

〈논문〉

## 탄성 구조물의 안정성을 고려한 형상설계민감도해석

최 주 호\*

(2005년 8월 4일 접수, 2005년 12월 9일 심사완료)

### Shape Design Sensitivity Analysis for Stability of Elastic Structures

Jooho Choi

**Key Words :** Shape Design Sensitivity Analysis(형상설계민감도해석), Buckling Load(좌굴하중), Stability Problem(안정성문제)

#### Abstract

This paper addresses the method for the shape design sensitivity analysis of the buckling load in the continuous elastic body. The sensitivity formula for critical load is analytically derived and expressed in terms of shape variation, based on the continuum formulation of the stability problem. Though the buckling problem is more efficiently solved by the structural elements such as beam and shell, the elastic solids are considered in this paper because the solid elements can be used in general for any kind of structures whether they are thick or thin. The initial stress and buckling analysis is carried out by the commercial analysis code ANSYS. The sensitivity is computed by using the mathematical package MATLAB using the results of ANSYS. Several problems including straight and curved beams under compressive load, ring under pressure load, thin-walled section and bottle shaped column are chosen to illustrate the efficiency of the presented method.

#### 1. 서 론

길이가 긴 보 또는 얇은 두께의 셸과 같은 구조체를 최적설계하는 경우, 좌굴(buckling)과 같은 안정성(stability) 문제는 매우 중요한 요소이며, 따라서 각종 토목, 기계 및 항공 분야에서 예기치 않은 파손을 방지하기 위해 중요한 고려 사항으로 인식되고 있다. 구조물의 안정성 해석은 통상의 정적 응력해석을 수행한 후 이를 토대로 추가해석을 실시하므로, 이를 고려하여 최적화를 할 경우는 기존의 구조 최적화 보다 더 복잡한 측면이 있다. 이러한 중요성에도 불구하고 안정성 측면을 고려한 연구는 단순한 판이나 보로 근사화하여 고려한 경우를 제외하고는 의외로 그리 많이 발견되지 않고 있다. 통상의 최적화 과정에서는 경사(gradient) 정보를 이용하여 최적해에 도달하게 되

는데, 구조해석을 수반하는 경우 이를 민감도(sensitivity)라 말하며 이는 설계변수의 미소변화에 따른 응력이나 좌굴하중과 같은 구조 응답의 변화를 말한다. 이것의 계산을 위해서 기존에 간편하게 사용하는 방법으로 직접 설계변수를 증분시켜 응답을 구한 후 차분을 계산하는 유한차분법(finite difference method, FDM)이 있다. 그러나 이 방법은 컴퓨터 계산 시간이 매우 많이 소요될 뿐 아니라 수치적 미분으로 인한 오차가 존재하므로 바람직하지 못한 방법으로 알려져 있다. 반면에 설계민감도해석(design sensitivity analysis, DSA) 방법은 구조해석 문제를 해석적으로 미분하여 이로부터 민감도 공식을 만들고 이것을 계산하는 방법으로서 정확할 뿐 아니라 계산시간도 매우 적게 걸리는 효과적인 방법으로 알려져 있다.<sup>(1,2)</sup> 본 연구에서는 이러한 효과적인 방법을 좌굴을 고려한 설계 문제에 적용하고자 한다. DSA 방법을 적용하여 좌굴을 고려한 최적설계를 수행한 사례는 최근의 몇몇 논문에서 발견되고 있다. Gu 등<sup>(3)</sup>은 좌굴을 고려한 보, 판 및 셸 구조물의 치수와 형상 최적설

\* 회원, 한국항공대학교 항공우주 및 기계공학부

E-mail : jhchoi@hau.ac.kr

TEL : (02)300-0117 FAX : (02)3158-2191

계에 DSA 법을 적용하였는데, 여기서 사용한 방법은 이산화 접근법(discrete approach)으로서 이산화된 구조해석 방정식을 미분하고 이로부터 민감도 공식을 만들어 계산하였다. 같은 이산화법이기는 하지만 강성행렬의 미분계산을 위해 유한차분을 사용하는 준해석적(semi-analytical) 방법을 이용한 사례도 있는데, Koiter-Roorda 프레임과 얇은셸 지붕 문제를 고려한 Boer 와 Keulen<sup>(4)</sup>과 판과 셸 구조물에 대해 고려한 Özakça 등<sup>(5)</sup>의 것이 있다.

지금까지 발견된 이들의 연구는 모두 이산화 기반의 방법으로서 지배식을 이산화한 후 이들을 미분하여 민감도 정보를 얻는 것이다. 이는 강성행렬 정보를 필요로 하므로 상용 해석코드를 사용하는 것이 불가능하며, 처음부터 직접 코드를 만들어 민감도까지 계산하는 수 밖에 없다. 또한 지금까지의 연구는 모두 형상이 아닌 치수를 설계변수로 고려하였으며, 해석의 대상 역시 구조요소(structural element)라고 일컬어지는 보나 셸 요소를 대상으로 하였다.

본 연구에서는 좌굴 문제에 대해, 구조요소가 아닌 연속체 구조물(continuum structure)을 대상으로, 그리고 치수가 아닌 형상을 고려하여, 설계민감도해석을 수행하는 방법을 개발하였다. 한편 기존의 정적 해석을 고려하는 경우에는 형상 DSA 방법에 대해 이미 매우 많은 연구가 있어 왔는데, 이는 크게 두가지로 나뉜다. 하나는 앞서 언급한 이산화 접근법<sup>(1)</sup>이며, 다른 하나는 그 반대인 연속체 접근법(continuum approach)<sup>(2)</sup>이다. 연속체 접근법은 이산화되기 전인 원래의 구조해석 방정식을 해석적으로 미분하고 이를 토대로 민감도 공식을 유도하는 방법이다. 이 방법은 이산화 접근법에 비해 더 높은 수학지식을 필요로 하지만 일단 공식을 얻고 나면 계산과정이 매우 편리하고, 정확도도 더 좋은 장점이 있다. 게다가 해석코드가 어떤 것이든 상관없이 해석결과만을 가지고 민감도를 계산하므로 상용 코드를 사용할 수 있는 이점도 있다. 이러한 장점에도 불구하고 좌굴 문제에서 연속체 접근법을 이용한 DSA 연구사례는 아직 찾아 볼 수 없다.

본 연구에서는 2-D 및 3-D 탄성체에 관해 연속체 접근법에 기반하여 좌굴을 고려한 형상 DSA를 수행하는 방법을 개발하였다. 이를 위해 임계하중(critical load)에 관한 민감도 공식을 유도하였고, 이를 형상변분(shape variation)의 함수로 표현하였다. 한편 좌굴은 연속체 보다는 보나 셸 같은 구조요소에서 더 중요한 고려 사항이다. 그럼에도 불구하고 본 연구는 연속체를 대상으로 하였는데, 그 이유는 연속체 모델을 이용하면 슬리드 요소들

이용하여 뚝뚝한 형상뿐 아니라 보나 셸 같은 슬림(slim) 한 구조요소 모델도 모두 커버할 수 있기 때문이다. 구조요소에서 다루는 치수, 형상설계는 연속체에서는 모두 형상설계가 되는데, 이는 본문의 예제들을 보면 잘 알 수 있다. 본 연구에서는 고유치 문제로 표현되는 선형좌굴 해석을 대상으로 하였고, 실제 해석은 ANSYS를 사용하였다. 민감도 계산은 ANSYS에서 얻은 해석결과를 가지고 외부에서 MATLAB을 이용하여 계산하였다. 검증용 예제로 압축하중 하의 직선 및 곡선보, 압력을 받는 환형링, 박판단면이나 병과 같은 모양의 3차원 기둥문제 등을 대상으로 설계민감도 해석을 수행하였고, 그 결과 DSA 방법의 효율성, 정확성을 입증하였다.

## 2. 안정성 해석

임의의 연속체에서 정의된 변위  $u_i$ 에 대해 정적 평형을 위한 지배식은 다음과 같이 주어진다.

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \text{ in } \Omega \quad (1)$$

여기서 응력텐서는

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2)$$

로 주어지며, 탄성계수 텐서는 다음과 같은 조건을 만족한다.

$$D_{ijkl} = D_{klij} \quad (3)$$

경계조건은 일반적으로

$$\begin{aligned} u_i &= U_i \text{ on } \Gamma_u \\ t_i &= \sigma_{ij} n_j = T_i \text{ on } \Gamma_t \end{aligned} \quad (4)$$

으로 주어지며 여기서  $U_i$ 와  $T_i$ 는 각각의 부경계  $\Gamma_u$ 와  $\Gamma_t$ 에서 주어진 값들이다. 가상 일의 원리를 적용하면 이 문제는 다음과 같은 가중잔여식(weighted residual statement)으로 변환할 수 있다.

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\bar{\mathbf{u}}) dx = \int_{\Omega} f_i \bar{u}_i dx + \int_{\Gamma_t} T_i \bar{u}_i ds, \quad \forall \bar{\mathbf{u}}_i \in Z \quad (5)$$

여기서  $Z$ 로 표현된 변수는 가중변위를 나타내며,  $Z$ 는 경계  $\Gamma_u$ 에서 변위값이 0인 변위공간을 나타낸다. 통상의 유한요소해석은 이 식을 기반으로 하고 있으며, 이로부터 변위  $\mathbf{u}$ 를 구하고 나면 응력분포  $\sigma(\mathbf{u})$ 는 후처리 과정으로 구해진다. 그리고 나면 좌굴문제는 앞서 구해진 결과를 초기응력으로 하여 다음과 같은 방정식과 경계조건을 만족하는 특이값  $k$ 를 구하는 문제가 되는데, 이를 임

계치 라고도 부르며, 여기에 하중을 곱하면 임계 하중이 된다.<sup>(6)</sup>

$$\begin{aligned} \sigma_{y,j}(\mathbf{w}) + k(\sigma_{jk}(\mathbf{u})w_{i,j})_{,k} &= 0 \text{ in } \Omega \\ w_i &= 0 \text{ on } \Gamma_u \\ t_i(\mathbf{w}) + kt_j(\mathbf{u})w_{i,j} &= 0 \text{ on } \Gamma_t \end{aligned} \quad (6)$$

여기서  $\mathbf{w}$  는 좌굴상태에서의 변위를 나타낸다. 이에 대해 역시 가상 일의 원리를 적용하면 다음과 같이  $\mathbf{w}$  에 관한 또 다른 가중잔여식을 얻게 된다.

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{w})\varepsilon_{ij}(\bar{\mathbf{w}})dx = -k \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u})w_{k,i}\bar{w}_{k,j}dx, \forall \bar{w}_i \in Z \quad (7)$$

한편 식 (5)에 있는 체적력  $f_i$ 와 표면력  $T_i$ 는 좌굴거동 중에 크기는 물론 방향도 변하지 않는 고정된 값이라고 가정한다.

### 3. 안정성 문제의 형상설계민감도해석

안정성문제에서의 형상설계민감도해석은 식 (7)에 있는 임계값  $k$ 에 대해 형상 변화에 따른  $k$ 의 변화를 구하는 민감도 공식을 유도하고 이를 계산하는 것이다. 일반적으로 형상을 설계변수로 하는 문제에서 형상의 변화를 효과적으로 표현하는 방법으로 전미분(material derivative) 방법이 잘 알려져 있다.<sup>(7)</sup> 이 경우 형상변분 벡터는 유체의 속도 벡터  $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ 에 해당되며, 이를 설계속도장(design velocity field)이라고도 한다. 이때 각종 변수의 변분은 전미분으로 표현된다. 민감도 공식의 유도는 식 (7)의 전미분에서 출발한다.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left\{ \sigma_{ij}(\mathbf{w}) \varepsilon_{ij}(\bar{\mathbf{w}}) + \sigma_{ij}(\mathbf{w}) \left\{ \varepsilon_{ij}(\bar{\mathbf{w}}) \right\} \right\} dx \\ &= -k \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u})w_{k,i}\bar{w}_{k,j}dx \\ & -k \int_{\Omega} \left\{ \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \left\{ w_{k,i}\bar{w}_{k,j} + \sigma_{ij}(\mathbf{u})(w_{k,i})_{,j}\bar{w}_{k,j} \right\} \right. \\ & \left. + \sigma_{ij}(\mathbf{u})w_{k,i}(\bar{w}_{k,j})_{,j} + \sigma_{ij}(\mathbf{u})w_{k,i}\bar{w}_{k,j}V_{k,k} \right\} dx \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 점( $\cdot$ , dot)이 부여된 변수가 전미분을 의미하는데 이들은 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$\begin{aligned} (w_{i,j}) &= w'_{i,j} + w_{i,jk}V_k = \dot{w}_{i,j} - (w_{i,k}V_k)_{,j} + w_{i,jk}V_k \\ \dot{\varepsilon}_{ij} &= \varepsilon'_{ij} + \varepsilon_{ij,k}V_k = \varepsilon_{ij}(\dot{\mathbf{w}}) - \varepsilon_{ij}(\mathbf{w}_kV_k)_{,j} + \varepsilon_{ij,k}V_k \\ \dot{\sigma}_{ij} &= \sigma'_{ij} + \sigma_{ij,k}V_k = \sigma_{ij}(\dot{\mathbf{w}}) - \sigma_{ij}(\mathbf{w}_kV_k)_{,j} + \sigma_{ij,k}V_k \end{aligned} \quad (9)$$

이들을 식 (8)에 대입하고 정리하면

$$k \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u})w_{k,i}\bar{w}_{k,j}dx$$

$$\begin{aligned} &= - \int_{\Omega} \left\{ \begin{aligned} & -\sigma_{ij}(\mathbf{w}_kV_k) + \sigma_{ij,k}(\mathbf{w})V_k \left\{ \varepsilon_{ij}(\bar{\mathbf{w}}) \right\} \\ & + \sigma_{ij}(\mathbf{w}) \left\{ -\varepsilon_{ij}(\bar{\mathbf{w}}_kV_k) + \varepsilon_{ij,k}(\bar{\mathbf{w}})V_k \right\} \\ & + \sigma_{ij}(\mathbf{w})\varepsilon_{ij}(\bar{\mathbf{w}})V_{k,k} \end{aligned} \right\} dx \\ & -k \int_{\Omega} \left\{ \begin{aligned} & \left\{ \sigma_{ij}(\dot{\mathbf{u}}) - \sigma_{ij}(\mathbf{u}_kV_k) + \sigma_{ij,k}(\mathbf{u})V_k \right\} w_{k,i}\bar{w}_{k,j} \\ & + \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \left\{ -(w_{k,i}V_i)_{,j} + w_{k,i,j}V_i \right\} \bar{w}_{k,j} \\ & + \sigma_{ij}(\mathbf{u})w_{k,i} \left\{ -(\bar{w}_{k,i}V_i)_{,j} + \bar{w}_{k,i,j}V_i \right\} \\ & + \sigma_{ij}(\mathbf{u})w_{k,i}\bar{w}_{k,j}V_{i,i} \end{aligned} \right\} dx \\ & - \int_{\Omega} (\sigma_{ij}(\dot{\mathbf{w}})\varepsilon_{ij}(\bar{\mathbf{w}}))dx - k \int_{\Omega} (\sigma_{ij}(\mathbf{u})\dot{w}_{k,i}\bar{w}_{k,j})dx \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 마지막 두 적분항에는  $\mathbf{w}$ 의 전미분 즉  $\dot{\mathbf{w}}$ 가 포함되어 있는데 이들은 설계속도장  $\mathbf{V}$ 의 내재적 함수(implicit function)이다. 이들을  $\mathbf{V}$ 에 관한 명시적 표현(explicit expression)으로 바꾸기 위해 다음과 같은 식을 만족하는 보조변수(adjoint variable)  $\mathbf{w}^*$ 를 도입한다.

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{w}^*)\varepsilon_{ij}(\bar{\mathbf{w}})dx = -k \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u})w_{k,i}^*\bar{w}_{k,j}dx, \forall \bar{w}_i \in Z \quad (11)$$

이 식에서 임의의 가중변수  $\bar{\mathbf{w}}$ 를  $\dot{\mathbf{w}}$ 로, 식 (10)에서 가중변수  $\bar{\mathbf{w}}$ 는  $\mathbf{w}^*$ 로 바꾸면 마지막 두 적분을 소거할 수 있다. 그런데 식 (11)을 보면 보조변수는 기본변수(primal variable)  $\mathbf{w}$ 와 같은 식 (7)을 만족하므로  $\mathbf{w}$ 와 같다고 놓을 수 있다. 그 결과 식 (10)은 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} & k \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u})w_{k,i}w_{k,j}dx \\ &= \int_{\Omega} \left[ 2t_i(\mathbf{w})w_{i,j}V_j - \sigma_{ij}(\mathbf{w})\varepsilon_{ij}(\mathbf{w})V_n \right] ds \\ & + k \int_{\Omega} \left[ 2t_i(\mathbf{u})w_{k,i}w_{k,j}V_j - \sigma_{ij}(\mathbf{u})w_{k,i}w_{k,j}V_n \right] ds \\ & - k \int_{\Omega} \left\{ \sigma_{ij}(\dot{\mathbf{u}}) - \sigma_{ij}(\mathbf{u}_iV_i) \right\} w_{k,i}w_{k,j}dx \end{aligned} \quad (12)$$

여기서  $\sigma(\dot{\mathbf{u}})$ 는 여전히  $\dot{\mathbf{u}}$ 를 포함하고 있기 때문에 역시  $\mathbf{V}$ 에 관한 내재적 함수이다. 이것은 식 (5)를 활용하여 명시적 표현식으로 바꾸게 된다. 이를 위해 식 (5)를 전미분한다.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\dot{\mathbf{u}})\varepsilon_{ij}(\bar{\mathbf{u}})dx = - \int_{\Omega} u_{i,k}V_k\sigma_{ij}(\bar{\mathbf{u}})dx \\ & + \int_{\Gamma} \left[ \begin{aligned} & \left\{ u_{i,k}t_i(\bar{\mathbf{u}}) + \bar{u}_{i,k}t_i(\mathbf{u}) \right\} V_k \\ & + \left\{ f_i\bar{u}_i - \sigma_{ij}(\mathbf{u})\varepsilon_{ij}(\bar{\mathbf{u}}) \right\} V_n \end{aligned} \right] ds \\ & + \int_{\Gamma} T_i\bar{u}_iDV_s ds \end{aligned} \quad (13)$$

이것의 유도과정은 선행연구에 상세히 기술되어 있다.<sup>(8)</sup> 식 (12)의  $\sigma(\dot{\mathbf{u}})$ 를 소거하기 위해 다음 식을 만족하는 또 다른 보조변수  $\mathbf{u}^*$ 를 도입한다.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u}^*) \varepsilon_{ij}(\bar{\mathbf{u}}^*) dx \\ &= \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}^{\circ} \sigma_{ij}(\bar{\mathbf{u}}^*) dx \\ &= \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{\circ} \varepsilon_{ij}(\bar{\mathbf{u}}^*) dx, \quad \forall \bar{\mathbf{u}}^* \in Z \end{aligned} \quad (14)$$

여기서

$$\varepsilon_{ij}^{\circ} = w_{k,i} w_{k,j} \quad (15)$$

이며  $\sigma_{ij}^{\circ}$  는 식 (15)를 식 (2)에 대입하여 얻는다. 여기서 특기할 것은 보조변수  $\mathbf{u}^*$ 에 관한 식 (14)는 기본변수  $\mathbf{u}$ 에 대해 해석했던 정적 문제에서 단지 경계조건이 균질적(homogeneous)인 것으로 바뀌고 초기응력이 다음과 같이 주어진 문제를 해석하는 것이 된다.

$$\sigma_{ij}^l = -\sigma_{ij}^{\circ} \quad (16)$$

따라서 보조변수는 새로운 해석이 아니고 기존의 해석 데이터베이스를 그대로 활용하여 조건만 바꾸어 해를 구할 수 있다. 식 (14)에서  $\bar{\mathbf{u}}^*$ 를  $\hat{\mathbf{u}}$ 로, 그리고 식 (13)에서  $\bar{\mathbf{u}}$ 는  $\mathbf{u}^*$ 로 바꾸면 식 (12)의 전미분 항은 식 (13)의 우측항과 같게 된다. 최종적으로 민감도 공식은 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} & k \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{\circ} dx \\ &= \int_{\Gamma} [2T_i w_{i,j} V_j - S_{ij} E_{ij} V_n] ds \\ &+ k \int_{\Gamma} (2t_i \varepsilon_{ij}^{\circ} V_j - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{\circ} V_n) ds \\ &- k \int_{\Gamma} \left[ \begin{aligned} & (u_{i,k} \bar{t}_i^* + u_{i,k}^* t_i) V_k \\ & + (f_i u_i^* - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{\circ}) V_n + t_i u_i^* DV_s \end{aligned} \right] ds \end{aligned} \quad (17)$$

여기서 각종 변수들의 변수(argument)  $\mathbf{u}$ 와  $\mathbf{u}^*$ 는 편의상 표현을 생략하였고, 또한 좌굴변수  $\mathbf{w}$ 에 관한 것과  $\mathbf{u}$ 에 관한 것은 대문자와 소문자로 표기하여 구별하였다. 그리고 심볼 ~은 다음과 같이 변수 값의 차이를 나타내는 것이다.

$$\bar{\sigma}_{ij}^* = \sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}^{\circ} \quad (18)$$

한편 식 (17)을 보면  $u_{i,j}$ 나  $w_{i,j}$  등이 있는데 이들은 경계에서 변위의 편미분을 나타내며, 상용해석 코드의 경우 변형률(strain) 텐서는 얻을 수 있으나 이들은 얻을 수 없다. 따라서 이들은 다음과 같은 변환공식을 이용하여 계산이 가능한 형태로 바뀌야 한다.

$$\begin{aligned} T_i w_{i,j} V_j &= T_i (w_{i,\alpha} V_{\alpha} + w_{i,\beta} V_{\beta}) \\ &= (S_{ij} E_{ij} - Q_i w_{i,s}) V_n + T_i w_{i,s} V_s \end{aligned} \quad (19)$$

여기서

$$Q_i = S_{ij} s_j \quad (20)$$

식 (19)에서 ,s 로 표현된 것은 경계에서의 접선방향 미분을 의미하며 이들은 경계를 따라 수치미분하여 계산해야 한다. 식 (19)를 식 (17)에 대입하면

$$\begin{aligned} & k \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{\circ} dx \\ &= \int_{\Gamma} [S_{ij} E_{ij} V_n + 2w_{i,s} (T_i V_s - Q_i V_n)] ds \\ &+ k \int_{\Gamma} \varepsilon_{ij}^{\circ} (2t_i V_j - \sigma_{ij} V_n) ds \\ &- k \int_{\Gamma} \left[ \begin{aligned} & (\varepsilon_{ij} \bar{\sigma}_{ij}^* - u_{i,s} \bar{q}_i^* - q_i u_{i,s}^* + f_i u_i^*) V_n \\ & + (u_{i,s} \bar{t}_i^* + t_i u_{i,s}^*) V_s + t_i u_i^* DV_s \end{aligned} \right] ds \end{aligned} \quad (21)$$

3 차원 문제의 경우 공식 (21)은 경계적분이 라인이 아니라 면이 된다. 이때는 경계 표면에서 두 수직방향 국부좌표  $\alpha$ 와  $\beta$ 를 정의하고 각 방향의 설계속도 벡터  $V_{\alpha}$  및  $V_{\beta}$ 를 고려해야 한다. 또한 좌굴 문제에서 표면에서의 응력의 각 방향 접선벡터 성분은

$$Q_i = S_{ij} \alpha_j, \quad R_i = S_{ij} \beta_j \quad (22)$$

초기 정적 문제의 표면에서의 응력의 각 방향 접선벡터 성분은

$$q_i = \sigma_{ij} \alpha_j, \quad r_i = \sigma_{ij} \beta_j \quad (23)$$

으로 정의한다. 그러면 민감도 공식은

$$\begin{aligned} & k \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{\circ} dx \\ &= \int_{\Gamma} \left[ \begin{aligned} & S_{ij} E_{ij} V_n + 2T_i (w_{i,\alpha} V_{\alpha} + w_{i,\beta} V_{\beta}) \\ & - 2(w_{i,\alpha} Q_i + w_{i,\beta} R_i) V_n \end{aligned} \right] ds \\ &+ k \int_{\Gamma} \varepsilon_{ij}^{\circ} (2t_i V_j - \sigma_{ij} V_n) ds \\ &- k \int_{\Gamma} \left[ \begin{aligned} & \left[ \varepsilon_{ij} \bar{\sigma}_{ij}^* - u_{i,\alpha} \bar{q}_i^* - u_{i,\beta} \bar{r}_i^* \right. \\ & \left. - q_i u_{i,\alpha}^* - r_i u_{i,\beta}^* + f_i u_i^* \right] V_n \\ & + t_i (u_{i,\alpha} V_{\alpha} + u_{i,\beta} V_{\beta}) \\ & + \bar{t}_i^* (u_{i,\alpha} V_{\alpha} + u_{i,\beta} V_{\beta}) \\ & + t_i u_i^* DV_s \end{aligned} \right] ds \end{aligned} \quad (24)$$

민감도 해석의 전체적인 과정은 다음과 같다.

- Step 1. 식 (1)과 (4)로 주어진 초기 평형문제의 해  $\mathbf{u}$ 를 구한다.
- Step 2. 식 (6)으로 주어진 좌굴문제의 해, 즉 임계값  $k$  및 해당변위  $\mathbf{w}$ 를 구한다.

Step 3. 초기응력이 식 (16)으로 주어지고 경계조건은 동질(homogeneous)인 보조변수에 관한 정적 문제의 해  $\mathbf{u}^*$ 를 구한다.

Step 4. 스텝 1~3 과 병행하여 설계속도장  $\mathbf{V}$ 를 구한다.

Step 5. 앞에서 구한 각종 변수들을 공식 (21) 또는 (24)에 대입하여 민감도를 계산한다.

설계속도장  $\mathbf{V}$ 의 계산은 선행연구<sup>(8)</sup>에서 언급한 바와 같이 설계속도의 계산만을 위한 유한차분법을 이용한다. 경계 형상이 유한개의 설계변수  $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ 를 통해 표현된다고 할 때 이는 다음과 같이 나타난다.

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{b}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (25)$$

이때 설계속도장은 정의에 의하면 다음과 같이 표현된다.

$$\delta \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial b_i} \delta b_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{V}^i \delta b_i \quad (26)$$

즉 설계속도벡터는 임의의 한 설계변수  $b_i$ 의 변화에 따른 경계 상의 점  $\mathbf{x}$ 의 변화를 의미하는 것이다. 따라서 설계속도 벡터는 설계변수의 개수  $n$ 만큼 존재한다. 이러한 설계속도 벡터는 경계를 표현하는 형상함수(예를 들어, 원, 타원, 직선, 스플라인 등)를 알고 있다면 그들을 해석적으로 미분하여 얻을 수 있다. 그러나 이것은 형상함수마다 각각 달리 고려해야 하므로 매우 불편하고 코딩이 복잡한 문제가 있다. 따라서 보다 쉬운 방법으로 형상의 변분만을 위해 유한차분을 행하는 것이다. 이에 의하면 설계속도 벡터는

$$\mathbf{V}^i(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial b_i} \approx \frac{1}{\Delta b_i} \{ \mathbf{x}(\mathbf{b} + \Delta b_i \mathbf{e}_i) - \mathbf{x}(\mathbf{b}) \} \quad (27)$$

으로 나타난다. 여기서  $\mathbf{e}_i$ 는  $i$ 번째 설계변수 방향의 단위벡터를 의미한다. 이렇게 함으로써 설계속도 벡터의 계산은 매우 간편하고 형상함수에 상관없이 일반화할 수 있다. 또한 이러한 유한차분은 기존에 언급한 유한차분과는 전혀 다른 것으로서 초기에 형상모델을 생성하고 이로부터 만든 경계의 유한요소만을 가지고 계산하는 것이기 때문에 계산시간의 증가는 거의 없다.

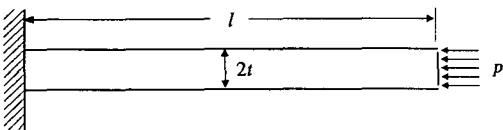


Fig. 1 A straight beam problem

#### 4. 설계민감도해석의 예제

##### 4.1 일정 두께의 직선보

Fig. 1 과 같은 직선 외팔보 (길이 2, 두께 0.2)에 대해 우측단에서 압축하중이 가해지고 있다. 탄성계수  $E$ 와 포아손 비  $\nu$ 는 각각 200E9 와 0.293 이다. 이에 대한 좌굴하중의 해석해는 보이론에 의해 다음과 같이 주어진다.

$$k = \frac{\pi^2 EI}{4 l^2} \quad \text{여기서 } I = \frac{b(2t)^3}{12} \quad (28)$$

본 문제에서 설계변수는 길이  $l$  과 반두께(half-thickness)  $t$ 이다. 너비  $b$ 는 단위값으로 가정한다 좌굴하중에 관한 민감도는 식 (28)을 각 변수에 관해 미분하여 계산할 수 있다. 이에 의하면  $k$  값은 4.1123E8, 그리고 민감도는 각각 -4.1123E8 과 8.2247E9 이다. 참고로 본 문제를 보요소로 모델링하여 고려하는 경우 설계변수  $t$ 는 치수변수가 되지만 본 경우에는 연속체로 모델링 했기 때문에 형상변수가 된다. 본 문제에 대해 ANSYS 의 8-절점 사변형 요소 PLANE82 를 이용하여 좌굴해석을 수행하고, 유한차분법(FDM) 및 설계민감도(DSA) 방법을 각각 이용하여 민감도를 계산해 보았다. 그 결과가 Table 1 에 있는데 여기서  $N_x$  와  $N_y$ 는 길이 및 두께방향으로의 유한요소 개수를 의미하며, Ratio 는 DSA 민감도를 FDM 민감도 값으로 나눈 것을 %로 표시한 것으로서 FDM 민감도를 기준으로 했을 때의 상대적 정확도를 의미한다. 즉 이것이 100 이면 FDM 과 동일한 민감도를 의미하여 정확한 값이라고 생각한다. 표에서 보는 바와 같이 메쉬 개수가 증가함에 따라 정확도가 향상되는 것을 알 수 있다.  $k$  값과 DSA 민감도는 각각 4.0789E8, -4.0750E8 및 8.1455E9 으로 나왔는데, 이것들과 위에서 구한 해석 해와의 오차는 모두 1% 이내로 나타났다.

##### 4.2 일정 두께의 곡선보

Fig. 2와 같은 일정 두께의 곡선보가 압축하중을 받고 있을 때 밀변 곡선을 3 점 B-스플라인으로 표현 하였고, 이때 좌단, 중심 및 우단의 높이를 각각 0.1, 0.5 및 0.1 로 하였다. 설계변수는 중심의 높이  $h$ 와 보의 두께  $t$ 로 하였다. 본 경우에는 요소개수를 길이 및 두께 방향으로 각각  $(N_x, N_y) = (80, 8)$ 로 하였다. 두께가 0.1, 0.02, 0.01 의 세 경우에 대해 설계민감도해석을 수행하였고 그 결과가 Table 2 에 있다. 두께가 감소함에 따라 두께에 대

Table 1 Sensitivity comparison of critical load in the straight beam problem

Nx	Ny	Critical Load	Design variable = Length 2.0			Design variable = Half height 0.1		
			FDM	DSA	Ratio	FDM	DSA	Ratio
10	2	4.0799E+08	-4.0405E+08	-4.5268E+08	112.04	8.0983E+09	1.0142E+10	125.23
10	4	4.0797E+08	-4.0397E+08	-4.5398E+08	112.38	8.0947E+09	8.6315E+09	106.63
10	8	4.0797E+08	-4.0409E+08	-4.4465E+08	110.04	8.0952E+09	8.2539E+09	101.96
10	16	4.0798E+08	-4.0404E+08	-4.3678E+08	108.10	8.0964E+09	8.1632E+09	100.83
20	2	4.0792E+08	-4.0404E+08	-4.3517E+08	107.70	8.0959E+09	1.0106E+10	124.83
20	4	4.0789E+08	-4.0400E+08	-4.2706E+08	105.71	8.0946E+09	8.6200E+09	106.49
20	8	4.0789E+08	-4.0397E+08	-4.1720E+08	103.27	8.0953E+09	8.2420E+09	101.81
20	16	4.0790E+08	-4.0395E+08	-4.1398E+08	102.48	8.0919E+09	8.1469E+09	100.68
40	2	4.0791E+08	-4.0414E+08	-4.3158E+08	106.79	8.0958E+09	1.0084E+10	124.55
40	4	4.0789E+08	-4.0393E+08	-4.2162E+08	104.38	8.0947E+09	8.6113E+09	106.38
40	8	4.0789E+08	-4.0397E+08	-4.1112E+08	101.77	8.0945E+09	8.2401E+09	101.80
40	16	4.0789E+08	-4.0389E+08	-4.0750E+08	100.89	8.0952E+09	8.1455E+09	100.62

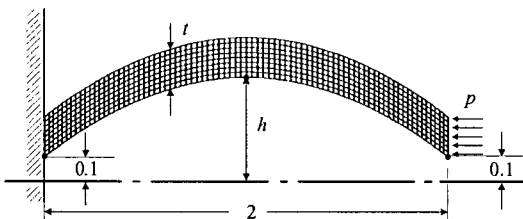


Fig. 2 FE model of a curved beam with constant thickness in case of  $t = 0.1$

한 민감도는 계속 정확도를 유지하는 반면 높이에 대한 민감도는 점점 나빠짐을 알 수 있는데 이는 연속요소(solid element)의 세장비(aspect ratio)가 두께가 점점 얇아 지면서 매우 심하게 증가하며 이것이 해의 정확도를 저하시키기 때문으로 생각된다. 이를 해결하기 위해서는 앞의 예제처럼 길이 방향 요소 수를 증가시켜야 하나 이는 해석시간을 증가시키는 요인이 되어 바람직하지 않다. 따라서 매우 얇은 구조요소와 같은 문제는 결국 보와 같은 구조요소로 모델링하여 접근하는 것이 더 바람직할 것으로 예상된다. 그러나 본 접근 방법으로도 전반적인 정확도는 그런대로 좋으며 최적화에 사용하기에 문제가 없는 수준이라 생각된다.

4.3 압력 및 집중 하중하의 환형링

반지름 2, 두께 0.1의 환형링에 대해 외부에서 하중을 가한 경우에 대해 대칭성을 고려하여 1사분면만을 고려한다. 하중은 외측원에서 일정압력을 가한 경우와 내측원의 45° 지점에서 원점을 향해 집중하중이 가해지고 있는 경우의 두가지를 고려한다. 이런 두 경우에 대해 하중이 점점 증가하면 초기의 응력상태는 불안정하게 되면서 좌굴이 발생한다. 설계변수를 반지름과 두께로 할 때 이들에 대한 좌굴하중의 민감도를 계산한다. 집중하중이 가해진 경우에 대해 초기 응력상태와 좌굴

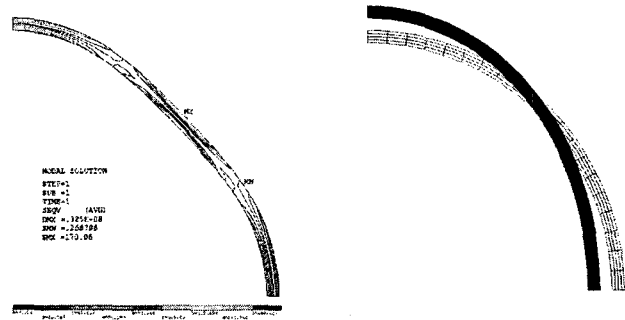
Table 2 Sensitivity comparison of critical load in the curved beam with constant thickness

Design variable	Thickness	Critical Load	FDM	DSA	Ratio
height at mid-point	0.1	2.7590E+08	-5.0840E+08	-5.2938E+08	104.13
	0.02	1.0945E+07	-2.1170E+07	-2.2259E+07	105.15
	0.01	2.7339E+06	-5.3030E+06	-5.8243E+06	109.83
thickness	0.1	2.7590E+08	5.5365E+09	5.6277E+09	101.65
	0.02	1.0945E+07	2.1931E+07	2.2270E+07	101.55
	0.01	2.7339E+06	5.4694E+06	5.5506E+06	101.48

상태를 각각 Fig. 3(a)와 (b)에 보였다. 본 경우에서도 유한요소 수의 증가에 따른 민감도를 계산하였고, 그 결과가 Table 3에 있다. 여기서  $N_x$ 와  $N_y$ 는 원주방향과 두께방향으로의 요소수이다. 결과를 보면 앞의 예제와 같이 두께에 대한 민감도는 항상 정확도가 좋은 반면 반지름에 관한 민감도는 요소수에 대해 매우 민감하게 영향을 받음을 알 수 있다.

4.4 곡선 단면을 가진 3차원 기둥

두께가 얇은 곡선 단면형상을 가진 3차원 기둥이 Fig. 4(a)와 같이 외팔보 형태로 구속되어 있으며 앞단에 압력이 가해지고 있다. 곡선단면의 형상은 앞의 곡선보 예제 4.2와 동일한 것으로 하였고, 기둥의 길이는 10으로 하였다. 설계변수는 앞의 예제에서처럼 곡선보의 중심의 높이 h와 두께 t로 하였다. 한편 압력이 가해지는 기둥의 앞단은 자유단으로 하지 않고 x와 y 방향의 변위를 구속하여 z 방향으로만 변위가 발생하도록 하였다. ANSYS의 SOLID95 요소를 사용하였고, 좌굴된 형상을 Fig. 4(b)에 나타내었다. 여러 종류의 유한요소에 대해 민감도를 계산하였고 그 결과를 Table 4에 보였다. 여기서,  $N_x, N_y$ 는 원주방향 및 두께방향 요소수를,  $N_z$ 는 축방향 요소수를 의미한다. 표에서 볼 수 있듯이 요소수가 증가함에 따라 민감도 정확도가 향상되고 있는데, 앞의 경우



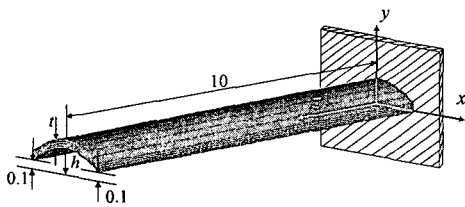
(a) Initial stress state

(b) Buckled shape

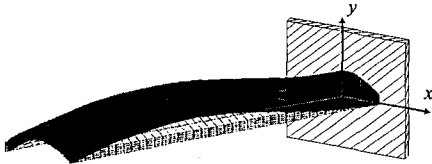
Fig. 3 Ring under point load

Table 3 Sensitivity comparison of critical load in the ring problem

	Na	Nb	Critical Load	Design variable = Radius 2.0			Design variable = Thickness 0.1		
				FDM	DSA	Ratio	FDM	DSA	Ratio
Pressure load	10	4	7.5486E+06	-1.0628E+07	-2.9590E+07	278.41	2.1316E+08	2.1548E+08	101.09
	20	4	7.3630E+06	-1.0550E+07	-1.3295E+07	126.01	2.1161E+08	2.1952E+08	103.74
	40	4	7.3520E+06	-1.0545E+07	-1.2415E+07	117.73	2.1151E+08	2.1962E+08	103.83
	40	8	7.3520E+06	-1.0545E+07	-1.1136E+07	105.60	2.1150E+08	2.1335E+08	100.87
	40	16	7.3520E+06	-1.0545E+07	-1.0766E+07	102.09	2.1150E+08	2.1181E+08	100.14
Point load	10	4	2.8552E+07	-2.7565E+07	-8.5063E+07	308.59	8.3847E+08	8.4456E+08	100.73
	20	4	2.7952E+07	-2.7765E+07	-4.1805E+07	150.57	8.3648E+08	8.6549E+08	103.47
	40	4	2.7945E+07	-2.7795E+07	-4.6742E+07	168.17	8.3701E+08	8.6749E+08	103.64
	40	8	2.7927E+07	-2.7768E+07	-3.8474E+07	138.55	8.3629E+08	8.4314E+08	100.82
	40	16	2.7863E+07	-2.7667E+07	-2.9431E+07	106.38	8.3369E+08	8.3496E+08	100.15



(a) Problem statement



(b) Buckled shape

Fig. 4 Straight beam with curved section

와 달리 본 경우에는 높이에 대한 민감도는 전반적으로 정확한 반면, 두께의 민감도는 요소수, 특히 축방향 요소 개수에 대해 더 민감한 영향을 받고 있다.

4.5 병모양 기둥

Fig. 5와 같은 병모양의 기둥이 압력을 받고 있다. 단면형상, 즉  $(x, z)$  평면에서의 커브는 일정 간격하의 5 점 B-스플라인 함수를 사용하여 만들었

고, 이를  $z$  축을 기준으로 360 도 회전하였다. 두께는 이 곡면에서 대해 수직방향으로 생성하였다. 병의 길이는 20이다. 단면곡선의 양단에서의 높이는 2.4, 1.0이다. 그 사이에 있는 3 점의 높이를 설계변수로 하였고, 이들은 2.4, 1.7, 1.0이다. 또한 여기에 두께 0.2 도 설계변수로 추가하였다. 두께 및 원주방향 요소개수는 2, 25로 하였다. 길이방향 즉  $z$  방향 요소 개수의 증가에 따른 민감도 값의 변화를 Table 5에 나타내었다. 3개의 높이변수에 대한 민감도는 전반적으로 만족할 만한 반면 두께에 관한 값은 상대적으로 좋지 않다. 이 역시 두께방향의 요소수 증가에 의해 정확도 향상을 기할 수 있으나 이는 계산시간이 급격히 증가하므로 바람직하지 않으며 대신 쉘과 같은 구조요소의 사용을 통해 해결될 수 있다. 그러나 그럼 에도 불구하고 이 정도의 부정확도는 민감도 계산에 활용 못할 정도의 큰 문제는 아니라고 생각된다.

5. 결론

본 연구에서는 탄성체의 좌굴하중에 대한 형상 설계민감도 해석을 위한 방법을 제시하였다. 좌굴 문제를 해석하기 위한 두 가지의 가중잔여식 - 초

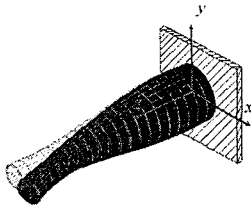


Fig. 5 Buckled shape of a bottle shaped column under compression

Table 4 Sensitivity comparison of critical load in the straight beam with curved section

Design variable	Nx	Ny	Nz	Critical Load	FDM	DSA	Ratio
height at mid-point	5	4	5	6.6859E+08	2.5818E+09	2.6355E+09	102.08
	5	4	10	6.6295E+08	2.5888E+09	2.6474E+09	102.26
	5	4	20	6.6478E+08	2.6011E+09	2.6397E+09	101.48
	5	4	40	6.6623E+08	2.6069E+09	2.6333E+09	101.01
	5	8	10	6.6288E+08	2.5888E+09	2.6664E+09	103.00
	10	8	10	6.6277E+08	2.5884E+09	2.6520E+09	102.45
thickness	10	8	20	6.6467E+08	2.6008E+09	2.6402E+09	101.52
	5	4	5	6.6859E+08	2.7474E+09	3.6628E+09	133.32
	5	4	10	6.6295E+08	2.6650E+09	3.8627E+09	144.94
	5	4	20	6.6478E+08	2.6614E+09	3.2607E+09	122.52
	5	4	40	6.6623E+08	2.6637E+09	2.8215E+09	105.92
	5	8	10	6.6288E+08	2.6636E+09	2.8360E+09	106.47
	10	8	10	6.6277E+08	2.6594E+09	2.8145E+09	105.83
	10	8	20	6.6467E+08	2.6610E+09	2.7351E+09	102.79

Table 5 Sensitivity comparison of critical load in the ring problem

Nz	Critical Load	design variables	FDM	DSA	Ratio
20	3.1029E+09	2.4	2.6957E+08	2.8039E+08	104.01
		1.7	1.3190E+09	1.3103E+09	99.34
		1.0	4.2620E+09	4.5641E+09	107.09
		0.2	2.0432E+09	2.4469E+09	119.76
40	3.0952E+09	2.4	2.6450E+08	2.7040E+08	102.23
		1.7	1.3085E+09	1.3038E+09	99.64
		1.0	4.2402E+09	4.3893E+09	103.52
		0.2	2.0992E+09	2.2318E+09	106.32
60	3.0939E+09	2.4	2.6366E+08	2.6746E+08	101.44
		1.7	1.3068E+09	1.3061E+09	99.94
		1.0	4.2359E+09	4.3298E+09	102.21
		0.2	2.1078E+09	2.2468E+09	106.59

기 정적평형문제 및 좌굴문제 - 를 활용하였고 이들을 전미분하여 민감도 공식을 해석적으로 유도하였다. 민감도를 계산하기 위해서는 세가지의 해를 가지고 있어야 하는데, 이들은 초기평형상태의 해, 좌굴 해 및 보조변수 해이다. 아울러서 각 설계변수 별로 설계속도벡터를 알고 있어야 하는데 이들은 형상변화에 대해서만 유한차분을 적용하여 간편하게 구할 수 있다. 다양한 2 차원 및 3 차원 예제에 대해 민감도를 계산하고 정확도를 검증함으로써 본 방법의 장점과 효용성을 입증하였다. 비록 좌굴문제는 연속요소 보다는 보나 쉘 같

은 구조요소로 모델링되는 문제에서 더 중요한 역할을 하고 있지만 본 연구에서는 연속요소로 표현되는 탄성체를 대상으로 설계민감도 해석법을 제시하였다. 그 이유는 탄성체 모델 즉 솔리드 요소가 구조요소 모델도 포함하여 모델링할 수 있기 때문이며, 따라서 보다 일반적으로 활용이 가능하기 때문이다. 이것은 실용적 면에서도 더 의미가 있다. 해석모델이 CAD 소프트웨어에서 수입되는 경우 대부분 경우 이는 3-D 솔리드이며, 이를 구조요소로 변화하기 위해서는 또다른 노력과 시간이 투입되어야 한다. 본 방법을 사용하게 되면 이러한 노력이 필요없이 직접 솔리드를 대상으로 설계민감도 해석 및 최적화가 가능한 이점이 있다. 물론 이럴 경우 3-D 솔리드 모델을 사용하기 때문에 해석을 위한 계산시간 증가라는 어쩔 수 없는 대가는 지불해야 할 것이다.

참고문헌

- (1) Haftka, R.T. and Gurdal, Z., 1992, *Elements of Structural Optimization*, Kluwer Academic Publishers; 3rd Revised and Expanded Edition, USA.
- (2) Choi, K.K. and Kim, N.H., 2005, *Structural Sensitivity Analysis and Optimization*, Springer Science+Business Media Inc, USA.
- (3) Gu, Y.X., Zhao, G.Z., Zhang, H.W., Kang, Z. and Grandhi, R.V., 2000, "Buckling Design Optimization of Complex Built-up Structures with Shape and Size Variables," *Structural Multidisciplinary Optimization*, Vol. 19, No. 3, pp. 183~191.
- (4) de Boer, H., van Keulen, F., 2000, "Refined Semi-Analytical Design Sensitivities," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37, No. 46/47, pp. 6961~6980.
- (5) Özakça, M., Taysi, N., Kolcu, F., 2003, "Buckling Analysis and Shape Optimization of Elastic Variable Thickness Circular and Annular Plates—II. Shape Optimization," *Engineering Structures*, Vol. 25, No. 2, pp. 193~199.
- (6) Washizu, K., 1974, *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, (*International Series of Monographs in Aeronautics and Astronautics. Division I: Solid and Structural Mechanics*, v. 9), Pergamon Press; 2nd edition, UK.
- (7) Zolesio, J.P., 1981, "The Material Derivative (or Speed) Method for Shape Optimization," in *Optimization of Distributed Parameters Structures*, Haug, E.J. and Cea, J., Sijthoff-Noordhoff, Alphen aan den Rijn, pp. 1152~1194.
- (8) Choi, J.H. and Won, J.H., 2005, "Boundary Method in FEM-Based Shape Design Sensitivity Analysis of Elastostatics Problems," submitted to *Finite Elements in Analysis and Design*.