

유효비틀림계수를 사용한 박벽개보의 비틀림해석

Torsional Analysis of Thin-Walled Open Beams Using Effective Torsional Constants

백성용^{1)†}

Back, Sung Yong

요약: 본 논문에서는 집중 비틀림모멘트와 등분포 비틀림모멘트가 작용하는 박벽개보의 뒀구속에 대한 영향을 고려할 수 있는 새로운 유효 비틀림계수를 제시한다. 상용 유한요소 프로그램의 알고리즘을 바꾸지 않고 순수 비틀림계수 대신에 제안된 비틀림계수를 직접 사용할 수 있다. 유도된 비틀림계수는 순수 비틀림과 뒀 비틀림에 의한 영향을 고려하며 순수 비틀림계수에 보정계수를 곱하여 산정한다. 순수 비틀림의 경우 유도된 계수는 순수 비틀림계수와 일치하게 나타났다. 순수 비틀림을 이용하여 본 연구에서 유도한 유효 비틀림계수는 Elhelbawey 등이 제안한 비틀림계수와 차이를 보여주고 있다. 또한, 유효 비틀림계수를 사용하여 구한 최대비틀림각을 이용하여 부재 내에 발생하는 전단응력과 뒀 수직응력을 산정하였다. 제안된 유효 비틀림계수의 정확성을 검증하기 위하여, 본 연구에 의한 결과와 엄밀해 또는 다른 연구자의 결과들과 비교, 검토한다.

ABSTRACT: This paper presents a new, effective torsional constant for thin-walled open beams under concentrated and uniformly distributed torques. The proposed constant can be used directly, instead of the St. Venant torsional constant, for any generic commercial finite-element program, without modifying the algorithm. The derived torsional constant accounts for both the pure torsion and the warping torsion, and is equal to the St. Venant torsion constant times a correction factor. It is also shown, in the case of the St. Venant torsion, that the derived constant is identical to the torsional constant. The derived effective torsional constant is different from the one given by Elhelbawey et al. The pure torsional shear stress, the warping shear stress, and the warping normal stress were also determined, using the maximum twisting angle. The accuracy of the proposed torsional constant was validated by comparing the numerical results with the closed-form solutions or other numerical results available in the literature.

핵심용어: 박벽개보, 순수비틀림, 뒀비틀림, 유효비틀림계수, 순수 비틀림계수, 유한요소 프로그램

KEYWORDS: Thin-walled open beam, St. Venant torsion, warping torsion, effective torsional constant, St. Venant torsion constant, finite-element program

1. 서론

박벽개보는 단위중량에 대한 높은 강성으로 단독구조 또는 구조 요소로서 토목, 건축, 기계, 조선, 항공 등 여러 분야에서 널리 사용되고 있다. 단순 보이론은 휨과 축하중을 받는 박벽개보의 거동을 예측할 수 있지만 비틀림하중이 작용하는 경우 평면 단면은 변형 후 더 이상 평면을 유지하지 못하고 그 결과로 상당한 축방향 뒀 변형을 야기시킨다. 이러한 현상은 개 단면이 폐 단면보다도 일반적으로 더 의심스럽다.

박벽개보의 휨과 비틀림에 대한 이론은 1960년대에 Vlasov

(1961)와 Timoshenko과 Gere(1961)에 의해 제안된 이후, 유한요소법(Yang과 McGuire 1986; 광효경과 이환우 1998; 박효기 등 1999)을 이용한 많은 연구가 이루어졌으나 고전적 박벽개보 이론과 실험 결과치의 차이로 최근에는 전단변형이 고려된 유한요소법(Chen과 Blandford 1989; Back과 Will 1998)을 이용한 연구가 수행되어 왔다. 이러한 기존의 유한요소법을 사용한 연구에서는 각 절점당 7개의 자유도를 사용하여 휨과 비틀림 해석을 수행한다. 그러나 대다수 상용 유한요소 프로그램들은 3차원 구조해석시 절점 당 6개의 자유도(3방향 이동변위와 3방향 회전변위)를 이용하는 강성법에 기초를

1) 교신저자. 정회원, 인제대학교 토목공학과 부교수, 공학박사
(Tel. 055-320-3433, Fax. 055-320-3432, E-mail: civsyb@inje.ac.kr)

본 논문에 대한 토의를 2006년 10월 30일까지 학회로 보내주시면 토의 회담을 게재하겠습니다.

두고 있으며, 뒀 비틀림에 의한 영향을 무시하고 순수 비틀림만을 고려할 수 있다. 이러한 뒀 비틀림의 영향을 무시한 해석은 특히 개(開)단면의 경우 변형에 대한 오차가 크게 나타난다.

6개의 자유도를 가진 상용 유한요소 프로그램의 장대한 알고리즘을 뒀 비틀림 효과를 고려할 수 있는 7개의 자유도를 가진 알고리즘으로 수정하기에는 상당한 어려움이 있을 뿐만 아니라 사용자가 상용 프로그램의 내부 알고리즘을 조정할 수가 없다. 따라서 Elhelbawey와 Fu(1998)는 상용 유한요소 프로그램의 알고리즘 변환 없이 뒀 비틀림을 고려할 수 있는 유효 비틀림계수를 제안하였다. 이 비틀림계수는 등분포 비틀림모멘트를 받는 양단 고정보에 한정되었고 이를 이용한 결과는 뒀 변형에 대한 영향을 상당히 보정하였으나 엄밀해와는 여전히 차이가 나타났으며, 다른 경계조건에 대한 유효 비틀림계수를 제시하지 않았다.

본 연구에서는 상용 유한요소 프로그램의 활용도를 높이고자 내부 알고리즘을 바꾸지 않고 집중 비틀림모멘트와 등분포 비틀림모멘트를 받는 박판개보의 뒀 구속에 대한 영향을 고려할 수 있는 새로운 유효 비틀림계수(effective torsional constant)를 제시한다. 보의 경계조건은 양단 고정보, 외팔보, 그리고 뒀자유 양단 고정보이다. 등분포 비틀림모멘트를 받는 양단 고정보의 경우 유도된 유효 비틀림계수는 Elhelbawey 등의 결과와 비교·분석한다. 또한, 유효 비틀림계수를 사용하여 구한 최대비틀림각을 이용하여 부재 내에 발생하는 전단응력과 뒀 수직응력을 산정한다. 본 연구에서 구한 최대 비틀림각과 응력은 엄밀해와 비교, 검토하여 본 연구에서 제시한 유효 비틀림계수의 정당성을 입증한다.

2. 지배미분방정식의 일반해

박판개보의 이론을 전개하기 위한 기본가정은 다음과 같다.

- 1) 부재는 길이방향으로 일정하고 직선이다.
- 2) 단면의 형상변화는 없으나 길이방향으로 뒀(warping) 변형을 한다.
- 3) 부재는 균일체이며 탄성거동을 한다.
- 4) 변형은 단면치수에 비해서 매우 작다.
- 5) 단면의 중앙면에 따라 발생하는 전단변형의 영향은 작다.

부재에 작용하는 비틀 하중은 전단중심에 대하여 편심을 갖는 하중, 곡선 형상, 또는 지점의 불규칙한 배열로 생길 수 있다. 뒀 구속이 없는 경우에는 작용 비틀하중은 St. Venant의 전단응력에 의하여 저항하게 된다. 그러나 단부에 뒀 구속이 있는 경우 면의 변형으로 인한 뒀 응력을 유발시킨다.

집중 비틀림모멘트가 작용하는 경우 St. Venant의 순수 비틀

림모멘트는 $M_{ST} = GJ\theta'$ 이고, Vlasov의 뒀 비틀림모멘트는 $M_w = V_f h = -EC_w \theta''''$ 이다(Heins, 1975). 여기서, E와 G는 각각 탄성계수와 전단탄성계수, J와 C_w 는 각각 순수 비틀림계수와 뒀 비틀림계수, 그리고 θ 는 비틀림각이다.

전체 비틀림모멘트 M_x 는 St. Venant의 순수 비틀림모멘트와 Vlasov의 뒀 비틀림모멘트의 합으로 비틀에 관한 지배방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\theta'''' - \lambda^2 \theta' = -M_x / EC_w \quad (1)$$

여기서, $\lambda = \sqrt{\frac{GJ}{EC_w}}$ 는 단면의 형상에 따라 결정되는 무차원 변수이다.

식 (1)의 일반해는 재차해와 하중에 의한 특이해의 합으로 표시되며 다음과 같다.

$$\theta = Ae^0 + Be^{\lambda x} + Ce^{-\lambda x} + \frac{M_x x}{GJ} \quad (2)$$

위 식은 아래와 같은 hyperbolic 형태로 표현할 수 있다.

$$\theta = A + B \sinh \lambda x + C \cosh \lambda x + \frac{M_x x}{GJ} \quad (3)$$

여기서, A, B, 그리고 C는 경계조건에 따라 결정되는 적분상수이다.

등분포 비틀림모멘트와 집중모멘트의 관계는 $-m_x = dM_x/dx$ 이므로 등분포 비틀림모멘트를 받는 보의 지배방정식은 아래 식과 같다.

$$\theta'''' - \lambda^2 \theta'' = m_x / EC_w \quad (4)$$

식 (4)의 일반해는 아래와 같은 hyperbolic 형태로 표현할 수 있다.

$$\theta = A_1 + B_{1x} + C_1 \cosh \lambda x + D_1 \sinh \lambda x - \frac{m_x x^2}{2GJ} \quad (5)$$

여기서, A_1, B_1, C_1 , 그리고 D_1 는 경계조건에 따라 결정

되는 적분상수이다.

$$+ A \left[\cosh \frac{\lambda L}{2} - 1 \right] \quad (6)$$

3. 유효 비틀림계수의 정립

집중 비틀림모멘트와 등분포 비틀림모멘트를 받는 보에 대하여 뒹 비틀림을 고려한 일반해인 식 (3)과 (5)에 양단의 경계조건을 적용하여 구한 엄밀해와 상용 유한요소 프로그램에서 사용되는 순수 비틀림에 대한 비틀림각을 이용하여 순수 비틀림과 뒹 비틀림의 영향을 고려할 수 있는 유효 비틀림계수를 유도한다.

여기서,

$$A = \frac{1 - \cosh \frac{\lambda L}{2} + \frac{1}{2} [\cosh \lambda L - 1]}{\sinh \lambda L} \text{이다.}$$

상용 유한요소 프로그램에서는 6개의 자유도를 사용한 직접 강도법(direct stiffness approach)에 의하여 순수 비틀림각을 산정한다. 따라서 부재 중앙에서의 순수 비틀림각은 아래와 같이 표현된다.

3.1 집중 비틀림모멘트

그림 1은 집중 비틀림모멘트를 받는 양단 고정보, 외팔보, 그리고 뒹자유 양단고정보를 나타내고 있다.

$$\theta_{(x=L/2)} = \frac{M_x L}{4GJ} \quad (7)$$

순수 비틀림계수 J 대신에 유효 비틀림계수 K_{Teff} 를 사용하여 식 (7)과 식 (6)을 같다고 놓고 정리하면, 집중 비틀림모멘트를 받는 양단 고정보의 유효 비틀림계수는 다음과 같이 나타내어진다.

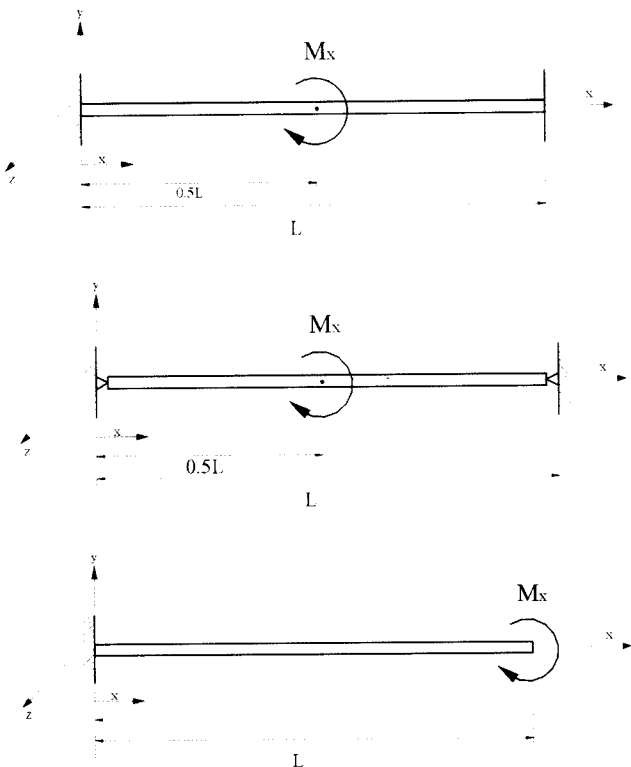


그림 1. 집중 비틀림모멘트를 받는 보

$$K_{Teff} = J \left(\frac{\lambda L}{4 \left[-\frac{1}{2} \left(\sinh \frac{\lambda L}{2} - \frac{\lambda L}{2} \right) + A \left(\cosh \frac{\lambda L}{2} - 1 \right) \right]} \right) \quad (8)$$

3.1.1 양단 고정보

최대 비틀림이 발생하는 부재 중앙에서의 뒹 비틀림을 고려한 최대 비틀림각은 부재 양단에서 경계조건인 $\theta = 0$ 와 $\theta' = 0$ 를 식 (3)에 적용하면 부재 중앙에서 비틀림각은 다음과 같이 표현된다.

3.1.2 외팔보

부재 고정단 ($x = 0$)의 경계조건인 $\theta = 0$, $\theta' = 0$ 과 자유단 ($x = L$)에서 $\theta' = 0$ 의 경계조건을 식 (3)에 적용하면 부재 자유단에서의 뒹 영향을 고려한 최대 비틀림각은 다음과 같다.

$$\theta_{(x=L/2)} = \frac{M_x}{\lambda GJ} \left\{ -\frac{1}{2} \left[\sinh \frac{\lambda L}{2} - \frac{\lambda L}{2} \right] \right.$$

$$\left. \theta_{(x=L)} = \frac{M_x}{\lambda GJ} \{ \tanh \lambda L \cdot [\cosh \lambda L - 1] - \sinh \lambda L + \lambda L \} \quad (9)$$

집중 비틀림모멘트를 받는 외팔보의 경우 순수 비틀림에 의한 자유단에서의 비틀림각은 아래와 같이 표현된다.

$$\theta_{(x=L)} = \frac{M_x L}{GJ} \quad (10)$$

식 (10)에 순수 비틀림계수 J 대신에 유효 비틀림계수 K_{Teff} 를 적용하여 식 (9)와 같다고 놓고 정리하면, 집중 비틀림모멘트

분값을 사용하는 대신에 강성강도 매트릭스를 이용하여 비틀림각을 구하므로 Elhelbawey 등의 유효 비틀림계수는 뒀에 의한 구속을 고려할 수 있으나 엄밀해와는 상당한 오차가 발생하였다. 따라서, 본 연구에서는 상용 유한요소 프로그램에서와 같이 순수 비틀림에서의 비틀림각을 사용하여 유효 비틀림계수를 유도하였으며, 순수 비틀림과 뒀 비틀림을 고려한 유효 비틀림계수인 식 (16)은 Elhelbawey 등이 구한 식과 다르게 나타났고 이에 대한 영향은 예에서 언급한다.

3.2.2 외팔보

부재 고정단에서 $\theta_{x=0} = \theta'_{x=0} = 0$ 와 자유단에서 $\theta''_{x=L} = 0$ 의 경계조건을 식 (5)에 적용하면 뒀 영향을 고려한 최대 비틀림각은 다음과 같다.

$$\theta_{(x=L)} = \frac{m_x}{\lambda^2 GJ} A (\cosh \lambda L - 1) + \frac{m_x}{GJ} \left(\frac{L^2}{2} - \frac{L}{\lambda} \sinh \lambda L \right) \quad (17)$$

여기서, $A = \frac{1 + \lambda L \sinh \lambda L}{\cosh \lambda L}$

등분포 비틀림모멘트를 받는 외팔보의 경우 자유단에서의 순수 비틀림각은 아래와 같이 표현된다.

$$\theta_{(x=L)} = \frac{m_x L^2}{2GJ} \quad (18)$$

식 (18)의 순수 비틀림계수 J 대신에 유효 비틀림계수 K_{Teff} 를 사용한 것과 식 (17)로부터, 등분포 비틀림모멘트를 받는 외팔보의 유효 비틀림계수는 다음과 같이 표현된다.

$$K_{Teff} = J \left(\frac{L^2}{2 \left[\frac{A}{\lambda^2} (\cosh \lambda L - 1) - \frac{L}{\lambda} \sinh \lambda L + \frac{L^2}{2} \right]} \right) \quad (19)$$

3.2.3 뒀자유 양단고정보

부재양단에서 $\theta = 0$ 와 $\theta'' = 0$ 의 경계조건을 식 (13)에 적용하면 뒀을 고려한 최대 비틀림각은 아래와 같이 표현된다.

$$\theta_{(x=L/2)} = \frac{m_x}{\lambda^2 GJ} \left[\frac{\lambda^2 L^2}{8} + \frac{1}{\cosh \frac{\lambda L}{2}} - 1 \right] \quad (20)$$

등분포 비틀림모멘트를 받는 뒀자유 양단 고정정보의 경우 부재중앙의 순수 비틀림각은 아래와 같이 표현된다.

$$\theta_{(x=L/2)} = \frac{m_x L^2}{8GJ} \quad (21)$$

식 (21)의 순수 비틀림계수 J 대신에 유효 비틀림계수 K_{Teff} 를 사용한 것과 식 (20)으로부터, 등분포 비틀림모멘트를 받는 뒀자유 양단고정보의 유효 비틀림계수는 다음과 같이 된다.

$$K_{Teff} = J \left(\frac{(\lambda L)^2}{8 \left[\frac{\lambda^2 L^2}{8} + \frac{1}{\cosh \frac{\lambda L}{2}} - 1 \right]} \right) \quad (22)$$

뒀 비틀림의 영향을 고려한 유효 비틀림계수 K_{Teff} 는 순수 비틀림상수 J 와 뒀 비틀림의 영향을 고려한 괄호안의 보정계수의 곱으로 표현되었다. 이 보정계수는 부재 특성치인 λL 과 구하는 위치 x에 따라 결정되어 진다. 또한, 순수 비틀림의 경우 ($\lambda = \infty$), 본 연구의 유효 비틀림계수 K_{Teff} 는 순수 비틀림계수 J 와 일치함을 알 수 있다.

6개의 자유도를 사용하는 기존의 상용 유한요소 프로그램은 순수 비틀림계수만을 사용하여 순수비틀림 해석을 수행하였지만 뒀 구속에 따른 비틀림 강성의 변화를 고려할 수가 없었다. 따라서 본 연구에서 유도한 순수 비틀림과 뒀 비틀림을 고려한 유효 비틀림계수를 사용함으로써 상용 유한요소 프로그램의 알고리즘을 변환하지 않고 뒀 비틀림에 의한 영향을 고려할 수 있게 하였다. 또한, 제안된 유효 비틀림계수는 일반적인 단면을 가진 박벽개보에 대한 Vlasov 가정에 의한 지배방정식을 사용하였으므로 비대칭 박벽개보에 적용할 수 있다.

4. 부재내 응력계산

비틀림모멘트를 받는 부재 내에 발생하는 응력은 Vlasov의 박벽보 이론에 의한 순수 전단응력, 뒀 전단응력, 그리고 뒀 수직 응력으로 구성되어지며 아래의 식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \tau_t &= Gt_w \theta' \\ \tau_w &= -ES_w \theta''' / t_f \\ \sigma_w &= EW_n \theta'' \end{aligned} \quad (23)$$

여기서, S_w 와 W_n 은 각각 뒀 정정모멘트와 정규화 뒀상수이다.

식 (23)의 응력들은 비틀림각의 미분값들을 이용하여 산정하게 되므로 상용 유한요소 프로그램에서 구한 비틀림각을 직접 사용할 수가 없다. 이러한 문제를 극복하기 위하여 본 연구에서는 유효 비틀림계수를 사용하여 구한 최대 비틀림각 θ_{max} 와 $\theta', \theta''', \theta''$ 의 비율인 아래의 식을 사용하였다.

$$\alpha = \frac{\theta'}{\theta_{max}}, \quad \beta = \frac{\theta'''}{\theta_{max}}, \quad \gamma = \frac{\theta''}{\theta_{max}} \quad (24)$$

식 (24)에서 최대 비틀림각 θ_{max} 을 사용함으로써 사용자가 비틀림각의 위치를 지정하지 않고 변수 α, β, γ 를 계산할 수 있게 된다. 최대 비틀림각 θ_{max} 을 식 (24)에 대입하여 α, β, γ 를 미리 계산하고, 상용 유한요소 프로그램에 본 연구에서 제안한 유효 비틀림계수를 사용하여 구한 $\theta_{max, K_{T,eff}}$ 을 곱하면 식 (23)의 비틀림각의 미분값인 $\theta', \theta''', \theta''$ 을 구할 수 있게 된다. 따라서 식 (23)의 응력들은 최대 비틀림각 $\theta_{max, K_{T,eff}}$ 와 변수 α, β, γ 를 사용하여 아래와 같이 다시 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \tau_t &= Gt_w \alpha \cdot \theta_{max, K_{T,eff}} \\ \tau_w &= -\frac{ES_w}{t_f} \beta \cdot \theta_{max, K_{T,eff}} \\ \sigma_w &= EW_n \gamma \cdot \theta_{max, K_{T,eff}} \end{aligned} \quad (25)$$

본 연구에서는 최대 비틀림각을 이용하여 부재내에 발생하는 응력을 계산하기 위하여 TORSION 이라는 프로그램을 만들어 사용하였다.

5. 수치해석

본 연구에서 유도한 유효 비틀림계수의 정확성을 검증하기 위하여 순수 비틀림계수와 유효 비틀림계수를 비교하고, 각 계수를 사용하여 구한 최대 비틀림각과 응력들을 엄밀해 및 다른 연구자의 결과와 비교·분석한다. 각각의 비틀림계수에 대한 최대 비틀림각은 6개 자유도를 가진 상용 유한요소 프로그램인

GTSTRUDL를 사용하여 구조해석을 수행하였으며 각 부재의 탄성계수는 200,000 MPa이고 포아송비는 0.3이다.

5.1 집중 비틀림모멘트를 받는 양단 고정보

집중 비틀림모멘트 $M_x = 0.113 \text{ kN}\cdot\text{m}$ 가 부재 중앙에 작용하는 양단 고정보를 그림 3에 나타내었다. 길이는 3.05 m이고 단면은 W10x29을 사용하였다.

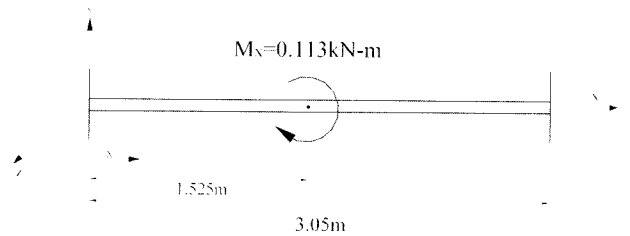


그림 3. 집중 비틀림모멘트를 받는 양단 고정보

각각의 비틀림계수와 최대 비틀림각에 대한 결과를 표 1에 나타내었다. 또한 최대 비틀림각은 7개의 자유도를 가진 보요소로 모델링한 유한요소법에 의한 결과(Back 등, 1998) 및 엄밀해와 비교하였다.

단면 W10x29의 유효 비틀림계수는 순수 비틀림계수에 비해 3.4배의 증가를 보여주고 있다. 최대 비틀림각은 순수 비틀림계수를 사용한 결과와 본 연구에서 유도한 유효 비틀림계수를 사용한 결과는 엄밀해와 비교하여 각각 340.4%, 1.6%의 오차를 나타내고 있어, 본 연구의 결과가 유한요소 해석결과 및 엄밀해와 잘 일치함을 보여주고 있다.

순수 전단응력 및 뒀 전단응력과 뒀 수직응력의 분포를 엄밀해와 비교하여 그림 4와 그림 5에 각각 나타내었다. 이 그림에서처럼 유효 비틀림계수에 의한 비틀림각을 사용한 응력 해석결과는 엄밀해와 매우 잘 일치함을 알 수 있다.

표 1. 비틀림계수와 최대 비틀림각의 비교

TORSIONAL CONSTANT/ θ_{max}	TORSIONAL CONSTANT (cm^4)	θ_{max} (rad)	Diff. (%)
Unmodified J	24.10	7.427-E03	340.4
Back et al.	---	2.137E-03	0.4
Present Study	81.498	2.145E-03	1.6
Exact Solu.	---	2.129E-03	---

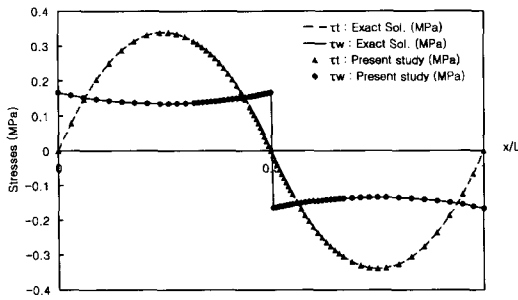


그림 4. 순수 전단응력과 뒹 전단응력

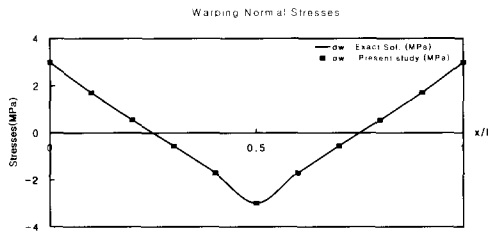


그림 5. 뒹 수직응력

5.2 집중 비틀모멘트를 받는 외팔보

그림 6에서처럼 지간이 5.0 m인 외팔보의 자유단에 집중 비틀모멘트 250000 kN-cm가 작용하고 있다. 이 예제는 7개의 자유도에 의한 유한요소법을 이용하여 Tralli(1986)와 Back 등(1998)이 사용한 것으로 본 연구에서 제시한 유효 비틀림계수의 검증을 위하여 선택하였다.

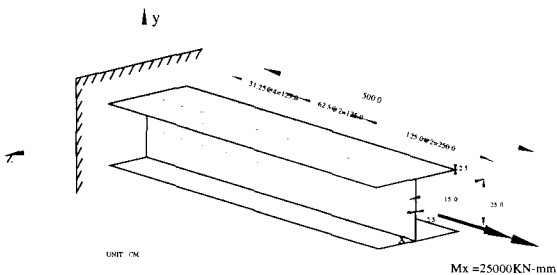


그림 6. 집중 비틀모멘트를 받는 외팔보

순수 비틀림계수와 유효 비틀림계수는 표 2와 같다. 또한 각 비틀림계수에 의한 최대 비틀림각, 유한요소법에 의한 결과, 그리고 Vlasov에 의한 엄밀해를 비교하여 나타내었다. 순수 비틀림계수를 사용한 최대 비틀림각은 엄밀해와 비교하여 9.6%의 오차를 나타내고 있으나, 본 연구에서 유도된 유효 비틀림계수를 사용한 결과는 Back 등의 유한요소 해석결과 및 엄밀해와 매우 잘 일치하였다. 그러나, Tralli(1986)의 유한요소법은 비틀모멘트가 일정하다는 요소의 가정을 사용하였기 때문에 엄밀해와는 다소 차이가 나타났다.

표 2. 비틀림계수와 최대 비틀림각의 비교

TORSIONAL CONSTANT/ θ_{max}	TORSIONAL CONSTANT (cm ⁴)	θ_{max} (rad)	Diff. (%)
Unmodified J	286.46	0.5673	9.60
Tralli.	---	0.5183	0.31
Back et al.	---	0.5172	0.097
Present Study	314.66	0.5164	0.006
Exact Solu.	---	0.5167	---

순수 전단응력 및 뒹 전단응력과 뒹 수직응력의 분포를 엄밀해와 비교하여 그림 7과 그림 8에 각각 나타내었다. 본 연구에서 구한 응력은 엄밀해와 정확히 일치함을 알 수 있다.

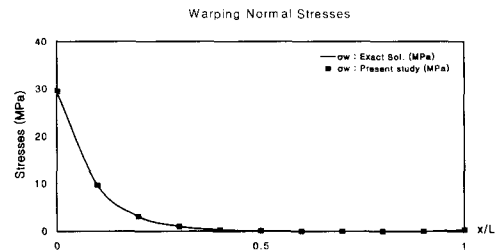


그림 7. 순수 전단응력과 뒹 전단응력

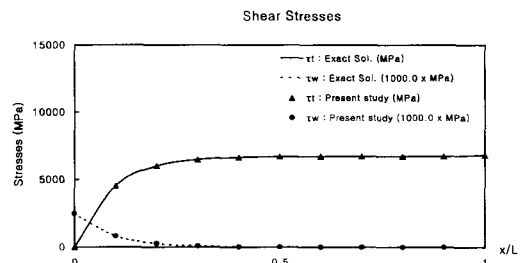


그림 8. 뒹 수직응력

5.3 등분포 비틀모멘트를 받는 양단 고정보

그림 9는 지간이 3.0 m이며 등분포 비틀모멘트 $m_x = 0.113\text{kN}\cdot\text{m}$ 가 작용하는 양단 고정보를 나타낸 것이다. 이 예제는 Elhelbawey와 Fu(1998)가 유효 비틀림계수의 검증을 위해 사용한 것으로 본 연구에서 제시한 유효 비틀림계수와 비교·분석을 위하여 선택하였다. 사용한 단면은 W310x52와 W460x177 이다.

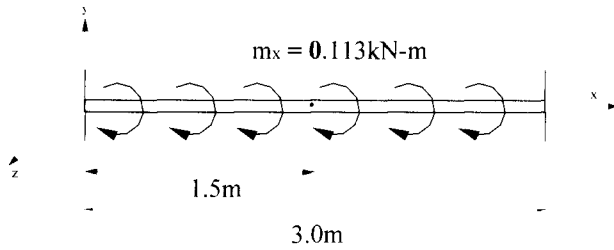


그림 9. 등분포 비틀림모멘트를 받는 양단고정보

각 단면에 대한 비틀림계수와 최대 비틀림각에 대한 결과를 표 3에 나타내었다. 단면 W460x177의 비틀림 강성은 순수 비틀림계수에 비해 Elhelbawey 등의 경우 3.6배, 그리고 본 연구의 경우 8.9배의 증가를 보여주고 있다.

최대 비틀림각은 순수비틀림계수를 사용한 결과와 Elhelbawey 등이 유도한 비틀림계수를 사용한 결과는 엄밀해와 비교하여 각각 1847%, 513%의 오차를 나타내고 있는 반면에 본 연구에서 유도한 유효 비틀림계수를 사용한 최대 비틀림각은 엄밀해에 매우 근접함을 보여주고 있다. 또한 이 표에서 알 수 있듯이 구속된 혹은 자유로운 뒀 경계조건사이에는 상당한 차이가 있음을 나타내고 있다.

각 단면에 대하여 순수 전단응력, 뒀 전단응력, 그리고 뒀 수직응력의 분포를 엄밀해와 Elhelbawey 등의 결과를 함께 그림 10~11과 그림 12~13에 각각 나타내었다. 이 그림에서처럼 본 연구에서 구한 응력은 엄밀해에 매우 근접함을 알 수 있다. 반면에 Elhelbawey 등이 제안한 유효 비틀림계수를 사용한 뒀 전단응력은 양단 지지점에서 엄밀해와 비교하여 상당한 차이를 나타내고 있으나 지지점에서 멀어질수록 오차가 줄어들음을 알 수 있다. 그러나 순수 전단응력과 뒀 수직응력은 응력이 영이 되는 점에서 멀어질수록 오차가 증가하는 것을 볼 수 있다.

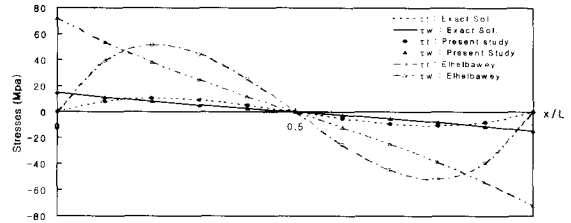


그림 10. W310x52 순수.뒀 전단응력

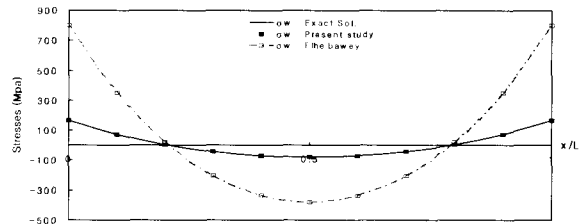


그림 11. W310x52 뒀 수직응력

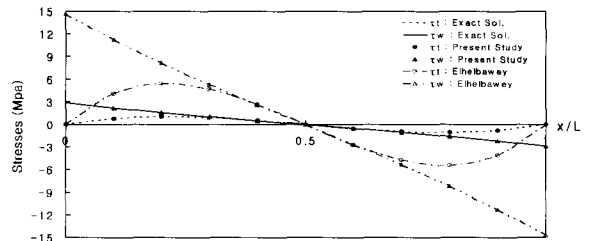


그림 12. W460x177 순수.뒀 전단응력

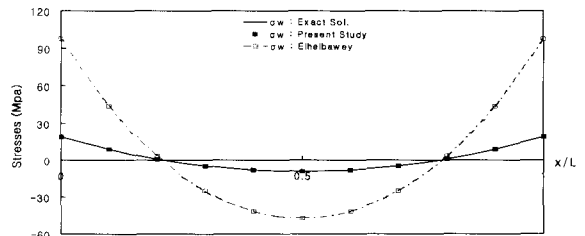


그림 13. W460x177 뒀 수직응력

표 3. 비틀림계수와 최대 비틀림각의 비교

구 분	W310X52		W460X177	
	TORSIONAL CONSTANT (cm ⁴)	θ_{max} (rad)	TORSIONAL CONSTANT (cm ⁴)	θ_{max} (rad)
Unmodified J	29.885	21.13-E02	437.874	14.87-E03
Elhelbawey et al.	75.704	8.60-E02	1576.996	4.13-E03
Present Study	364.380	1.786-E02	3883.468	0.80-E03
Exact Solu.	---	1.788-E02	---	0.81-E03

6. 결 론

본 연구에서는 집중 비틀모멘트와 등분포 비틀모멘트가 작용하는 박벽보에 대하여 순수 비틀림과 뒹 비틀림을 고려할 수 있는 유효 비틀림계수를 유도하였다. 상용 유한요소 프로그램 사용시 순수 비틀림계수 J 대신에 본 연구에서 유도한 유효 비틀림계수를 사용함으로써 비틀모멘트를 받는 박벽보의 뒹 구속에 대한 영향을 쉽게 고려할 수 있게 되었다. 각 비틀모멘트에 대하여 다른 경계조건을 갖는 박벽보의 경우 뒹을 고려한 비틀림각과 응력을 계산하고 엄밀해와 비교 분석하여 그 타당성을 검증하였다. 본 연구에서 유도한 유효 비틀림계수에 의한 결과는 다음과 같다.

- (1) 뒹 비틀림을 고려한 엄밀해와 순수 비틀림에 의한 비틀림각을 이용하여 새로운 유효 비틀림계수를 제안하였다. 등분포 비틀모멘트를 받는 양단 고정보의 경우, 상용 유한요소 프로그램에 의한 순수 비틀림각과 Elhelbawey 등의 결과는 엄밀해와 비교하여 각각 1847%, 513%의 오차를 나타내고 있는 반면에 본 연구에서 유도한 유효 비틀림계수를 사용한 결과는 엄밀해에 매우 근접하였다.
- (2) 또한, 집중 비틀모멘트를 받는 양단고정보, 외팔보, 그리고 뒹자유 양단 고정보에 대한 유효 비틀림계수를 제안하였으며 이를 사용한 결과는 엄밀해와 잘 일치함을 보임으로써 제안된 유효 비틀림계수의 정확성을 검증하였다.
- (3) 유효 비틀림계수는 순수 비틀림계수에 뒹 비틀림의 영향을 고려한 보정계수의 곱으로 표현되었다. 이 보정계수는 다른 부재특성인 λL 과 양단의 뒹 경계조건에 대하여 결정되어 진다. 특별한 경우인 순수 비틀림의 경우, 본 연구에서 유도한 유효 비틀림계수 K_{Teff} 는 순수 비틀림계수 J 와 일치하였다.
- (4) 유효 비틀림계수를 사용하여 구한 순수 전단응력, 뒹 전단응력, 그리고 뒹 수직응력은 엄밀해와 정확히 일치하였다.
- (5) 제안된 유효 비틀림계수의 사용으로 내부 알고리즘의 변환없이 뒹 비틀림에 의한 영향을 고려할 수 있어 6개의 자유도를 가진 상용 유한요소 프로그램의 활용도를 높일 수 있게 되었다.

감사의 글

본 연구는 2002년 인제연구장학재단 국외연수연구비 지원으로 수행되었으며 이에 감사드립니다.

참 고 문 헌

- 곽효경, 이환우 (1998) 뒹의 영향을 고려한 보의 기하학적 비선형 해석, *대한토목학회논문집*, 제 18권 I-3호, pp. 345~355.
- 박효기, 김성보, 김문영, 장승필 (1999) 비대칭단면을 갖는 박벽 공간뼈대구조의 횡-비틀 후좌굴 유한요소해석, *한국강구조학회논문집*, 제 11권 2호, pp. 153~165.
- AISC (2001) *Manual of Steel Construction: Load and Resistance Factor Design*, 3rd ed., American Institute of Steel Construction, Chicago.
- Back, S. Y. and Will, K. M. (1998) A Shear-Flexible Element with Warping for Thin-Walled Open Beams, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 43, pp. 1173~1191.
- Chen, H. and Blandford, G. E. (1989) A C^0 Finite Element Formulation for Thin-Walled Beams, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 28, pp. 2239~2255.
- Elhelbawey, M. I. and Fu, C. C. (1998) Effective Torsional Constant for Restrained Open Section, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 124, No. 11, pp. 1363~1365.
- GTICS System Laboratory, (2005) *School of Civil Engineering, Georgia Institute of Technology, GTSTRUDL User's Manual*, Vol. 3, Atlanta, Georgia, U.S.A.
- Heins, C. P. (1975) *Bending and Torsional Design in Structural Members*, Lexington Books, Lexington, Massachusetts.
- Seaburg, P. A. and Carter, C. J. (1997) *Torsional Analysis of Structural Steel Members*, American Institute of Steel Construction, Chicago, IL.
- Timoshenko, S. P. and Gere, J. M. (1961) *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, New York, U.S.A.
- Tralli, A. (1986) A Simple Hybrid Model for Torsion and Flexure of Thin-Walled Beams, *Computers & Structures*, Vol. 22, pp. 649~658.
- Vlasov, V. Z. (1961) *Thin-Walled Elastic Beams*, Israel Program for Scientific Translations.
- Yang, Y. and McGuire, W. (1986) A Stiffness Matrix for Geometric Nonlinear Analysis, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 112, No. 4, pp. 853~877.
- (접수일자 : 2006. 1. 14 / 심사일 2006. 2. 3 / 심사완료일 2006. 3. 3)