N_{\alpha}' N_{\beta}') dx$$

$$k_{44}^e = \int_l (4E_{55} - 4E_{58} + E_{88}) N_{\alpha}' N_{\beta}' dx$$

$$\begin{aligned}
 k_{45}^e &= \int_l [(E_{28} - 2E_{25})N_{\alpha}'N_{\beta}' \\
 &\quad + (E_{68} - 2E_{56})N_{\alpha}'N_{\beta}]dx \\
 k_{46}^e &= \int_l [(E_{38} - 2E_{35})N_{\alpha}'N_{\beta}' \\
 &\quad + (2E_{57} - E_{78})N_{\alpha}'N_{\beta}]dx \\
 k_{47}^e &= \int_l [(E_{48} - 2E_{45})N_{\alpha}'N_{\beta}' \\
 &\quad + (2E_{58} - E_{88})N_{\alpha}'N_{\beta}]dx \\
 k_{55}^e &= \int_l [E_{22}N_{\alpha}'N_{\beta}' + E_{26}(N_{\alpha}'N_{\beta} + N_{\alpha}N_{\beta}') \\
 &\quad + E_{66}N_{\alpha}N_{\beta}]dx \\
 k_{56}^e &= \int_l [E_{23}N_{\alpha}'N_{\beta}' - E_{27}N_{\alpha}'N_{\beta} + E_{36}N_{\alpha}N_{\beta}' \\
 &\quad - E_{67}N_{\alpha}N_{\beta}]dx \\
 k_{57}^e &= \int_l [E_{24}N_{\alpha}'N_{\beta}' - E_{28}N_{\alpha}'N_{\beta} + E_{46}N_{\alpha}N_{\beta}' \\
 &\quad - E_{68}N_{\alpha}N_{\beta}]dx \\
 k_{66}^e &= \int_l [-E_{33}N_{\alpha}'N_{\beta}' + E_{37}(N_{\alpha}'N_{\beta} + N_{\alpha}N_{\beta}') \\
 &\quad + E_{77}N_{\alpha}N_{\beta}]dx \\
 k_{67}^e &= \int_l [-E_{34}N_{\alpha}'N_{\beta}' + E_{38}N_{\alpha}'N_{\beta} - E_{47}N_{\alpha}N_{\beta}' \\
 &\quad + E_{78}N_{\alpha}N_{\beta}]dx \\
 k_{77}^e &= \int_l [E_{44}N_{\alpha}'N_{\beta}' + E_{48}(N_{\alpha}'N_{\beta} + N_{\alpha}N_{\beta}') \\
 &\quad + E_{88}N_{\alpha}N_{\beta}]dx
 \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
 k_{22}^g &= \int_l N_{\alpha}'N_{\beta}'dx \\
 k_{33}^g &= \int_l N_{\alpha}'N_{\beta}'dx \\
 k_{44}^g &= \int_l \frac{I_p}{A} N_{\alpha}'N_{\beta}'dx
 \end{aligned} \tag{26}$$

각 부재의 강성행렬 k_e 와 기하학적 강성행렬 k_g 는 직접강도법으로 전체구조물에 대한 강성행렬 K_E 와 K_G 로 조합된 후, 아래와 같은 고유치 문제로 표현된다.

$$[K_E + \lambda K_G] \delta d = 0 \tag{27}$$

식 (27)을 만족하는 λ 의 값이 고유치로서 좌굴하중 또는 좌굴모멘트가 되며, 이에 상응하는 d 는 좌굴모드가 된다.

본 연구에서는 사용한 기법은 수렴성을 향상시키기 위하여 이동기법에 의한 역방향 반복법(inverse iteration with shift)이다. 원하는 고유치의 가까운 상한한계를 s 라고 가정하면, 실제의 고유치는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\lambda = \bar{\lambda} + s \tag{28}$$

여기서, $\bar{\lambda}$ 는 이동된 새로운 고유치이다.

식 (28)을 식 (27)에 대입하여 정리하면, 고유치 문제는 아래와 같이 표현된다.

$$\bar{K} \delta d = -\bar{\lambda} K_G \delta d \tag{29}$$

여기서, $\bar{K} = K_E + s\bar{K}_G$ (30)

역방향반복법에 의하여 식 (29)의 $\bar{\lambda}$ 을 구하고 식 (28)에 대입하면 실제 고유치 λ 을 산정하게 된다.

4. 수치해석

압축하중을 받는 복합적층 I형 박벽보의 좌굴거동에 대한 전단변형의 영향을 고려하기 위하여 본 연구에서 제안한 블록강성행렬을 사용한 좌굴해석 결과와 기존의 연구결과 및 유한요소 해석결과들과 비교, 분석하였다. 또한, 박벽보의 콘투어방향 변형률을 0으로 가정한 좌굴하중과 콘투어방향 응력을 0으로 가정한 좌굴하중에 대하여 각각 조사하였다.

4.1 단순 지지보

첫 번째 수치예제는 길이가 6.0 m인 단순 지지보의 단면중심에 집중하중이 작용하는 경우이다. 보의 단면형상은 플랜지 폭은 60 cm이고 복부 높이는 60 cm로 가정하였으며 그림 2와 같다. 재료는 graphite-epoxy(AS4/3501)이며 재료의 물성치는 표 1과 같다. 플랜지와 복부는 4개의 층으로 적층하여 총 두께는 3 cm로 가정하였다.

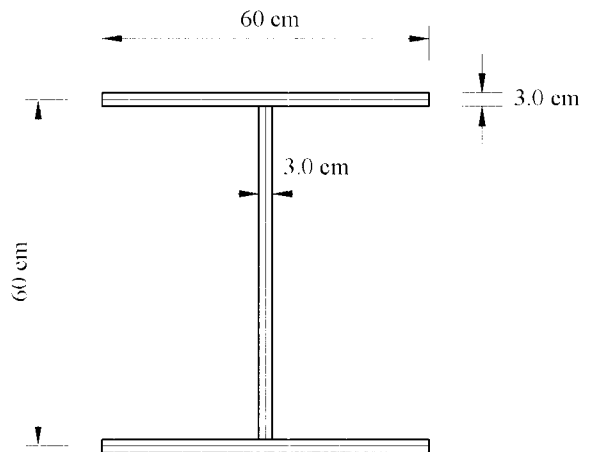


그림 2. I형 박벽보의 단면도

표 1. 재료 물성치

Properties	Values
E_{11}	144 GPa
E_{22}, E_{33}	9.65 GPa
G_{12}, G_{13}	4.14 GPa
G_{23}	3.45 GPa
ν_{12}, ν_{13}	0.3
ν_{23}	0.5

좌굴거동에 대한 적층각의 영향을 조사하기 위하여 적층순서는 직교이방성 $[0]_4$, 크로스플라이 $[0/90]_s$, 그리고 $[45/-45]_s$ 앵글 플라이에 대하여 고려하였다. 플랜지와 복부판은 동일한 적층순서와 적층각을 갖는 것으로 가정하였다. 각 적층순서에 대하여 본 연구의 블록강성행렬을 사용한 좌굴하중과 Machado와 Cortinez(2005)의 결과와 셀 요소를 사용한 COSMOS/M 해를 표 2에 나타내었다.

표 2. 단순보의 좌굴하중 ($P \times 10^6$ N)

Stacking sequence	Machado와 Cortinez		COSMOS/M	Present
	no shear	shear		
$[0]_4$	42.11	33.18	30.02	28.85
$[0/90]_s$	22.57	19.84	20.02	20.63
$[45/-45]_s$	4.45	4.44	4.38	4.41

본 연구의 유한요소에 의한 좌굴하중은 Machado 등의 전단을 고려한 모델과 함께 COSMOS/M 해에 근접함을 보여주고 있으나 $[45/-45]_s$ 앵글 플라이를 제외한 적층순서의 경우 전단을 무시한 모델은 상당한 차이를 보여주고 있다. 이는 적층순서가 $[0]_4$ 와 $[0/90]_s$ 인 경우 전단의 영향이 크다는 것을 알 수 있다. 특히, 직교이방성으로 적층된 $[0]_4$ 의 경우 가장 큰 좌굴하중을 나타내며 전단변형의 영향이 가장 큰 것을 보여주고 있다. 반면에, $[45/-45]_s$ 앵글 플라이의 경우 전단변형에 의한 영향이 거의 없음을 알 수 있다. 일반적으로 길이-높이 비가 작은 Timoshenko보에서 전단변형은 보의 거동에 상당한 영향을 주는 것으로 알려져 있듯이, 재료 축이 복합보의 종축과 일치할 때 전단변형의 영향이 좌굴하중에 중요한 역할을 한다는 것을 보여주고 있다.

Machado 등의 모델은 30개의 보요소를 사용하였으나 본 연구에서는 4개의 3절점(quadratic) 보요소로 모델링하였다. 비교적 적은 보 요소의 사용으로도 본 연구에서 구한 좌굴하중은 COSMOS/M 해에 근접함을 나타내고 있으므로 본 연구에서 개발한 보 요소의 빠른 수렴성을 잘 입증하고 있다.

4.2 외팔보

길이가 1.0 m인 외팔보의 자유단에 압축하중이 작용하는 경우로 신동구 등(2000)에 의해 사용된 예제이다. 두 개의 단면형상, 플랜지 폭이 2 cm와 5 cm, 복부판 높이는 5 cm를 가정하였고 플랜지와 복부판은 E-Glass/Epoxy를 사용하였으며 재료의 물성치는 표 3과 같다.

표 3. 재료 물성치

Properties	Values
E_{11}	53.78 GPa
E_{22}, E_{33}	17.93 GPa
G_{12}, G_{13}	8.96 GPa
G_{23}	3.45 GPa
ν_{12}, ν_{13}	0.25
ν_{23}	0.34

플랜지와 복부판은 동일한 적층순서와 적층각을 갖으며 플랜지와 복부판의 두께는 2.08 mm로 가정하였다. 좌굴거동에 대한 휨-비틀림 연계성을 조사하기 위하여 직교이방성 $[0]_{16}$, 크로스플라이 $[0/90]_{4s}$, 그리고 $[\pm\theta]_{4s}$ 앵글플라이로 적층된 이축대칭 I-형 박벽보를 사용하였으며 각층의 두께는 모두 일정하게 가정하였다.

여러 가지 적층순서에 대하여 본 연구에서 구한 좌굴하중과 ABAQUS해와 기존 연구자의 결과를 표 4에 나타내었다. 또한, 박벽보의 콘투어방향 변형률 $\epsilon_s = 0$ 와 콘투어방향 응력 $\sigma_s = 0$ 의 가정을 사용한 결과를 수록하였다. 전반적으로 본 연구의 형상방향 응력(σ_s)을 0으로 가정한 결과는 신동구 등의 결과와 비교하여 ABAQUS 유한요소해석 결과에 근접함을 보여주고 있다.

콘투어방향 응력을 무시한 좌굴하중은 ABAQUS 유한요소해석 결과와 잘 일치하는 것을 보여주고 있다. 반면에, 콘투어방향 변형률을 무시한 좌굴하중은 상당한 차이를 나타내고 있으며 특히 박벽요소의 면외 연계강성 D_{16} 이 상대적으로 큰 $[45/-45]_{4s}$ 앵글플라이에서 좌굴하중은 상당한 차이가 있음을 보여주고 있다. 평면응력($\sigma_s = 0$)으로 가정한 좌굴하중이 평면변형률($\epsilon_s = 0$)으로 가정한 좌굴하중보다 적게 산정된 것을 알 수 있다. 따라서 적층 복합재 좌굴거동에는 콘투어방향 응력을 0으로 가정하는 것이 타당하다고 판단된다. 또한, 직교이방성으로 적층된 $[0]_{16}$ 인 경우 가장 큰 좌굴하중을 나타내며, 앵글 플라이가 증가할수록 좌굴하중이 감소하는 것을 보여

표 4. 외팔보의 좌굴하중 (N)

bxh (mm)	Stacking sequence	신동구 등		ABAQUS	Present	
		$\epsilon_s = 0$	$\sigma_s = 0$		$\epsilon_s = 0$	$\sigma_s = 0$
50x50	[0] ₁₆	5877.6	5755.2	5720.0	5862.6	5740.8
	[15/-15] _{4s}	5426.3	5199.8	5174.0	5415.6	5189.8
	[30/-30] _{4s}	4331.5	3861.0	3848.0	4326.5	3856.8
	[45/-45] _{4s}	3163.2	2672.7	2665.0	3161.0	2671.0
	[60/-60] _{4s}	2372.5	2114.7	2119.0	2371.3	2113.6
	[75/-75] _{4s}	2033.2	1948.3	1950.0	2032.1	1947.2
	[0/90] _{4s}	3919.0	3857.8	3848.0	3913.2	3831.8
20x50	[0] ₁₆	380.9	373.0	372.7	379.5	372.9
	[15/-15] _{4s}	351.7	337.0	336.9	351.7	337.0
	[30/-30] _{4s}	280.7	250.2	250.3	280.7	250.3
	[45/-45] _{4s}	205.0	173.2	173.3	205.0	173.3
	[60/-60] _{4s}	153.8	137.1	137.1	153.8	137.1
	[75/-75] _{4s}	131.8	126.3	126.3	131.8	126.3
	[0/90] _{4s}	254.3	250.3	250.2	254.3	249.0

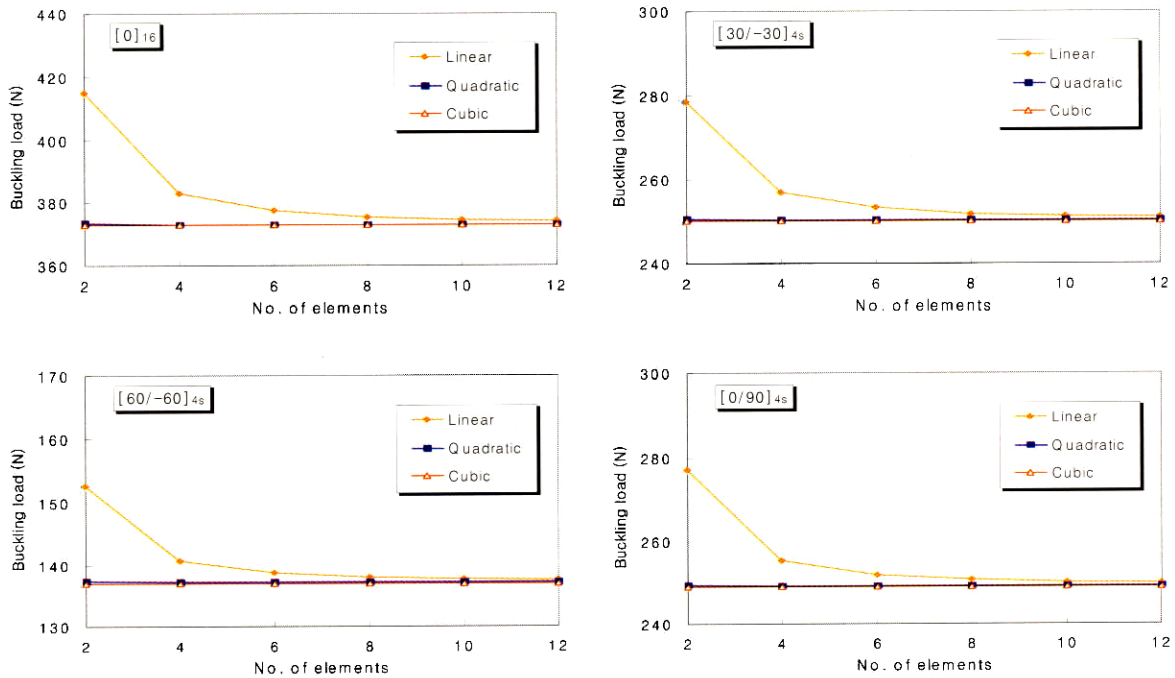


그림 3. 단면 20x50에 대한 각 요소의 수렴성

주고 있다.

본 연구에서 제안한 보 요소의 수렴을 조사하기 위하여 20x50 단면에 대하여 전체 보를 길이 방향으로 다른 요소 수로 모델링하였다. 적층순서 [0]₁₆, [30/-30]_{4s}, [60/-60]_{4s}, [0/90]_{4s} 에 대하여 2절점(linear), 3절점(quadratic), 그리고 4절점 (cubic) 보요소를 사용하여 구한 좌굴하중을 그림 3

에 나타내었다. 모든 적층순서에 대하여 3절점과 4절점 보요소로 모델링한 유한요소는 빠르게 수렴하는 것을 알 수 있다. 반면에 변위, 회전각, 뒀에 선형 형상함수를 사용하는 2절점 요소는 휨 좌굴거동을 정확하게 나타낼 수가 없으므로 수렴속도가 느린 것을 알 수 있었다.

5. 결론

본 연구에서는 적층복합 I형 박벽보의 좌굴해석을 위한 전단 변형을 고려한 유한요소 모델을 제안하였다. 변위장은 직교좌 표계에 근거한 1차 전단변형을 고려한 보 이론을 사용하여 정의하였다. 본 유한요소에서는 2절점, 3절점, 4절점의 세가지 보 요소를 사용하여 I형 박벽보의 좌굴거동을 조사하였다. 수치해석을 통하여 재료 축이 보의 종축과 일치할 때 전단변형의 영향이 좌굴하중에 중요한 역할을 한다는 것이 밝혀졌다. 또한, 좌굴하중 산정시 콘투어방향 변형률이 0이라는 가정을 사용하면 구조물을 과대평가하게 되므로 콘투어방향 응력의 0이라는 가정이 보다 적절하다는 것을 밝혔다. 적은 보 요소의 사용에도 불구하고 본 연구에서 제안한 좌굴하중 모델은 쉘 유한요소와 비교하여 효율성과 정확성을 검증하였다.

참 고 문 헌

- 백성용, 이승식 (2006) 전단변형을 고려한 I형 박벽보의 C^0 유한 요소, *한국강구조학회논문집*, 제18권 제3호, pp.349-359.
- 신동구, 김철영, 김재원 (2000) 압축력을 받는 적층 복합재 I-형 단면 박벽보의 좌굴해석, *대한토목학회논문집*, 제 20권 I-A 호, pp.143-157.
- Back, S. Y. and Will, K. M. (1998) A shear-flexible element with warping for thin-walled open beams, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 43, pp.1173-1191.
- Bakis, C. E., Bank, L. C., Brown, V.L., Cosenza, E., Davalos, J. F., Lesko, J. J., Machida, A., Rizkalla, S. H., and Triantafillou, T. C. (2002) Fiber-reinforced polymer composites for construction-state-of-the-art review, *Journal of Composites for Construction*, Vol. 6, No. 2, pp.73-87.
- Barbero, E. J., and Raftoyiannis, I. (1994). Lateral and distortional buckling of pultruded I-beams, *Composite Structures*, Vol. 27, No. 3, pp.261-268.
- Bauld, N. R. and Tzeng L. S. (1984) A Vlasov theory for fiber reinforced beams with thin-walled open cross section, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 20, No. 3, pp.277-97.
- Bleich, F. (1952) *Buckling Strength of Metal Structures*, McGraw-Hill, NY.
- Davalos, J. F. and Qiao, P. (1997) Analytical and experimental study of lateral and distortional buckling of FRP wide flange beams, *Journal of Composites for Construction*, Vol. 1, No. 4, pp.150-159.
- Gjelsvik, A. (1981) *The Theory of Thin-Walled Bars*, John Wiley and Sons Inc., NY.
- Lee, J. and Kim, S. (2001) Flexural-torsional buckling of thin-walled I-section composites, *Computers & Structures*, Vol. 79, pp.987-995.
- Lin, Z. M., Polyzois, D., and Shah, A. (1996) Stability of thin-walled pultruded structural members by the finite element method, *Thin-Walled Structures*, Vol. 24, pp.1-18.
- Ma, M., and Hughes, O. (1996) Lateral distortional buckling of monosymmetric I-beams under distributed vertical load, *Thin-Walled Structures*, Vol. 26, No. 2, pp.123-145.
- Machado, S. P. and Cortinez, V. H. (2005) Nonlinear model for stability of thin-walled composite beams with shear deformation, *Thin-Walled Structures*, Vol. 43, pp.1615-1645.
- Maddur, S. S. and Chaturvedi, S. K. (2000) Laminated composite open profile sections: non-uniform torsion of I-sections, *Composite Structures*, Vol. 50, pp.159-169.
- Mottram, J. T. (1992) Lateral torsional buckling of a pultruded I-beam, *Composites*, Vol. 32, No. 2, pp.81-92.
- Pandey, M. D., Kabir, M. Z., and Sherbourne, A. N. (1995) Flexural torsional stability of thin-walled composite I-section beams, *Composites Engineering*, Vol. 5, No. 3, pp.321-342.
- Qiao, P., Zou, G., and Davalos, J. F. (2003) Flexural torsional buckling of fiber reinforced plastic composite cantilever I-beams, *Composite Structures*, Vol. 60, pp.205-217.
- Reddy, J. N. (1997) *Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis*, CRC Press.
- Roberts, T. M., and Jhita, P. S. (1983) Lateral local and distortional buckling of I-beams, *Thin-Walled Structures*, Vol. 1, No. 4, pp.289-308.
- Vlasov, V. Z. (1961) *Thin-Walled Elastic Beams*, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, Israel.
- Wu, X. X. and Sun, C. T. (1992) Simplified theory for composite thin-walled beams, *AIAA J.*, Vol. 30, No. 12, pp.2945-2951.

(접수일자 : 2006. 7. 14 / 심사일 2006. 8. 7 /
심사완료일 2006. 9. 15)