

낮은 포물선 아치의 탄성 면내좌굴에 관한 근사식

Approximate Solution for In-Plane Elastic Buckling of Shallow Parabolic Arches

문 지 호¹⁾ · 윤 기 용²⁾ · 이 종 원³⁾ · 이 학 은⁴⁾
Moon, Ji Ho Yoon, Ki Yong Yi, Jong Won Lee, Hak Eun

요약 : 고전 좌굴 이론의 경우 좌굴 발생전 아치의 거동을 선형으로 가정하며, 전좌굴 변형을 무시한다. 이러한 가정은 비대칭 좌굴이 발생하는 깊은 아치의 경우 타당한 것으로 알려져 있다. 하지만 아치의 라이즈가 낮아지는 경우 전좌굴 변형과 같은 비선형성은 무시할 수 없으며, 비대칭 좌굴 강도보다 대칭 좌굴 강도가 낮아져 아치는 대칭좌굴에 의해 강도가 결정될 수 있다. 본 연구는 아치의 비선형 지배 미분 방정식을 이용하여 양단 힌지를 갖는 낮은 포물선 아치의 거동에 관한 연구를 수행하고 이러한 결과를 유한 요소 해석을 이용하여 검증하였다. 마지막으로 양단 힌지를 갖는 낮은 포물선 아치의 대칭 좌굴 강도에 관한 근사식을 제안하였다.

ABSTRACT : The classical buckling theory assumes that prebuckling behavior is linear and that the effect of prebuckling deformations on buckling can be ignored. However, when the rise to span ratio decreases, prebuckling deformation cannot be ignored and the symmetrical buckling strength can be smaller than the asymmetrical buckling strength. Finally, arches can fail due to snap-through buckling. This paper investigates the non-linear behavior and strength of pin-ended parabolic shallow arches using the non-linear governing differential equation of shallow arches. These results were compared with the results of the finite element method. Finally, the approximate solution for the symmetrical buckling load of pin-ended parabolic shallow arches was suggested.

핵심용어 : 낮은 아치, 좌굴, 비선형 해석, 수치해석, 근사식

KEYWORDS : Shallow arches, Buckling, Nonlinear analysis, Numerical method, Approximate solution

1. 서론

면내하중을 지지하는 아치는 예기치 않게 면내, 혹은 면외 방향으로 좌굴이 발생하여 구조물의 불안정성이 나타날 수 있다. 아치의 라이즈비가 낮아지며, 부재가 가늘고 길어지는 경우 재료의 비선형성이 나타나기 전에 임계 좌굴 하중에 도달하여 탄성 좌굴이 발생할 수 있다. 본 연구는 라이즈비 0.1 이하인 아치의 면내 탄성 좌굴에 관한 연구를 수행하였다. 아치의 형태는 포물선 아치이며, 경계 조건은 양단 힌지인 모델을 채택 하였다.

탄성 면내 좌굴에 관한 연구는 주로 깊은 아치(Deep arches)에 관하여 많은 연구가 수행 되었다. Timoshenko & Gere (1961)와 Austin(1971)은 깊은 아치의 탄성 면내 좌굴에 관한 연구를 수행하였다. 이러한 연구 결과는 고전 좌굴 이론으로써 좌굴전 아치의 거동이 선형이며, 전좌굴 변형을 고려하지 못

하고 있다. Austin(1976), Harrison(1982), Yong-Lin Pi and Trahair(1998)는 유사 기하 비선형 해석 혹은 기하 비선형 해석을 이용하여 전좌굴 변형을 고려한 아치의 탄성 면내 거동에 관한 연구를 수행 하였다. Yong-Lin Pi et al.(2002)는 압축력이 작용하는 원형 아치에 관하여 낮은 아치와 깊은 아치의 경계를 제안하고 비대칭 좌굴(Asymmetric buckling) 강도와 대칭 좌굴(Symmetric buckling) 강도를 제안하였다.

Bradford et al.(2002)는 집중하중을 받는 원형 형상의 낮은 아치 및 깊은 아치의 대칭 및 비대칭 좌굴 강도에 관한 연구를 수행 하였다. 이 밖에 낮은 아치에 관한 동적 불안정 현상에 관한 연구는 Plaut(1978), Gregory, Jr and Plaut(1982)에 의하여 연구가 진행 되었다. 우리나라의 경우 문지호 외(2005)에 의하여 고정 지점을 갖는 포물선 아치의 대칭 및 비대칭 좌굴 판단 기준에 관한 연구가 수행 되었다. 김승덕 외(1998)는 정현형 아치가 정현형의 분포 하중을 받는 경우 대칭

1) 고려대학교 사회환경시스템공학과 박사 과정(deadalive@korea.ac.kr)

2) 교신저자, 정희원, 선문대학교 토목공학과 교수 공학박사
(Tel: 041-530-2326, Fax: 041-530-2926, E-mail: kyoony@sunmoon.ac.kr)

3) 정희원, 고려대학교 공학기술연구소 연구교수 공학박사(yima@korea.ac.kr)

4) 정희원, 고려대학교 사회환경시스템공학과 교수 공학박사(helee@korea.ac.kr)

본 논문에 대한 토의를 2007년 2월 28일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

및 비대칭 좌굴의 분기점에 관한 연구를 수행 하였다. 임남형 외(2003)는 연속 지지된 아치의 탄성 좌굴에 관하여 연구를 수행하였으며, 염응준 외 (2004)는 아치의 횡 자유진동에 관하여 연구 하였다. 이 밖에 박광규 외(1986), 김연태 외(1992)에 의하여 낮은 아치의 동적 불안정 현상이 연구 되었다.

이러한 대부분의 연구는 주로 원형 및 정현형 아치에 관하여 연구가 진행 되었으며, 아치의 일반적인 형상인 포물선 아치에 관하여는 연구가 미흡한 실정이다. 본 연구에서는 기존에 연구된 낮은 아치의 비선형 방정식을 이용하여 양단 힌지를 갖는 낮은 포물선 탄성 아치의 거동에 관하여 연구를 수행 하였으며, 연구 결과를 유한요소 해석을 이용하여 검증 하였다. 연구 결과 낮은 포물선 아치의 형상 변수를 이용하여 대칭 및 비대칭 좌굴의 분기점을 제안하였으며, 낮은 포물선 아치의 대칭 좌굴 강도를 제안하였다.

2. 낮은 아치의 비선형 지배 미분 방정식

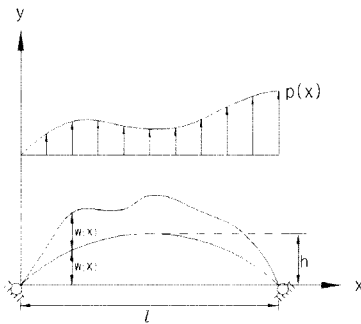


그림 1. 면내하중을 받는 임의 형상의 아치

그림 1과 같은 아치의 비선형 면내 지배 미분 방정식은 식 (1)과 같다.(Plaut, 1978 ; 박광규 외, 1986 ; 김승덕 외, 1998)

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{EA}{2l} \int_0^l \left[\left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + 2 \frac{dw_0}{dx} \frac{dw}{dx} \right] dx \times \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - P = 0 \quad (1)$$

식(1)에서 E 는 탄성 계수, I 는 단면2차모멘트, A 는 아치의 단면적, l 은 아치의 지간, w_0 는 변형전 아치의 형상, w 는 y 방향의 변위를 나타낸다. 식 (1)에 식 (2)와 같은 무차원 변수를 도입하여 간략하게 정리하면 식 (3)과 같이 된다.

$$\xi = \frac{\pi}{l} x, r = \sqrt{\frac{I}{A}}, \eta_0 = \frac{w_0}{r}, \eta = \frac{w}{r}, q = \frac{P}{EI r} \left(\frac{l}{\pi} \right)^4 \quad (2)$$

$$\frac{d^4 \eta}{d\xi^4} - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left[\left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 + 2 \frac{d\eta_0}{d\xi} \frac{d\eta}{d\xi} \right] d\xi \times \left(\frac{d^2 \eta_0}{d\xi^2} + \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} \right) - q = 0 \quad (3)$$

여기서 ξ 는 무차원화된 길이의 변수이며, r 은 아치 단면의 회전 반경, η_0 는 무차원화된 아치의 형상, η 는 무차원 변위, q 는 무차원 하중을 나타낸다.

식 (3)은 임의의 형상의 아치가 일반적인 면내하중에 저항하는 경우 무차원화된 면내 지배 미분 방정식이다. 포물선 아치가 수직 등분포 하중을 받는 경우 아치의 초기 형상, 변위 형상과 하중은 아래의 식 (4)와 같이 정의 된다.

$$\eta_0 = H(\pi\xi - \xi^2), H = \frac{4h}{\pi^2 r}, \eta = \sum_{n=1}^N D_n \sin(n\xi) \quad (4)$$

$$q = \frac{P}{EI r} \left(\frac{l}{\pi} \right)^4$$

여기서 H 는 아치의 형상 변수로 라이즈(h)와 아치 단면의 회전 반경(r)의 함수로 나타낸다. 하중의 경우 수직 등분포 하중이므로 P 는 x 에 따라 일정한 상수이다.

위의 식 (4)를 식 (3)에 대입하여 정리하고 삼각함수의 직교성(Orthogonality)을 이용하여 정리하면 아래의 식 (5)와 같다.

$$\frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^N D_n n^4 \delta_{mn} + \left(\frac{1}{4} \sum_{n=1}^N D_n^2 n^2 + \frac{2H}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{D_n}{n} (1 - \cos m\pi) \right) \times \left(\frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^N D_n n^2 \delta_{mn} - \frac{2H}{m} (\cos m\pi - 1) \right) + \frac{q}{m} (\cos m\pi - 1) = 0 \quad (5)$$

식 (5)는 수직 등분포 하중을 받는 양단 힌지 낮은 포물선 아치의 이산화된 면내 지배 미분 방정식을 나타낸다. 여기서 δ_{mn} 은 Kronecker delta이다. 식 (4) 중 무차원 변위함수 η 에서 첫 번째항($D_1 \sin \xi$)은 대칭좌굴을 나타내며, 두 번째항($D_2 \sin 2\xi$)은 비대칭 좌굴을 나타낸다. 이러한 사실은 그림 2에서 확인 할 수 있다.

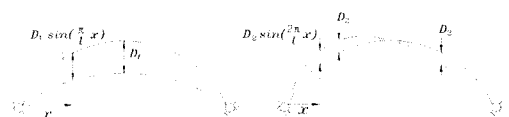


그림 2. 아치의 변형 형상

따라서 $n=1,2$ 만 고려하여도 대칭좌굴과 비대칭 좌굴 그리고 이 두 가지 연성되는 좌굴을 고려할 수 있다. D_1 은 대칭 좌굴을 나타내는 일반화 좌표(Generalized coordinator)이며, D_2 는 비대칭 좌굴을 나타내는 일반화 좌표이다. $n=1,2$ 만 고려하는 경우, 식 (5)에 $n=1,2$ 를 대입하고 m 에 1과 2를 대입하여 $m=1$ 인 경우를 F_1 , $m=2$ 인 경우를 F_2 라고 하면 식 (5)는 아래의 식 (6)과 같은 두 개의 비선형 방정식으로 나타난다.

$$F_1(D_i, q) = \frac{\pi}{8} D_1^3 + 3HD_1^2 + \left(\frac{\pi}{2} + \frac{16H^2}{\pi} \right) D_1 + 4HD_2^2 + \frac{\pi}{2} D_1 D_2^2 - 2q = 0$$

$$F_2(D_i, q) = 2\pi D_2^3 + 8\pi D_2 + \frac{\pi}{2} D_1^2 D_2 + 8HD_1 D_2 = 0 \quad (i = 1, 2)$$

$F_r (r=1,2)$ 은 식 (6)에서 볼 수 있듯이 변위의 일반화 좌표 $D_i (i=1,2)$ 와 무차원 하중 q 의 함수로 나타난다.

3. 낮은 포물선 아치의 탄성 면내 거동

위의 식 (6)과 같은 비선형 방정식을 풀기 위하여 본 연구에서는 비교적 간단한 섭동법(Static perturbation method)(김승덕, 1997)을 이용하였다. 섭동법은 불평형력(Residual force)을 소거하지 못하는 단점이 있으나 평형곡선 상의 특이점(Singular point)이 있는 경우에도 적용 가능함으로 이 방법을 이용하였다. 불평형력을 최소화하기 위하여 본 연구에서는 변위 증분을 가능한 작게 하였으며, 보통 전체 발생 변위의 300~500구간으로 나누었다. 계산의 편의를 위하여 섭동방정식 중 1차 근사만을 이용하여 계산을 수행 하였다. 변위 및 하중 증분을 식 (7)과 같이 정의하였다.

$$d_i = D_i^{n+1} - D_i^n \quad (i = 1, 2; n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\lambda = q^{n+1} - q^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

n 번째 평형 경로상의 점 D_i^n, q^n 이 변위 및 하중 증분 d_i, λ 만큼 전진한 평형 경로상의 점은 $F_r(D_i + d_i, q + \lambda) = 0$ 을 만족시킨다. 이 함수를 Taylor 함수를 이용하여 전개 하여 $F_r (r=1,2)$ 을 증분의 함수로 나타내면 아래의 식 (8)과 같다.

$$F_r(d_i, \lambda) = F_r(D_i^{n+1}, q^{n+1}) - F_r(D_i^n, q^n) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial F_r^n}{\partial D_i} d_i + \frac{\partial F_r^n}{\partial q} \lambda + \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 F_r^n}{\partial D_i \partial D_j} d_i d_j + 2 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 F_r^n}{\partial D_i \partial q} d_i \lambda + \frac{\partial^2 F_r^n}{\partial q^2} \lambda^2 \right] + \dots = 0$$

식 (9)와 같이 변위 및 하중 증분에 대응하는 계수를 정의 내리고 식 (8)에 대입 정리하면 식 (8)은 식 (10)과 같이 간단히 정리된다.

$$k_{ri} = \frac{\partial F_r^n}{\partial D_i}, k_{rij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_r^n}{\partial D_i \partial D_j}, k_{ri\lambda} = \frac{\partial^2 F_r^n}{\partial D_i \partial q}$$

$$f_{r\lambda} = -\frac{\partial F_r^n}{\partial q}, f_{r\lambda\lambda} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_r^n}{\partial q^2}$$

$$F_r(d_i, \lambda) = \sum_{i=1}^2 k_{ri} d_i + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 k_{rij} d_i d_j + \sum_{i=1}^2 k_{ri\lambda} d_i \lambda - f_{r\lambda} \lambda - f_{r\lambda\lambda} \lambda^2 = 0$$

증분 d_i, λ 를 임의의 변수 t 에 대한 함수라고 가정하면 증분 d_i, λ 는 기준점이 0인 Taylor급수를 이용하여 식 (11)과 같이 나타낼 수 있다.

$$d_i(t) = \dot{d}_i t + \frac{1}{2} \ddot{d}_i t^2 + \dots, \lambda(t) = \dot{\lambda} t + \frac{1}{2} \ddot{\lambda} t^2 + \dots \quad (11)$$

이 식에서 2차 항까지만 고려하여 식 (10)에 대입하여 임의의 변수 t 에 관하여 성립하기 위하여는 t 의 각 차수가 0이 되어야 한다. 이를 이용하여 식 (10)을 변형하면 식 (12)와 같은 섭동 방정식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{i=1}^2 k_{ri} \dot{d}_i = f_{r\lambda} \dot{\lambda}$$

$$\sum_{i=1}^2 k_{ri} \ddot{d}_i + 2 \left[\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 k_{rij} \dot{d}_i \dot{d}_j + \sum_{i=1}^2 k_{ri\lambda} \dot{d}_i \dot{\lambda} - f_{r\lambda\lambda} \dot{\lambda}^2 \right] = f_{r\lambda} \ddot{\lambda}$$

식 (12)에서 첫 번째 식은 제 1차 섭동 방정식으로 1차 근사를 나타내며, 두 번째 식은 제 2 섭동 방정식으로 2차 근사를 나타낸다. 본 연구에서는 이 이후로 1차 근사만을 이용하여 아치의 거동과 강도를 평가 하였다. 식 (9)를 이용하여 식 (12)의 k_{ri} 를 계산하고 제 1섭동 방정식을 행렬로 표시하면 식 (13)과 같다.

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{d}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$k_{11} = \frac{3\pi}{8} D_1^{n^2} + 6HD_1^n + \left(\frac{\pi}{2} + \frac{16H^2}{\pi}\right) + \frac{\pi}{2} D_2^{n^2}$$

$$k_{12} = k_{21} = 8HD_2^n + \pi D_1^n D_2^n$$

$$k_{22} = 6\pi D_2^{n^2} + 8\pi + \frac{\pi}{2} D_1^{n^2} + 8HD_1^n$$

식 (13)에서 k_{ij} 는 n 번째 변위, 하중에서의 접선 강성을 나타내며, \dot{d}_i, λ 는 각각 변위, 하중 벡터를 나타낸다. 앞에서 설명하였듯이 D_1 은 대칭 모드, D_2 는 비대칭 모드를 나타내는 일반화 좌표 (Generalized coordinator)이므로 이에 대응되는 k_{11}, k_{22} 의 변화를 이용하여 아치의 불안정성에 관한 경향을 파악할 수 있다. 예를 들어 k_{11}, k_{22} 가 모두 0이 아닌 양의 수를 갖는 경우 아치는 불안정성을 나타내지 않으며 보와 같은 거동을 보인다. 하지만 k_{11} 이 먼저 0에 도달하는 경우 아치는 D_1 에 의하여 불안정성을 나타내며, k_{22} 가 먼저 0이 되는 경우에는 D_2 에 의하여 불안정성이 나타난다. 식 (13)에서 H 가 $\pi/4$ 보다 작은 경우에는 k_{11}, k_{22} 모두 양의 값을 가지게 되며, $\pi/4 < H < \pi/2$ 인 경우에는 k_{11} 이 0이 될 수 있다. $H > \pi/2$ 인 경우에는 k_{22} 가 0이 될 수 있으며, 비대칭 좌굴이 발생할 가능성이 존재하게 된다. 본 연구에서는 H 의 변화에 따라 강성의 변화에 대해 연구를 수행 하였으며, 다음의 표 1과 같은 결론을 얻었다.

표 1. H 의 값에 따른 좌굴형상

H 의 범위	좌굴 형상
$0 < H < \pi/4$	좌굴이 발생하지 않음, 보와 같이 거동
$\pi/4 < H < 1.85$	대칭 좌굴 발생
$H > 1.85$	비대칭 좌굴 발생

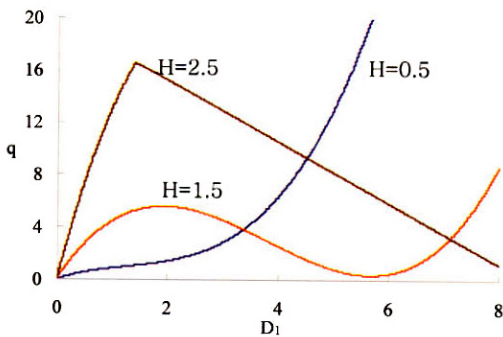


그림 3. H 에 따른 무차원 하중-처짐 그래프 ($D_2^0 = -0.001H$)

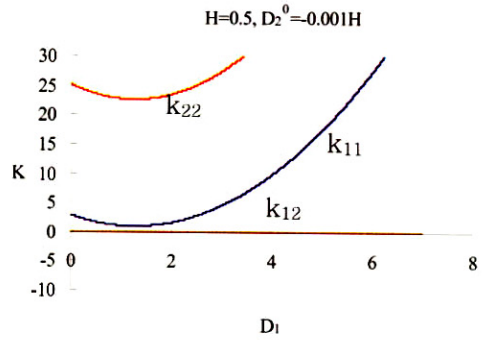


그림 4. D_1 에 따른 강성 변화 ($H=0.5, D_2^0 = -0.001H$)

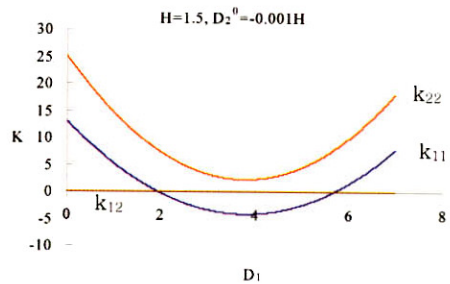


그림 5. D_1 에 따른 강성 변화 ($H=1.5, D_2^0 = -0.001H$)

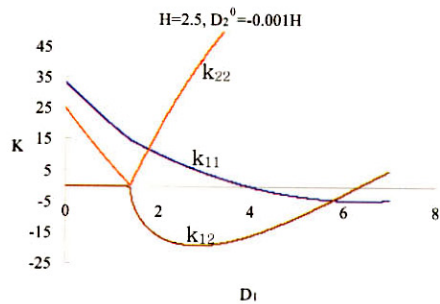


그림 6. D_1 에 따른 강성 변화 ($H=2.5, D_2^0 = -0.001H$)

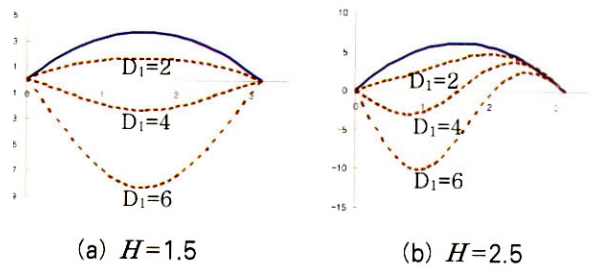


그림 7. $D_1=2, 4, 6$ 인 경우 변형 형상

그림 3은 포물선 아치의 형상 변수 H 에 따른 무차원화된 하중-처짐 그래프를 나타낸다. 여기서 y 축의 q 는 무차원화된 하중, x 축의 D_1 은 무차원화된 아치 크라운에서의 수직 처짐을 나타낸다. 비대칭 좌굴을 발생시키기 위하여 초기 변형 D_2^0

$= -0.001H$ 를 입력하였다. 초기 변형(D_2^0)이 없는 경우 식 (13)에서 k_{12}, k_{21} 은 0이 되며, 비대칭 좌굴을 발생시키는 비대칭 변위의 최대 진폭 D_2 는 0이 된다. 그림 3에서 알 수 있듯이 H 가 0.5인 양단 힌지 포물선 아치는 불안정성을 나타내지 않는 것을 볼 수 있다. 따라서 이러한 아치는 면내하중을 지지하는 일반적인 보로 취급할 수 있다. 반면에 H 가 1.5인 경우 뿔 좌굴(Snap-through)이 발생하며, 좌굴 형상은 대칭 좌굴이 발생한다. H 가 1.85보다 큰 2.5인 경우에는 비대칭 좌굴이 발생한다.

그림 4~6은 형상변수 H 에 따른 무차원화된 수직 처짐 D_1 과 식 (13)에서 나타나는 강성과의 관계를 나타낸다. 그림 4~6에서는 초기 변형 $D_2^0 = -0.001H$ 을 대입하여 강성의 변화를 살펴 보았다. $H=0.5$ 인 경우 k_{11} 과 k_{22} 모두 양의 값을 가지고 있으며, k_{12} 는 0에 가까운 값을 나타내고 있다. 따라서 이러한 경우 아치에 불안정성이 나타나지 않게 된다. $H=1.5$ 인 경우 k_{11} 이 k_{22} 보다 먼저 0에 접근하여 이로 인하여 불안정이 나타나면서 대칭 좌굴이 발생하는 것을 알 수 있다. 반면에 $H=2.5$ 인 경우는 k_{22} 가 k_{11} 보다 먼저 0에 접근하고 이후에 k_{12} 가 급격히 증가하는 것을 볼 수 있다. 이 때 좌굴 형상은 비대칭 좌굴이 발생하게 된다. 그림 7은 $H=1.5, 2.5$ 인 경우 D_1 이 2, 4, 6에 관하여 변형 형상을 나타낸 그림이다. 이 그림에서 알 수 있듯이 H 가 1.5인 경우에는 수평 변위가 발생하지 않는 대칭 좌굴이 발생하는 것을 알 수 있다. 반면에 H 가 2.5인 경우에는 비대칭 좌굴이 발생한다.

표 2. 아치의 해석 모델

좌굴 형태		h/L	B (mm)	D (mm)	t (mm)	E (MPa)	r	H
대칭 좌굴	Model1	0.05	600.00	360.00	10.00	210000	151.78	1.34
	Model2	0.075	600.00	450.00	10.00	210000	186.10	1.63
	Model3	0.1	900.00	650.00	10.00	210000	271.77	1.49
비대칭 좌굴	Model1	0.05	200.00	80.00	10.00	210000	31.91	6.35
	Model2	0.075	200.00	110.00	10.00	210000	44.04	6.90
	Model3	0.1	300.00	190.00	10.00	210000	77.76	5.21

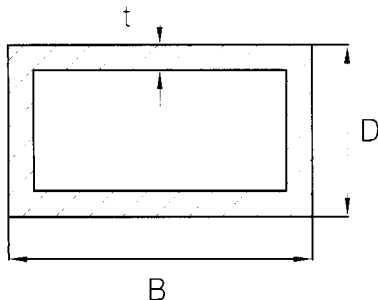


그림 8. 해석에 사용된 아치 리브의 단면 형상

식 (13)을 이용하여 표 2와 같은 여러 가지 아치에 관하여 대칭 좌굴 및 비대칭 좌굴 하중-처짐 곡선을 작성하였다. 해석에 사용된 아치 리브의 단면은 박스 형태이며, 제원은 그림 8과 같다. h 와 L 은 아치의 라이즈와 지간으로 그림 1에 나타나 있다. 식 (13)을 이용하여 계산된 결과는 유한 요소 해석 결과와 비교하였다. 유한 요소해석은 범용 구조해석 프로그램인 ABAQUS를 이용하였다. 사용된 요소는 B32로 3절점 3차원 보요소이다.

그림 9와 10은 식 (13)을 이용하여 계산된 하중-처짐 그래프와 동일한 모델에 관하여 유한요소해석을 수행하여 얻은 하중-처짐 그래프를 비교한 그림이다. x 축은 아치 크라운에서 발생하는 수직 처짐을 나타내며, y 축은 작용하중을 나타낸다. 대칭 좌굴과 비대칭 좌굴 모두 라이즈비가 낮은 모델에 관하여는 5% 이내의 작은 오차가 발생하는 것을 알 수 있다. 하지만 라이즈비가 0.1인 경우 유한요소 해석 결과와 식 (13)의 오차가 약 8% 이내에서 발생하는 것을 알 수 있다. 이러한 이유는 아래 그림 11과 12에서 유추할 수 있다. 그림 11, 12는 좌굴 발생 시 나타나는 지간의 길이에 따른 축력의 변화를 나타낸다. x 축은 아치의 지간을 나타내며, y 축은 해석 결과 나타난 축력을 $N_y (= \sigma_y A)$ 값으로 나눈 무차원 축력이다. 식 (1)의 지배 미분 방정식에서 축력은 아치의 지간에 관계없이 일정하다. 하지만 그림 11과 12에서 알 수 있듯이 지간에 따라 축력이 변화하는 모습을 알 수 있다. 이러한 변화는 라이즈비가 증가할수록 뚜렷하게 나타나는 것을 알 수 있다.

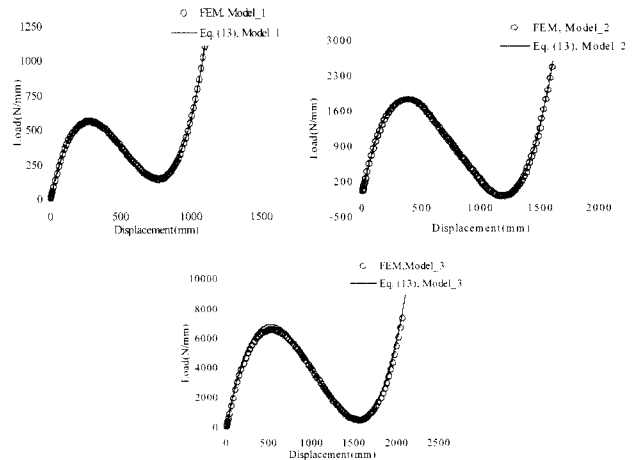
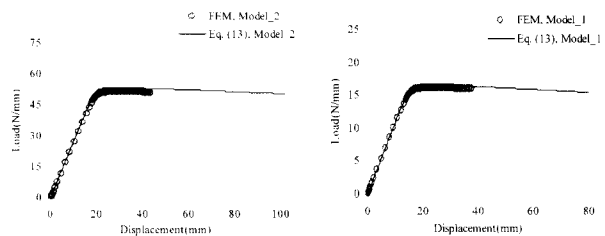


그림 9. 하중-처짐 그래프 (대칭 좌굴)



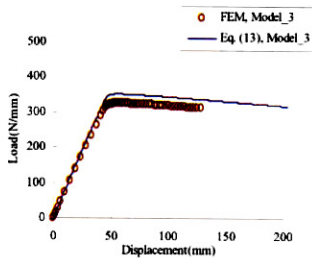


그림 10. 하중-처짐 그래프 (비대칭 좌굴)

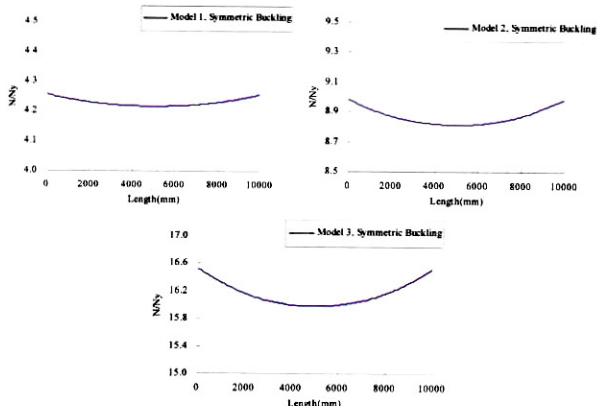


그림 11. FEM 해석 결과 지간에 따른 축력의 변화 (대칭 좌굴)

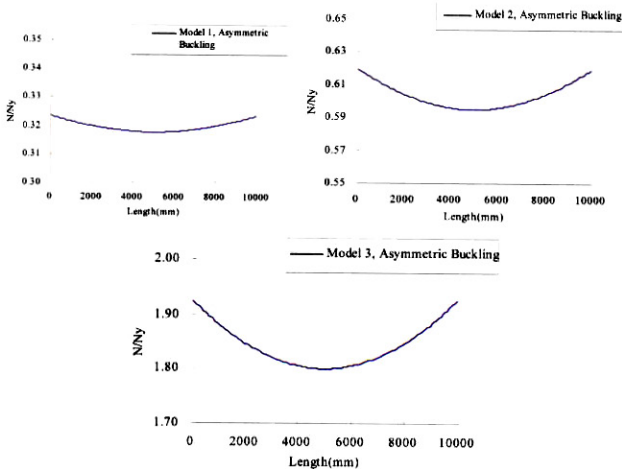


그림 12. FEM 해석 결과 지간에 따른 축력의 변화 (비대칭 좌굴)

표 3. FEM과 근사식의 오차 관계

	FEM (N/mm)	근사식 (N/mm)	오차 %	$(N_{max} - N_{min}) / N_{avg}$	
대칭 좌굴	Model1	564.59	566.65	0.37	0.01
	Model2	1823.76	1872.13	2.65	0.02
	Model3	6545.20	6901.32	5.44	0.03
비대칭 좌굴	Model1	16.17	16.45	1.70	0.02
	Model2	51.01	53.01	3.90	0.04
	Model3	328.21	353.84	7.81	0.07

표 3은 유한요소해석 결과와 근사식의 오차관계를 나타낸다. 이 표에서 $(N_{max} - N_{min}) / N_{avg}$, 즉 아치 지간에 따른 압축력의 편차가 커질수록 식 (13)과 유한요소해석의 오차가 크게 발생하는 것을 알 수 있다. 표 3을 그림으로 표현하면 그림 13과 같다. y 축의 오차는 유한 요소해석 결과를 참값으로 하였을 경우 오차를 나타낸다. x 축의 $(N_{max} - N_{min}) / N_{avg}$ 는 유한 요소 해석 결과 나타난 최대 축력과 최소 축력의 차이를 평균 축력으로 나눈 값으로, 이 값이 0에 가까울수록 아치의 지간에 따른 축력의 변화는 없는 것으로 생각할 수 있다. 이 그림에서 알 수 있듯이 축력이 일정하지 않을수록 큰 오차를 보이는 것을 알 수 있으며, 축력의 변화량과 유한요소해석과의 오차는 선형적인 관계를 보이고 있음을 알 수 있다. 이는 앞에서 설명하였듯이 지배미분 방정식에서 축력은 일정하기 때문이다. 따라서 식 (13)은 축력의 변화가 크지 않은 라이즈비 0.1이하의 낮은 아치에서 오차범위 최대 8% 이내로 잘 적용됨을 알 수 있다.

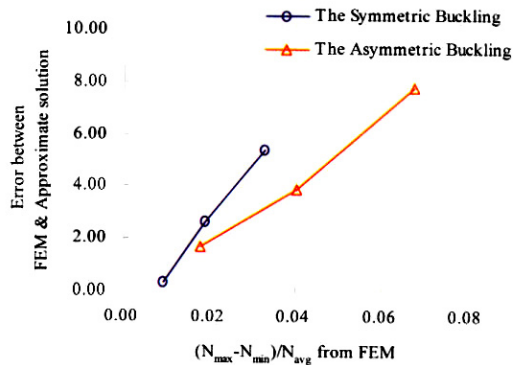


그림 13. 축력의 변화에 따른 오차

4. 낮은 포물선 아치의 탄성 면내 좌굴 근사식

고전 좌굴 이론을 이용한 탄성 면내 좌굴 강도식의 경우 널리 알려져 있으며, 현재 아치의 설계에 사용되고 있다. 이러한 고전 좌굴 이론은 전좌굴 변형을 무시하고 좌굴 형상을 비대칭 좌굴을 사용하였기 때문에 대칭 좌굴이 발생하는 낮은 아치의 좌굴 강도를 과대 평가하는 경향이 있다. (문지호, 2005) 본 연구에서는 앞의 2절에서 소개한 낮은 아치의 비선형 미분 방정식을 이용하여 대칭 좌굴이 발생하는 양단 힌지 낮은 포물선 아치의 대칭 좌굴 강도를 제안하였으며, 이러한 결과를 유한 요소 해석을 이용하여 비교, 검토 하였다.

식 (4)중 변위 함수의 1차 항만 고려하는 경우 변위 함수는 $\eta = D_1 \sin \xi$ 과 같이 나타낼 수 있다. 만약 낮은 아치가 대칭 좌굴만 발생한다고 가정 하면 아치의 좌굴 형상은 D_1 에만 관계하기 때문에 위와 같이 변위 함수를 1차만 고려하여도 문제가

없다. 이러한 변위 함수를 비선형 미분 방정식 식 (2)에 대입하고 삼각함수의 직교성을 이용하여 단순화 시키면 식 (14)와 같이 변형된다.

$$\frac{\pi}{8} D_1^3 + 3HD_1^2 + \left(\frac{16H^2}{\pi} + \frac{\pi}{2} \right) D_1 - 2q = 0 \quad (14)$$

식 (14)는 이산화된 수직 등분포 하중을 받는 포물선 아치에 대칭 좌굴이 발생할 경우 하중-처짐 방정식을 나타낸다. 여기서 H 는 아치의 형상 변수이며, q 는 무차원화된 하중, D_1 은 대칭 좌굴 변위를 나타내는 일반화 좌표이다. 식 (14)에서 아치 크라운의 변위를 w_c 라고 하고, 식 (4)의 q 를 대입하면 식 (15)와 같이 작용하는 하중과 아치크라운의 수직 변위 관계로 나타낼 수 있다.

$$P = \frac{EIr}{2} \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \left[\frac{\pi}{8} D_1^3 + 3HD_1^2 + \left(\frac{16H^2}{\pi} + \frac{\pi}{2} \right) D_1 \right], \quad D_1 = \frac{w_c}{r} \quad (15)$$

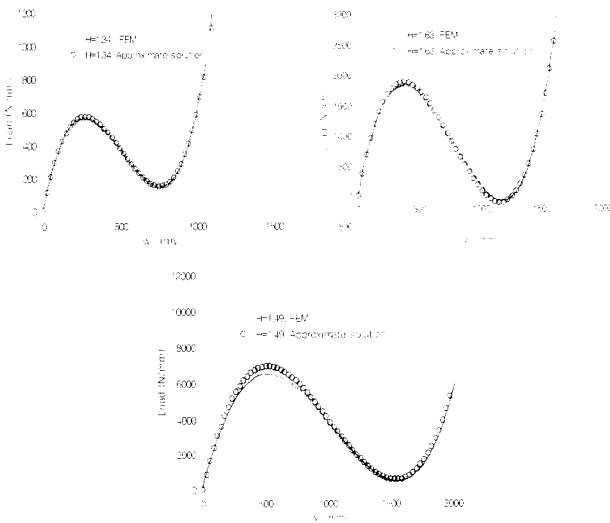


그림 14. 식 (15)와 유한요소 해석 결과와의 비교

그림 14는 대칭 좌굴이 발생하는 $H=1.34, 1.63, 1.49$ 인 낮은 아치에 관하여 유한 요소 해석 결과와 식 (15)를 비교한 그림이다. 여기서 해석 모델은 표 2에서 대칭 좌굴이 발생할 때 해석 모델 Model_1, 2 및 3과 같은 모델이다. 이 그림에서 식 (15)는 대칭 좌굴이 발생하는 낮은 아치의 하중-처짐 곡선을 잘 표현 하는 것을 알 수 있다. 또한 식 (15)는 대칭좌굴이 발생할 경우 식 (13)을 이용하여 작성한 하중-처짐 그래프와도 잘 일치 하는 것을 그림 9과 14를 비교함으로써 알 수 있다.

식 (15)가 극값을 갖는 경우 아치의 대칭 좌굴 하중이 결정되므로 식 (15)를 미분 하여 아치가 불안정해지는 무차원 변위 D_1^{cr} 을 구하면 식 (16)과 같이 된다.

$$|D_1^{cr}| = \min(|D_1^2 + A'D_1 + B' = 0|) \quad (16)$$

$$A' = \frac{16H}{\pi}, \quad B' = \frac{128H^2}{3\pi^2} + \frac{4}{3}$$

식 (16)에서 계산된 대칭 좌굴이 발생될 때 변위 D_1^{cr} 을 식 (15)에 대입하면 식 (17)과 같이 낮은 아치의 임계 대칭 좌굴 강도를 계산할 수 있다. 식 (17)에서 $P_{cr, sym}$ 은 양단 힌지 낮은 포물선 아치의 대칭 좌굴 강도를 나타낸다.

$$P_{cr, sym} = \frac{EIr}{2} \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \times \left[\frac{\pi}{8} D_1^{cr3} + 3HD_1^{cr2} + \left(\frac{16H^2}{\pi} + \frac{\pi}{2} \right) D_1^{cr} \right] \quad (17)$$

대칭 좌굴 발생 시 아치의 단면에서 발생되는 임계 압축력을 계산할 수 있다면 설계에 도움이 될 수 있다. 아치에 발생하는 압축력은 식 (18)과 같이 나타낼 수 있으므로 변위 함수 $\eta = D_1 \sin \xi$ 를 이용하여 간단히 정리하고 식 (16)에서 구한 대칭 좌굴이 발생 시 변위 D_1^{cr} 를 대입하면 대칭 좌굴 발생 시 나타나는 아치 리브의 임계 압축력을 식 (19)와 같이 나타낼 수 있다.

$$N = \frac{EA}{2l} \int_0^l \left[\left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + 2 \frac{dw_0}{dx} \frac{dw}{dx} \right] dx \quad (18)$$

$$N_{cr, sym} = \frac{EA r^2 \pi^2}{l^2} \left(\frac{D_1^{cr2}}{4} + \frac{4H}{\pi} D_1^{cr} \right) \quad (19)$$

여기서 $N_{cr, sym}$ 은 양단 힌지 낮은 포물선 아치의 대칭 좌굴 임계 압축력을 나타낸다.

포물선 아치가 수직 등분포 하중을 받는 경우 아치단면에는 압축력만 분포하게 되며, 좌굴 형상은 라이즈비와 단면의 강성에 따라 대칭 좌굴 혹은 비대칭 좌굴이 발생하게 된다. 또한 이 두 가지 모두가 혼합되어 발생하는 연성 모드도 존재한다.

비대칭 좌굴의 경우 식 (20)과 같이 직선 기둥의 탄성 좌굴 강도식에 기반을 둔 식이 존재 한다. 식 (20)에서 $N_{cr, asym}$ 은 포물선 아치의 비대칭 탄성 면내 좌굴 임계 압축력이며, S 는 아치의 길이, β 는 라이즈비와 경계 조건에 따른 좌굴 계수를 나타낸다. β 값은 표 4와 같으며, EC3 코드에서 발췌하였다. (Eurocode, 2003)

$$N_{cr, asym} = \frac{\pi^2 EI}{(\beta S)^2} \quad (20)$$

표 4. 라이즈비에 따른 좌굴계수(양단힌지를 갖는 포물선 아치)

h/L	0.05	0.075	0.1	0.15	0.2	0.3	0.4	0.5
β	0.497	0.495	0.492	0.483	0.475	0.462	0.458	0.451

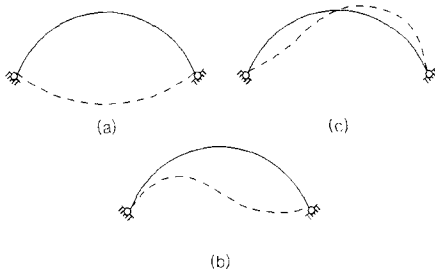


그림 15. 아치의 좌굴 형상

그림 15와 같이 아치의 탄성 좌굴 모드는 대칭좌굴 모드와 비대칭 좌굴 모드, 대칭과 비대칭 좌굴 모드가 혼합된 연성 좌굴 모드가 존재 한다. 기존의 이론으로 탄성 좌굴 강도를 결정하기 위해서는 식 (20)을 이용하여야 한다. 식 (20)은 고전 좌굴이론으로 아치의 비선형성을 고려하지 못하므로 대칭 좌굴이 발생하는 아치의 좌굴 강도를 과대평가 한다. 따라서 아치의 탄성 좌굴 강도를 결정하기 위하여 본 연구에서 제안된 대칭 좌굴 강도 식 (19)에서 계산된 대칭 좌굴 강도와 비대칭 좌굴 강도 식 (20)중 작은 값을 선택하여 좌굴 강도를 결정하도록 제안하였다. 이는 식 (21)과 같이 표현 될 수 있다.

$$N_{cr} = \min(N_{cr, sym}, N_{cr, asym}) \quad (21)$$

식 (21)에서 $N_{cr, sym}$ 는 식 (19)에서 계산된 대칭 좌굴 발생 시 임계 압축력을 나타내며, $N_{cr, asym}$ 는 식 (20)에서 계산된 좌굴 비대칭 좌굴 발생 시 임계 압축력을 나타낸다.

식 (21)은 대칭 좌굴과 비대칭 좌굴 강도 중 작은 값을 선택하여 아치의 탄성 면내 좌굴 강도를 결정하도록 되어있다. 따라서 그림 15에서 (a) 혹은 (c)와 같이 완벽히 대칭 좌굴이나 비대칭 좌굴이 발생 하는 경우 정확한 값을 줄 것으로 판단되나, 이 두가지 좌굴 형태가 복합적으로 나타나는 (b)와 같이 연성 좌굴이 발생하는 경우 식 (21)은 아치의 탄성 면내 좌굴강도는 잘 예측하지 못할 것으로 예상 할 수 있다.

그림 16~18은 포물선 아치의 형상 변수 H 에 관하여 기존의 이론 식 (20)을 적용하였을 경우와 제안식 식 (21)을 적용하였을

때 결과를 유한 요소 해석 결과와 비교한 그래프 이다. 그림 16 라이즈비 0.05일 때 해석 결과이며, 그림 17은 라이즈비 0.075 일 때 해석 결과, 그림 18은 라이즈비 0.1의 경우의 해석 결과를 나타낸다. x 축은 아치의 형상 변수로써 식 (4)와 같이 정의 된다. y 축은 유한 요소 해석과 이론값과의 비를 나타낸다. y 축 값이 1보다 작은 경우는 이론값이 유한요소 해석 결과보다 큰 값을 나타내고 있는 경우이며, 1보다 작은 경우는 그 반대이다.

그림 16~18에서 기존 이론 식 (20)은 대칭 좌굴이 발생하는 경계 $H=1.85$ 이하인 아치의 경우, 유한 요소 해석 결과와 차이가 급속도로 증가하는 것을 볼 수 있다. 이러한 이유는 대칭 좌굴이 발생하며, 전좌굴 변형과 같은 비선형 성을 식 (20)이 반영 하지 못하기 때문이다. 극단적으로 고전 이론은 대칭 좌굴이 발생하는 아치의 강도를 약 100% 넘게 과대평가하고 있는 것을 그림 16~18을 통하여 볼 수 있다. 반면 제안식 (21)의 경우 대칭 좌굴이 발생하는 아치의 좌굴 강도를 최고 13% 오차 범위 이내에서 예측하고 있다. 좌굴 형상이 대칭에서 비대칭 좌굴로 변하는 $H=1.85$ 부근에서 제안식과 유한요소해석과의 오차는 최대가 되는 것을 알 수 있다. 이러한 이유는 제안식은 그림 15의 (a)와 (c)와 같이 대칭 좌굴과 비대칭 좌굴 강도는 잘 예측 할 수 있으나, (b)와 같은 연성 좌굴의 강도는 잘 예측 할 수 없기 때문이다.

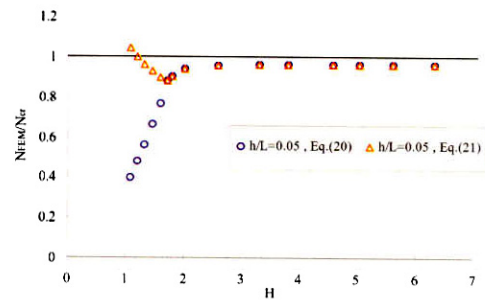


그림 16. 이론식과 유한요소해석 결과 비교 ($h/L=0.05$)

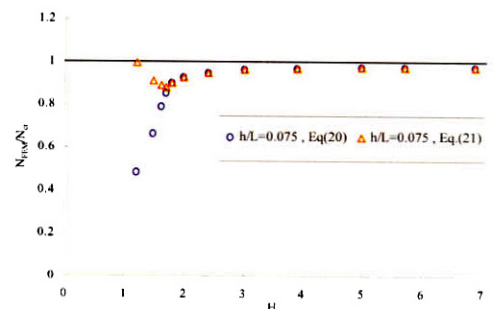


그림 17. 이론식과 유한요소해석 결과 비교 ($h/L=0.075$)

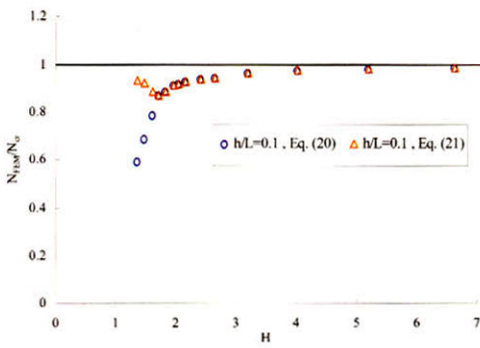


그림 18. 이론식과 유한요소해석 결과 비교 ($h/L=0.1$)

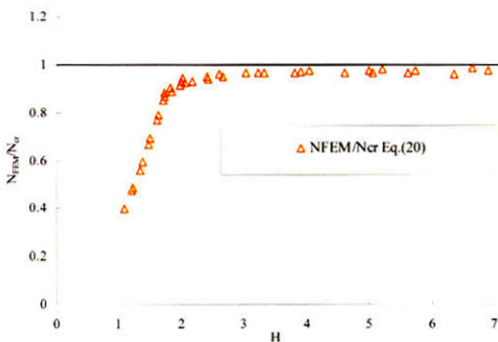


그림 19. 고전 이론과 유한요소해석 결과 비교 ($h/L=0.05\sim 0.1$)

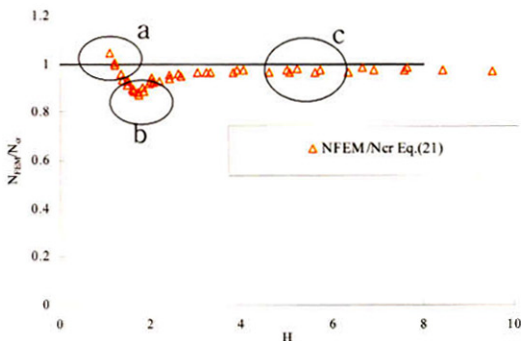


그림 20. 제안식과 유한요소해석 결과 비교 ($h/L=0.05\sim 0.1$)

그림 19, 20은 라이즈비 0.05~0.1 사이의 유한 요소 해석 결과와 식 (20), (21)을 이용하여 계산된 결과를 종합하여 나타낸 그림이다. x 축은 아치의 형상 변수 H 이다. y 축은 그림 19의 경우 유한요소해석 결과와 고전이론과의 비이며, 그림 20의 경우는 유한요소해석 결과와 본 연구에서 제안된 식 (21)과의 비이다. y 축이 1에 가까운 경우 유한요소해석 결과와 잘 일치하는 것을 나타낸다. 고전 좌굴 이론 식 (20)의 경우 $H=1.85$ 이하인 대칭 좌굴이 발생하는 양단 힌지 낮은 포물선 아치의 좌굴 강도를 과대 평가하고 있다. 반면에 본 연구 결과 제안된 식 (21)을 이용하는 경우 대칭좌굴과 비대칭 좌굴과의 경계점 $H=1.85$ 근처의 해석 결과를 제외하고 비교적 유한 요소 해석 결과와 잘 일치하고 있

다. 그림 20에서 (a), (b), (c)는 그림 15의 좌굴 모드 (a), (b), (c)가 발생하는 구간을 나타낸다. 즉, 대칭좌굴과 비대칭 좌굴이 연동되어 나타나는 좌굴을 제외하고 식 (21)은 수직 등분포 하중을 받는 양단 힌지 낮은 포물선 아치의 좌굴 강도를 잘 예측할 수 있다.

5. 결론

본 논문에서는 낮은 아치의 비선형 방정식을 이용하여 양단 힌지를 갖는 낮은 포물선 아치가 수직 등분포 하중을 받는 경우 비선형 탄성 면내 거동과 강도에 관하여 연구를 수행 하였다. 연구 결과 나타난 결과를 요약하면 아래와 같다.

- (1) 낮은 아치의 비선형 방정식을 이용하여 식 (13)과 같은 섭동식을 구하였다. 라이즈비 0.1이하인 양단 힌지 낮은 포물선 아치가 수직 등분포 하중을 받는 경우, 식 (13)을 이용하여 계산된 낮은 아치의 하중-처짐 그래프는 좌굴 형상과 관계없이 유한 요소 해석 결과와 잘 일치 하였다.
- (2) 포물선 아치의 형상 변수 H 가 $\pi/4$ 보다 작은 경우 수직 등분포 하중을 받는 양단 힌지 낮은 포물선 아치에 불안정성이 나타나지 않았으며, 일반 보와 같은 거동을 보였다. 반면에 H 가 $\pi/4$ 보다 큰 경우 아치는 불안정성이 발생하여 좌굴에 의하여 강도가 결정 되었다. $\pi/4 < H < 1.85$ 인 경우 대칭 좌굴이 발생하였으며, $H > 1.85$ 이상인 경우 비대칭 좌굴이 발생하였다.
- (3) 수직 등분포 하중을 받는 양단 힌지 낮은 포물선 아치의 좌굴 강도를 식 (19), (20) 및 (21)과 같이 제안하였다. 연성 좌굴이 발생하는 $H=1.85$ 근처의 아치를 제외 하면 식 (19), (20) 및 (21)은 수직 등분포 하중을 받는 낮은 포물선 아치의 좌굴 강도를 잘 표현 하였다. $H=1.85$ 근방에서 연성 좌굴이 발생하여 유한 요소 해석 과 본 연구결과가 차이가 나는 부분에 관한 추가 연구가 필요하다.

감사의 글

이 연구는 교량설계핵심기술연구단을 통하여 지원된 건설교통부 건설핵심기술연구개발사업 에 의하여 수행되었습니다. 연구 지원에 감사 드립니다.

참 고 문 헌

김연태, 허택녕, 김문겸, 황학주(1992), 비선형 운동해석에 의한

- 낮은 아치의 동적 임계좌굴하중의 결정, 대한토목학회 논문집, 제 12권 2호, pp. 43~54
- 김승덕, 권태진, 박지윤(1998), 얇은 정현형 아치의 분기 좌굴에 관한 연구, 한국전산구조공학회 학술발표회 논문집, pp. 457~464
- 김승덕(1997), 대공간 구조물의 비선형 해석 기법, 한국전산구조공학회 학회지, 제 10권 1호, pp. 7~18
- 문지호, 윤기용, 김성훈, 이학은(2005), 압축력을 받는 포물선 아치 리브의 좌굴 강도, 대한토목학회정기학술대회 논문집, pp. 2188~2191
- 문지호, 윤기용, 김성훈, 이학은(2005), 대칭하중을 받는 포물선 아치 리브의 탄성 면내 좌굴 강도, 한국강구조학회 논문집, 제 17권 2호, pp. 161~171
- 박광규, 김문겸, 황학주(1986), 낮은 포물선 아치의 동적영역에 관한 연구, 대한토목학회 논문집, 제 6권 3호, pp. 1~9
- 임남형, 박남희, 강영종(2003), 연속적으로 브레이스된 아치의 탄성 좌굴, 대한토목학회 논문집, 제 23권 3호, pp. 521~526
- 염응준, 한택희, 임남형, 강영종(2004), 초기 하중을 고려한 박판 아치의 횡 자유진동, 대한토목학회 논문집, 제 24권 2호, pp. 353~358
- ABAQUS Standard user's manual version 6.2 (2001), Hibbit, Karsson and Sorensen Inc.,
- Austin, W. J. (1971), In-plane bending and buckling of arches, *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 97, No. ST5, pp. 1575~1592
- Austin, W. J. (1976), Elastic buckling of arches under symmetrical loading, *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 102, No. ST5, pp. 1085~1095
- Bradford, M. A., B. Uy. and Pi, Y.-L. (2002), In-plane elastic stability of arches under central concentrated load, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 128, No. 7, pp. 710~719
- Eurocode(2003), Design of steel structures, European committee for standardisation
- Gregory, W. E. and Plaut, R. H.(1982), Dynamic stability boundaries for shallow arches, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 108, No. EM6, pp. 1036~1050
- Harrison, H. B. (1982), In-plane stability of parabolic arches, *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 108, No. ST1, pp. 195~205
- Pi, Y.-L. and Trahair, N. S.(1998), Non-linear buckling and post buckling of elastic arches, *Eng. Struct.*, Vol. 20 No. 7 pp. 571~579
- Pi, Y.-L. and Trahair, N. S.(1999), In-plane buckling and design of steel arches, *Journal of the structural Engineering*, ASCE, Vol. 125, No. 11, pp. 1291~1298
- Pi, Y.-L., M. A. Bradford and B. Uy(2002). In-plane stability of arches. *Int J Solids Struct*, Vol. 39, No. 2, pp. 105~125.
- Plaut, R. H.(1978), Stability of shallow arches under multiple loads, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 104, No. EM5, pp. 1015~1026
- Timosheko, S., and Gere, J. M. (1961) Theory of elastic stability, 2nd edition, McGraw-Hill, New York.
- (접수일자 : 2006. 4. 14 / 심사일 2006. 5. 2 / 심사완료일 2006. 7. 21)