〈 논문 〉

비례하중변환법의 등가정하중을 이용한 비선형 거동을 하는 구조물의 최적설계

박기종* · 권용덕** · 송기남*** · 박경진†

(2005 년 7 월 29 일 접수, 2005 년 11 월 25 일 심사완료)

Structural Optimization for Non-Linear Behavior Using Equivalent Static Loads by Proportional Transformation of Loads

Ki-Jong Park, Yong-Deok Kwon, Kee-Nam Song and Gyung-Jin Park

Key Words : Equivalent Static Load(등가정하중), Proportional Transformation of Load(비례하중변환법), Nonlinear Response Optimization(비선형 응답 최적설계), Structural Optimization (구조최적설계), Nonlinear Response Optimization Using Equivalent Static Loads (NROESL, 등가정하중을 이용한 비선형 응답 최적설계)

Abstract

Nonlinear response structural optimization using equivalent static loads (NROESL) has been proposed. Nonlinear response optimization is solved by sequential linear response optimization with equivalent static loads which are generated from the nonlinear responses and linear stiffness matrix. The linear stiffness matrix should be obtained in NROESL, and this process can be fairly difficult for some applications. Proportional transformation of loads (PTL) is proposed to overcome the difficulties. Equivalent static loads are obtained by PTL. It is the same as NROESL except for the process of calculating equivalent static loads. PTL is developed for large-scale probems. First, linear and nonlinear responses are evaluated from linear and nonlinear analyses, respectively. At a DOF of the finite element method, the ratio of the two responses is calculated and an equivalent static load is made by multiplying the ratio and the loads for linear analysis. Therefore, the mumber of the equivalent static loads is as many as that of DOF's and an equivalent static load is used with the reponse for the corresponding DOF in the optimization process. All the equivalent static loads are used as multiple loading conditions during linear response optimization. The process iterates until it converges. Examples are solved by using the proposed method and the results are compared with conventional methods.

1. 서 론

최근 유한요소법(finite element method, FEM)의 발전과 더불어 최적설계의 응용분야인 구조최적설계 기술이 확산되어 왔다.[1,2] 구조물의 설계에 있어 구조물의 반응을 정확히 계산하고 이를 설계에 적절히 반영하는 것은 매우 중요하다. 구조물의 설계 시, 반응에 대한 제한조건을 만족하는 동시에 구조물의 비용을 줄이거나 성능을 향상시키기 위한 방법에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다.[3~6] 많은 경우 시간이나 편의성 문제로 인해 구조물의 선형 반응에 대해서만 연구가 활발히 진행되어 왔다. 그러나 대부분의 구조물의 경우 선형 해석으로는 구조물의 거동을 제대로 표현할 수 없으며, 특히 재료 비선형이나 대변형과 같은 기하 비선형 문제에서는 비선형 해석을 통해 구조물의 반응을 구하는 것이 이미 보

* 회원, 현대자동차㈜
** LG전자㈜
*** 회원, 한국원자력연구소
† 책임저자, 회원, 한양대학교 기계공학과
E-mail : gjpark@hanyang.ac.kr
TEL : (031)400-5246 FAX : (031)407-0755

편화 되어 있다. 구조물의 비선형 해석을 구조최적설계에 이용하려는 시도가 많이 있었으며 수학적인 최적설계 정식화 또한 잘 정리되어 있다.[7,8]

비선형 해석을 통한 구조물의 최적설계를 수행하는 것은 선형 문제에 비해 고가이며 목적함수나 제한조건의 민감도를 계산하는데 많은 시간이 소요된다. 민감도를 계산할 때 간단한 절차를 통하여 수행되는 유한차분법(finite difference method, FDM)은 접근 방법은 쉬우나 비선형 해석의 경우 시간이 상당히 오래 걸리는 고가의 방법이다.

한편, 선형 반응 최적화 기법은 비교적 많은 연구에 의해 잘 정리되어 있고 이를 구조최적설계에 쉽게 적용할 수 있는 상용 코드들 또한 흔히 구할 수 있다. 최근 비선형 거동을 하는 구조물에 대해서 비선형 시스템에서의 응답과 같은 응답을 일으키는 선형 시스템에서의 하중을 이용하여 구조물을 최적화하는 방법이 발표되었다.[9~16] 기존의 유한차분법에의한 민감도를 이용한 비선형 응답 구조최적설계 방법의 단점을 극복하고자 제안되었다. 이는 강성행렬을 이용하여 구한 등가정하중을 이용한 비선형 응답 구조최적설계(nonlinear response optimization using equivalent static loads, NROESL) 방법이다.[13~16] 선형 강성행렬과 비선형 변위의 곱을 이용하여 비선형 시스템에서의 반응과 같은 반응을 일으키는 선형 시스템에서의 하중, 즉 등가정하중(equivalent static load)을 구하여 이를 선형 반응 최적화에 이용한다. 등가정하중을 이용한 비선형응답 구조최적설계 방법을 이용한 해의 수렴성과 최적성이 이미 잘 정리되었다. 등가정하중을 이용한 방법은 최적설계 시 비선형 해석 횟수의 감소로 시간이 극적으로 적게 걸리는 장점이 있다. 그러나 구조물의 크기가 매우 커지면 강성행렬 정보는 기하급수적으로 증가하기 때문에 사용하기 쉽지 않다. 또한 강성행렬 정보를 주지 않는 해석기를 이용하는 경우에는이 방법을 사용할 수 없다는 단점을 가지고 있다.

비례하중변환법에 의한 등가정하중을 이용한 비선형 응답 구조최적설계 방법은 기존의 강성행렬에 의한 NROESL 방법의 단점을 극복하여, 자유도가 매우 큰 구조물에도 쉽게 이 방법을 적용하기 위하여 개발되었다. 이 방법은 강성행렬에 의한 등가정하중을 이용한 비선형 응답 구조최적설계 방법에서처럼 등가정하중을 구하여 선형 반응 최적화에 이용한다는 점은 동일하나 등가정하중을 구하는 방법이 다르다. 비례하중변환법(proportional transformation of loads, PTL)이란 등가정하중을 구하기 위하여 제안하는 방법이다. 등가정하중을 구하기 위해서 우선 주어진 하중 하에서 비선형 해석과 선형 해석을 동시에 수행한다. 그리고 최적화 과정에 포함된 각 반응에 대해 비선형 반응을 선형 반응으로 나눈 계수를 구한다. 이 계수를 선형 해석 시에 가해준 하중을 곱하면 특정한 반응에 대한 등가정하중이 산출된다. 관심있는 모든 하중에 대하여 등가정하중을 구하여 다중하중조건(multiple loading conditions)으로 처리하여 선형 반응 최적화를 수행한다. 따라서 이 방법은 등가정하중을 구할 때 강성행렬을 이용하지 않기 때문에 자유도가 대단히 큰 구조물에도 적합하다는 장점을 갖게 된다.

2. 등가정하중을 이용한 비선형 응답 구조최적설계

2.1 비선형 응답 구조 최적설계

일반적으로 구조최적설계에서는 유한요소법을 이용한 구조물의 지배방정식과 설계조건 등을 제한조건으로 사용한다. 최적설계 문제를 구성하는 목적함수나 제한조건이 설계변수에 대하여 비선형인 경우 이를 비선형 최적설계라 한다. 비선형 응답 구조 설계는 설계 대상물 응답이 비선형성을 갖는 것을 말한다. 전형적인 비선형 응답 구조최적설계는 다음과 같은 수식화에 의해 정식화된다.

$$\begin{aligned}
&\text{Find} && \mathbf{b} \in R^n && (1a)\\
&\text{to minimize} && f(\mathbf{b},\mathbf{z}) && (1b)\\
&\text{subject to} && \mathbf{K}(\mathbf{b},\mathbf{z})\mathbf{z}-\mathbf{f}=0 && (1c)\\
& && g_i(\mathbf{b},\mathbf{z}) \le 0;\ i=1,\cdots,m && (1d)\\
& && b_{iL} \le b_i \le b_{iU};\ i=1,\cdots,n && (1e)
\end{aligned}$$

여기서 $\mathbf{b}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{z}$, $\mathbf{f}$ 는 각각 설계변수벡터, 강성행렬, 변위벡터, 외력벡터이다. 식 (1c)가 비선형 상태변수에 대하여 비선형 방정식이므로 식 (1)은 비선형 응답 최적설계 정식화가 된다. 반면에 선형응답 최적설계 문제는 식 (1c)가 선형 방정식이다. 식 (1)과 같은 정식화는 대부분의 구조최적설계 문제가 그렇듯이 유한요소법을 이용하여 구조물의 응답을 계산하고, 민감도정보를 계산하는 데 바탕을 두고 있다. 비선형구조물의 응답과 민감도를 계산하는 것은 선형구조물의 계산보다 비용이 훨씬 많이 든다. 따라서 유한요소를 이용한 비선형 구조물의 최적화는 대부분 고비용이고 큰 구조물에 대한 적용은 대단히 어렵다.

2.2 등가정하중을 이용한 구조최적설계

등가정하중은 이러한 비선형 해석을 이용한 최적화의 난점을 등가의 선형해석을 통하여 같은 반응을 얻어 최적화를 수행 할 수 있게 한다.

등가정하중: 등가정하중을 이용한 비선형 응답 구조최적설계에서 등가정하중은 비선형 시스템에서의 응답과 같은 응답을 발생시키는 정적 선형 시스템에서의 하중을 의미한다.

등가정하중은 선형 반응 최적화를 할 구조물의 외력으로 적용되고 여기서 얻은 반응은 목적함수나 제한조건 등에 사용된다. 등가정하중을 구하기 위하여 비선형 해석 후의 변위장과 동일한 선형해석에서의 변위장을 발생시키는 하중, 즉 변위 등가정하중은 다음과 같이 얻어진다.

$$\mathbf{f}_{eq}^{\mathbf{z}} = \mathbf{K}_L \mathbf{z}_N \tag{2}$$

여기서, $\mathbf{f}_{eq}^{\mathbf{z}}$ 는 변위 등가정하중을, $\mathbf{K}_L$ 은 선형 시스템의 강성행렬을, $\mathbf{z}_N$ 은 비선형 해석으로로부터 얻은 절점 변위벡터를 말한다. 식 (2)의 등가정하중을 구하기 위하여 해석으로부터 선형강성행렬과 응답을 구해야만 한다. 등가정하중은 변위, 응력 등의 관심있는 응답에 대하여 변위 등가정하중($\mathbf{f}_{eq}^{\mathbf{z}}$), 응력 등가정하중($\mathbf{f}_{eq}^{\sigma}$) 등으로 각각 구해질 수 있다. 등가정하중을 이용한 비선형 응답 최적설계는 반복적으로 Fig. 1에서 처럼 선형 응답 최적설계기법을 사용한다. 따라서 최적설계의 매 반복회(iteration)에서 설계 민감도를 구하기 위하여 비선형 연립 방정식을 풀지 않아도 된다. 이것은 상태변수 즉 유한요소법의 해가 선형 대수 방정식으로 구성된다는 것을 말한다. 현재의 설계 점에서 제한 조건이 있는 각 반응에 대해 비선형 해석 시의 응답과 같은 응답을 만드는 선형 해석 시의 등가정하중을 구한다. 구한 등가정하중들을 이용하여 선형 반응 최적화 문제를 구성하면 다음 식과 같다.

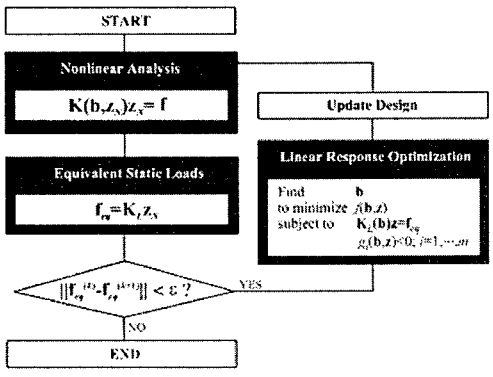

Fig. 1 Optimization process using the equivalent static loads

$$\begin{aligned} &\text{Find} && \mathbf{b} && (3a)\\ &\text{to minimize} && f(\mathbf{b},\mathbf{z}) && (3b)\\ &\text{subject to} && \mathbf{K}_L(\mathbf{b})\mathbf{z} - \mathbf{f}_{eq} = 0 && (3c)\\ & && g_j(\mathbf{b},\mathbf{z}) \le 0,\ j = 1,2,\cdots,m && (3d) \end{aligned}$$

여기서 식 (3c)는 선형유한요소 방정식이다.

이 방법은 기존의 최적화방법에서 필요한 방향탐색과 선탐색을 위하여 비선형 해석을 하지 않는다. 그대신 등가의 선형해석을 통해 최적화를 이룬다. 그러나 선형반응 최적화의 방향과 선탐색의 결과는 원래 문제의 최적해를 직접 주지는 못한다. 선형응답최적화의 결과를 이용하여 다시 비선형해석을 하고 전체과정을 반복함으로써 비선형 응답 최적화를 이루는 방법이다. 이를 검증하기위하여 제안한 알고리듬의 수렴성에 대하여 고찰하고 이 때 제안한 알고리듬을 통해 얻은 해가 Karush-Kuhn-Tucker(KKT) 조건을 만족함을 보임으로써 제안한 NROESL 알고리듬의 해의 최적성에 대하여 이미 고찰된 바 있다.[13,14]

3. 비례하중변환법에 의한 등가정하중을 이용한 비선형 응답 구조최적설계

3.1 비례하중 변환법

앞서 설명한 바와 같이 강성행렬에 의한 등가정하중을 이용하는 방법은 식 (1c)와 같은 비선형 해석을 통해 구조물의 변위와 선형 강성행렬을 구해 식 (2)와 같이 등가정하중을 계산한다. 그러나 비례하중변환법(proportional transformation of loads, PTL)을 이용하는 방법은 각 반응에 대해서 비선형 해석 시의 반응에 선형해석 시의 반응을 나눈 계수를 이용하여 등가정하중을 구한다.

PTL을 이용하여 등가정하중을 구하는 방법은 다음의 절차와 같다.

단계 1: 비선형 해석을 수행한 후 비선형 응답을 구한다.

단계 2: 비선형 해석 시와 동일한 경계조건과 하중조건 하에서 선형 해석을 수행한후 선형 응답을 구한다.

단계 3: 비선형 응답을 선형 응답으로 나눈 계수에 원래의 하중을 곱하여 등가정하중을 구한다. PTL에 의한 등가정하중은 각 DOF에 대해서 구해지고 DOF의 수만큼 하중 벡터가 생긴다.

PTL을 이용하여 등가정하중을 구하는 방법은

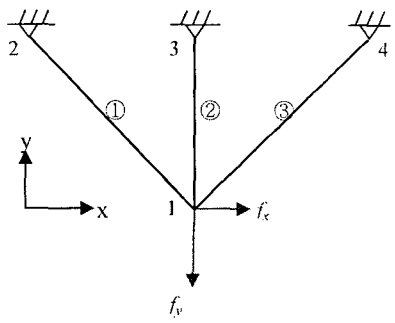

Fig. 2 Three bar truss

선형 시스템에서는 가해준 하중과 이로 인해 발생하는 반응의 관계가 선형이라는 특징을 이용한 것이다. 즉, 하중 P를 가했을 때 L의 처짐이 생긴다면 하중 2P를 가하면 2L의 처짐이 생김을 의미한다.

먼저 변위에 대한 등가정하중을 구하는 방법으로, Fig. 2와 같은 트러스 구조물이 있을 때, 비선형 해석 시의 변위와 선형 해석 시의 변위를 다음과 같이 가정한다.

$$\mathbf{z}_N = [\, z_{N1x} \quad z_{N1y} \,]^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

$$\mathbf{z}_L = [\, z_{L1x} \quad z_{L1y} \,]^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

여기서 z_{N1x}와 z_{N1y}는 각각 1번 절점의 x와 y 방향 비선형 변위를 나타낸다. 이때 PTL에 의한 등가정하중의 정의에 의하여 비선형 해석 시의 변위 z_{N1x}를 맞추기 위한 선형 해석 시의 등가정하중은 다음의 식 (6)과 같고, 비선형 해석 시의 변위 z_{N1y}를 맞추기 위한 선형 해석 시의 등가정하중은 식 (7)와 같다.

$$\mathbf{f}_{eq}^{z1} = \{f_{eq,x}^{z1} \; f_{eq,y}^{z1}\}^{\mathrm{T}} = \{\frac{z_{N1x}}{z_{L1x}} f_x \quad \frac{z_{N1x}}{z_{L1x}} f_y\}^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

$$\mathbf{f}_{eq}^{z2} = \{f_{eq,x}^{z2} \; f_{eq,y}^{z2}\}^{\mathrm{T}} = \{\frac{z_{N1y}}{z_{L1y}} f_x \quad \frac{z_{N1y}}{z_{L1y}} f_y\}^{\mathrm{T}} \tag{7}$$

여기서 $f_{eq,x}^{z1}$는 첫번째 자유도에서 변위의 선형과 비선형 결과를 맞추기 위한 x 방향 등가정하중을 의미한다. 이렇게 구한 등가정하중을 다중하중조건 처리하면 유한요소 방정식은 식 (8)에서 식 (9)로 바뀌게 된다.

$$\mathbf{K}_N \mathbf{z}_N = \mathbf{f} \tag{8}$$

$$\mathbf{K}_L \begin{Bmatrix} z_{1x} & \bar{z}_{1x} \\ \bar{z}_{1y} & z_{1y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{eq,x}^{z1} & f_{eq,x}^{z2} \\ f_{eq,y}^{z1} & f_{eq,y}^{z2} \end{Bmatrix} \tag{9}$$

여기서, $\mathbf{K}_L$는 경계조건이 적용된 선형강성행렬이고 z_{1x}는 1번 절점의 x 방향의 등가변위이다. 식 (9)는 Fig. 1에 도시된 선형응답 최적설계에 적용되며 z_{1x}와 z_{1y}는 제한조건으로 사용된다. 식 (8)의 비선형 해석의 변위 z_{N1x}를 맞추기 위한 선형 해석에서의 하중인 등가정하중은 식 (9)의 $\{f_{eq,x}^{z1} \; f_{eq,y}^{z1}\}^{\mathrm{T}}$가 되고, 비선형 해석 시의 변위 z_{N1y}을 맞추기 위한 등가정하중은 식 (9)의 $\{f_{eq,x}^{z2} \; f_{eq,y}^{z2}\}^{\mathrm{T}}$가 된다. Fig 2의 구조물은 자유도가 2이므로 2개의 등가정하중 벡터가 얻어지게 되는 것이다. 식 (9)에서 $\bar{z}_{1y}$와 $\bar{z}_{1x}$는 z_{1x}와 z_{1y}을 얻기위하여 적용된 각각의 하중벡터로부터 얻어지는 부수적인 값이다. 즉, 등가정하중 $\{f_{eq,x}^{z1} \; f_{eq,y}^{z1}\}^{\mathrm{T}}$는 비선형 응답 z_{N1x}의 등가변위를 구하기 위하여 산출되었기 때문에 $\{f_{eq,x}^{z1} \; f_{eq,y}^{z1}\}^{\mathrm{T}}$를 적용한 선형 구조물에서의 응답중 z_{1x}만 유효한 응답이 되고 최적화 과정에서 선택된다. 대부분의 상용 구조최적설계 코드에서 다중하중조건하에서의 제한조건 설정방법으로 쉽게 처리가 가능하다.

응력에 대한 등가정하중을 구하는 방법으로, Fig. 2와 같은 구조물의 비선형 해석 시 구한 응력을 식 (10)이라 하고 선형 해석 시의 응력을 식 (11)이라 가정한다.

$$\boldsymbol{\sigma}_N = \{\sigma_{N1} \quad \sigma_{N2} \quad \sigma_{N3}\}^{\mathrm{T}} \tag{10}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_L = \{\sigma_{L1} \quad \sigma_{L2} \quad \sigma_{L3}\}^{\mathrm{T}} \tag{11}$$

비선형 해석 시의 응력 σ_{N1}, σ_{N2}, σ_{N3}와 동일한 크기의 선형해석에서의 응력을 만들기 위하여 각각의 응력에 대한 등가정하중은 다음과 같다.

$$\mathbf{f}_{eq}^{\sigma 1} = \{f_{eq,x}^{\sigma 1} \; f_{eq,y}^{\sigma 1}\}^{\mathrm{T}} = \{\frac{\sigma_{N1}}{\sigma_{L1}} f_x \quad \frac{\sigma_{N1}}{\sigma_{L1}} f_y\}^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

$$\mathbf{f}_{eq}^{\sigma 2} = \{f_{eq,x}^{\sigma 2} \; f_{eq,y}^{\sigma 2}\}^{\mathrm{T}} = \{\frac{\sigma_{N2}}{\sigma_{L2}} f_x \quad \frac{\sigma_{N2}}{\sigma_{L2}} f_y\}^{\mathrm{T}} \tag{13}$$

$$\mathbf{f}_{eq}^{\sigma 3} = \{f_{eq,x}^{\sigma 3} \; f_{eq,y}^{\sigma 3}\}^{\mathrm{T}} = \{\frac{\sigma_{N3}}{\sigma_{L3}} f_x \quad \frac{\sigma_{N3}}{\sigma_{L3}} f_y\}^{\mathrm{T}} \tag{14}$$

여기서 $f_{eq,x}^{\sigma 1}$는 첫번째 요소의 응력을 위한 x 방향 등가정하중이다. 즉, 각각의 응력에 대하여 등가정하중은 $\{f_{eq,x}^{\sigma 1} \; f_{eq,y}^{\sigma 1}\}^{\mathrm{T}}$, $\{f_{eq,x}^{\sigma 2} \; f_{eq,y}^{\sigma 2}\}^{\mathrm{T}}$, $\{f_{eq,x}^{\sigma 3} \; f_{eq,y}^{\sigma 3}\}^{\mathrm{T}}$로 만들어지게 된다.

앞절의 변위를 위한 등가정하중 경우들과 응력을 위한 등가정하중 경우들은 다음절의 구조 최적설계에서 다중하중조건으로 처리하고 그때 얻어지는 각각의 변위와 응력은 제한조건으로 사용된다. 또한 변위와 응력의 등가정하중을 구하는 방법에

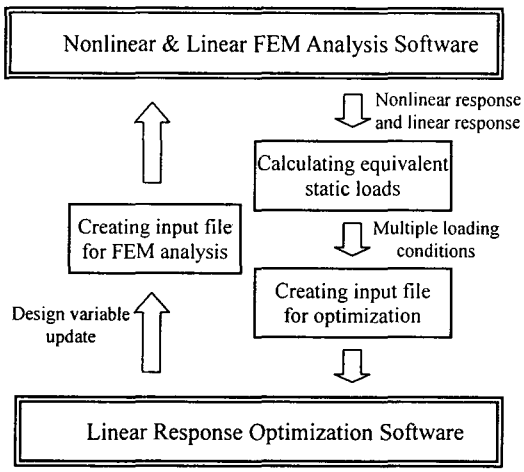

Fig. 3 Optimization process using commercial software

대해 설명하였고 응력을 위한 등가정하중은 변위를 위한 등가정하중의 또 다른 경우로 생각할 수 있으므로 설명의 편의를 위하여 구조최적설계 정식화에서는 변위제한조건만으로 설명한다.

3.2 PTL의 등가정하중을 이용한 구조최적설계

현재의 설계 점에서 제한 조건이 있는 각 반응에 대해 비선형 해석 시의 응답과 같은 응답을 만드는 선형 해석 시의 등가정하중을 구한다. 구한 등가정하중들을 다중하중조건 처리하여 선형 반응 최적화 문제를 구성하면 다음 식과 같다.

$$\text{Find} \quad \mathbf{b} \tag{15a}$$

$$\text{to minimize} \quad f(\mathbf{b},\mathbf{z}) \tag{15b}$$

$$\text{subject to} \quad \mathbf{K}_L(\mathbf{b})\mathbf{z} - \mathbf{f}_{eq}^{p} = 0, p = 1,\cdots q \tag{15c}$$

$$g_j(\mathbf{b},\mathbf{z}) \le 0, \quad j = 1,2,\cdots,m \tag{15d}$$

여기서 $\mathbf{b}$는 설계변수를 의미하고, m은 부등제한조건(inequality conditions)의 개수가 되고, q는 하중조건(loading conditions)의 개수가 된다. 등가정하중의 개수는 목적함수나 제한조건의 최적설계 문제를 구성하는데 필요한 응답의 개수와 같다. 따라서 응력제한조건과 같이 국부척도를 이용하는 경우에는 많은 등가정하중이 필요하고 선형응답 최적설계에서 모두 하중조건으로 사용된다. 다중하중조건에 의해 많아지는 제한조건은 선형반응 최적설계에서 활성화 제한조건 전략(active constraint set strategy)을 통하여 획기적으로 줄일 수 있다.

PTL에 의한 등가정하중을 이용한 비선형 응답 구조최적설계 방법을 적용하여 구조물을 최적화하기 위해 상용 FEM 해석 소프트웨어와 최적화

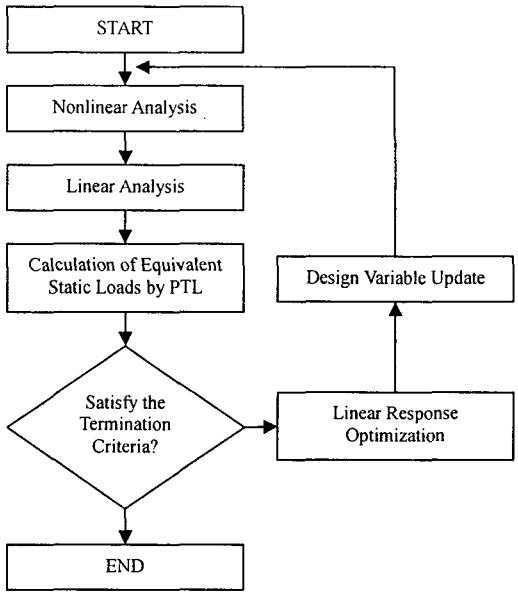

Fig. 4 Optimization process using equivalent static loads by PTL

소프트웨어를 사용하는 절차는 Fig. 3과 같다. 이를 설명하면, 우선 FEM 해석 소프트웨어를 사용하여 주어진 하중과 경계조건 하에서 비선형 해석과 선형 해석을 각각 수행한다. 그리고 FEM 해석으로부터 구한 비선형 반응과 선형 반응을 이용하여 등가정하중을 구한다. 여기서 반응은 최적화 과정에서 제한조건으로 들어가는 반응을 의미한다.

구한 등가정하중은 최적화 소프트웨어의 입력파일에서 다중하중조건 처리하여 최적화를 수행한다 최적화를 수행 한 후 변화된 설계변수를 이용하여 FEM 해석 소프트웨어에 사용 될 새로운 비선형 해석 입력파일과 선형 해석 입력파일을 작성한다. 그리고 새로 작성한 FEM 해석 입력파일을 이용하여 비선형 해석과 선형 해석을 다시 수행한다. 이러한 과정을 해가 수렴할 때까지 반복한다.

3.3 알고리듬

PTL에 의한 등가정하중을 이용한 비선형 응답 구조최적설계 방법의 알고리듬 절차는 Fig. 4와 같고 이를 설명하면 다음과 같다.

단계 1 : 초기값을 설정한다. (사이클 $k = 0$, 설계변수 $\mathbf{b}^{(k)} = \mathbf{b}^{(0)}$로 설정, 수렴조건 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 설정)

단계 2 : 설계변수 $\mathbf{b}^{(k)}$에 대하여 비선형 유한요소 해석을 수행한다. 여기서 비선형

응답을 얻을 수 있다

단계 3 : 설계변수 $\mathbf{b}^{(k)}$에 대하여 선형 유한요소 요소 해석을 수행한다. 여기서 선형 응답을 얻을 수 있다

단계 4 : 단계 2와 단계 3에서 구한 비선형 응답과 선형 응답으로부터 등가정하중을 계산한다.

$$\mathbf{f}_{eq}^{p(k)} = \frac{z_N^p(\mathbf{b}^{(k)})}{z_L^p(\mathbf{b}^{(k)})}\mathbf{f}, \quad p = 1,\cdots,q \tag{16a}$$

$$\mathbf{f}_{eq}^{(k)} = [\mathbf{f}_{eq}^{1(k)}\ \mathbf{f}_{eq}^{2(k)}\cdots\mathbf{f}_{eq}^{q(k)}] \tag{16b}$$

여기서 $\mathbf{f}_{eq}^{p(k)}$는 p번째 응답을 위한 등가정하중 벡터이고 q는 제한조건으로 사용하게 될 응답의 개수이다. $\mathbf{f}$는 식 (1c)의 원래 문제의 하중이다. 식 (16b)는 다중하중조건으로 만들어진 등가정하중이다.

단계 5 : $k=0$이면 단계 6으로 간다.

$k>0$일 때,

$$\left\|\mathbf{b}^{(k)} - \mathbf{b}^{(k-1)}\right\| \le \varepsilon_1 \tag{17a}$$

$$\text{or} \quad \left\|\mathbf{f}_{eq}^{(k)} - \mathbf{f}_{eq}^{(k-1)}\right\| \le \varepsilon_2 \tag{17b}$$

이면 알고리듬을 멈추고 그렇지 않으면 다음 단계로 간다.

단계 6 : 단계 4에서 구한 등가정하중을 다중하중조건 처리하여 다음의 선형 응답최적화를 수행한다.

$$\text{Find} \quad \mathbf{b}^{(k+1)} \tag{18a}$$

$$\text{to minimize} \quad f(\mathbf{b}^{(k+1)}) \tag{18b}$$

$$\text{subject to} \quad \mathbf{K}_L(\mathbf{b}^{(k+1)})\mathbf{z} - \mathbf{f}_{eq}^{(k)} = 0 \tag{18c}$$

$$g_j(\mathbf{b}^{(k+1)}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\sigma}) \le 0,\ j = 1,\cdots,m \tag{18d}$$

식 (18c)는 식 (16)에서와 같이 변위나 응력 등의 각각의 응답에 대해서 구해진 등가정하중을 다중하중조건처리하여 선형 유한요소 방정식을 구성하게 된다.

단계 7 : 설계결과를 갱신하고 단계 2로 간다. ($k = k+1$)

k번째 사이클의 단계 5 이전에 선형응답 $\mathbf{z}_L$과 비선형 응답 $\mathbf{z}_N$은 동일하다. 그러나 단계 5 이후에 두 응답은 달라진다. 이러한 차이는 사이클이 반복됨에 따라 해소된다. 사이클은 주어진 설계변수에 대해 비선형 해석을 수행하고 관심있는 응답에 대해 등가정하중을 계산해 선형응답 최적설계를 수행하는 순서로 진행된다. 전체 프로세스는 실제 비선형 응답을 구하는 해석영역과 등가정하중하에서 선형응답 최적설계가 이루어지는 설계영역사이의 사상과정이다.

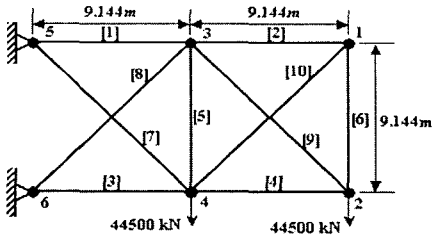

Fig. 5 Ten bar plane truss

4. 비례하중변환법에 의한 등가정하중을 이용한 구조물 최적설계

비례하중변환법(proportional transformation of loads PTL)에 의한 등가정하중을 이용한 구조물 최적설계의 예를 보이고자 한다. 구조설계 문제에서는 각각의 예제에 대해 재료 비선형뿐만 아니라 기하 비선형을 동시에 고려하였다. 10부재 평면 트러스의 치수최적설계 문제는 제안한 방법의 해의 유효성을 검증하기 위하여 사용되었다. PTL에 의한 등가정하중을 이용한 비선형 응답 구조최적설계와 일반적인 비선형 응답 구조최적설계 그리고 기존의 강성행렬을 이용한 비선형 응답 구조최적설계의 설계변수, 목적함수, 반복 횟수, 비선형 해석 횟수 등에 대하여 비교하였다. PTL에 의한 등가정하중을 이용한 비선형 응답 구조최적설계 방법을 실제 대형 구조물에 적용을 위해 핵연료봉 집합체의 지지격자체의 치수최적설계에 적용하였다.

유한차분법을 이용한 일반적인 비선형 응답 구조최적설계 방법과 강성행렬에 의한 등가정하중을 이용한 비선형 응답 구조최적설계 방법에서는 비선형 FEM 해석을 위해서 ABAQUS 6.3[17]을 사용하였고 선형응답 최적설계를 위해서 DOT 5.3[18]과 ABAQUS 6.3을 사용하였다. 그리고 PTL에 의한 등가정하중을 이용한 비선형 응답 구조최적설계 방법에서는 비선형 FEM 해석을 위해서는 ABAQUS 6.3을 사용하였고 최적화를 위해서는 GENESIS 7.2[19]를 사용하였다.

4.1 10 부재 평면 트러스의 치수최적설계

Fig. 5와 같은 10부재 평면 트러스 구조물이 있다. 절점 2와 4에서 44.5×10^6 N 의 하중이 가해지

Table 1 Optimum results for the ten bar plane truss

(1)	Conventional method	NROESL	PTL
A1	995.15	935.45	954.09
A2	0.645	0.645	0.645
A3	736.54	746.47	892.71
A4	353.49	492.29	478.24
A5	0.645	0.645	0.645
A6	0.645	0.645	0.645
A7	637.97	642.87	629.08
A8	673.53	768.78	675.82
A9	729.58	637.73	675.80
A10	0.645	0.648	0.645
(2)	12.59	12.85	12.98
(3)	14	11	8
(4)	301	11	8
(5)	160	-	-
(6)	-	42	32

(1) Design variables (Cross sectional area ($\times 10^{-4}$ m^2))
(2) Objective function (mass(kg))
(3) Number of iterations
(4) Number of nonlinear analyses
(5) Number of nonlinear analyses except for gradient calls
(6) Total number of iterations for linear response optimization

고 있으며 재료의 탄성계수는 68.9GPa 이다. 기하비선형과 재료비선형이 동시에 고려되었다. 재료 비선형은 선형경화(linear hardening) 곡선을 따르는 쌍일차(bilinear) 물성을 갖는 재료라 가정한다. 항복점 이후의 경화부분의 계수는 $E_h = 34.5\text{GPa}$ 이며 항복강도는 $\sigma_y = 172.0\text{MPa}$ 이다.

설계변수는 각 부재의 단면적이고 전체 구조물의 질량을 최소화하도록 설계한다. 또한 제한조건으로 모든 부재에 대하여 1030.0MPa 의 허용응력을, 또 변위를 갖는 모든 절점에서의 모든 자유도에 대해 2.54m 의 허용 변위를 주었다. 설계변수의 초기 값은 2, 5, 6, 10번 부재는 64.5×10^{-4} m^2, 나머지 부재는 323.0×10^{-4} m^2 이며 모든 부재의 하한치와 상한치는 각각 6.45×10^{-6} m^2 와 6.45×10^{2} m^2 이다. 비선형 응답 최적설계 정식화는 식 (4.1)과 같다.

$$\text{Find} \quad \text{cross section areas}\,(b_k) \tag{19a}$$
$$\text{to minimize} \quad \text{mass} \tag{19b}$$
$$\text{subject to} \quad \mathbf{K}(\mathbf{b},\mathbf{z})\mathbf{z}-\mathbf{f}=0 \tag{19c}$$
$$\mathbf{z}_i - 2.54 \le 0, \quad i=1,\cdots,12 \tag{19d}$$
$$-\mathbf{z}_i - 2.54 \le 0, \quad i=1,\cdots,12 \tag{19e}$$
$$\sigma_j - 1030.0 \le 0, \quad j=1,\cdots,10 \tag{19f}$$

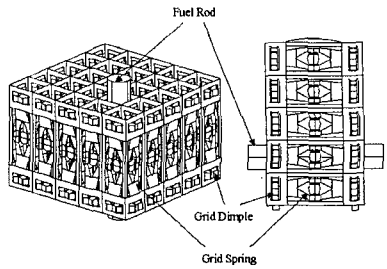

Fig. 6 Schematic view of a spacer grid set

$$-\sigma_j - 1030.0 \le 0, \quad j=1,\cdots,10 \tag{19g}$$
$$0.0000645 \le b_k \le 645.0 \tag{19h}$$

여기서 b_k 는 k 번째 설계변수로 총 10개이며 각 부재의 단면을 나타낸다. $\mathbf{z}_i$ 는 비선형 해석을 통해 얻은 i 번째 절점 자유도에서의 변위이며 σ_j 는 j 번째 부재에서의 응력을 나타낸다.

PTL에 의한 등가정하중을 이용한 비선형 응답 구조최적설계 결과와 일반적인 비선형 응답 구조최적설계 결과 및 강성행렬에 의한 등가정하중을 이용한 비선형 응답 구조최적설계 결과를 Table 1 에 나타내었다. 설계변수 및 목적함수는 비슷한 결과를 얻을 수 있었다. 비선형 해석 횟수를 살펴보면 강성행렬에 의한 등가정하중을 이용한 비선형 응답 구조최적설계에서는 11번, PTL에 의한 등가정하중을 이용한 비선형 응답 구조최적설계에서는 8번으로 나타났지만 일반적인 비선형 응답 구조최적설계에서는 301번으로 나머지 두 방법에 비해 많은 비선형 횟수를 보였다. 등가정하중을 이용하는 방법에서는 부가적으로 선형해석을 이용한 선형 응답 최적화가 이루어진다. PTL에 의한 등가정하중을 이용한 비선형 응답 구조최적설계에서는 32회의 반복회 동안 선형응답 최적설계가 수행되었고, 강성행렬을 이용한 비선형 응답 구조최적설계에서는 42회 수행되었다.

구조최적설계에 있어서 해의 질적인 차이를 어느 정도 감안하더라도 가능하면 비선형 해석을 수행하는 횟수를 줄이는 것은 매우 중요하다. 왜냐하면 목적함수나 제한조건의 민감도를 계산하고 최적화를 수행하기 위하여 비선형 해석을 하는 데 설계시간의 대부분이 소요되기 때문이다. PTL에 의한 등가정하중을 이용한 비선형 응답 구조최적설계에서의 비선형 해석 횟수는 일반적인 비선형 응답 구조최적설계에서의 비선형 해석 횟수보다 월등히 적게 나왔다. 따라서 PTL에 의한 등가정하중을 이용한 비선형 응답 구조최적설계는 일반

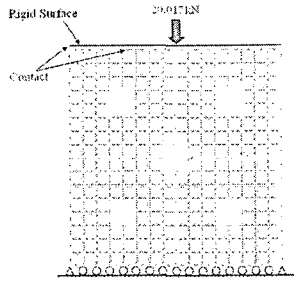

Fig. 7 Spacer grid modeling

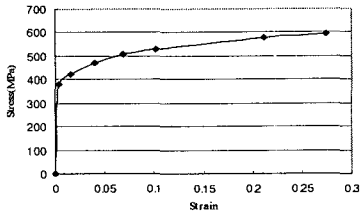

Fig. 8 Material property of Zircaloy-4

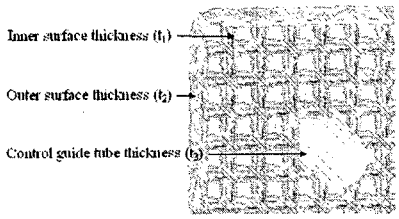

Fig. 9 Design variables of the spacer grid

적인 비선형 응답 구조최적설계보다 설계시간이 적게 걸리기 때문에 비용 면에서 매우 유리하다.

4.2 원자로 핵연료봉 지지격자체의 최적설계

Fig. 6에서와 같이 원자로 핵연료 집합체에서 지지격자는 마찰악력(friction grip)으로 연료봉을 횡방향 및 축방향으로 지지한다. 지지격자는 핵연료봉 수명기간 동안 연료봉이 정위치에 건전하게 위치하도록 지지하는 기계/구조적 기능을 가져야 한다. 여기서는 지지격자의 건전성 평가 기준으로 모 핵연료 제조사의 평가기준을 따랐다. 평균 유로틈 폐쇄(channel gap closure)가 0.305mm만큼 줄었을 때의 충격강도를 지지격자의 강도로 결정하고 있다. 유로틈 폐쇄 기준은 유로틈의 도면 공차한계만큼 허용한다. 지지격자 해석을 위해서 Fig. 7과 같이 모델링하고 하중 및 경계조건을 주었다. 지지격자의 아랫부분의 자유도를 구속시키고 지지격자의 윗부분에 분포하중이 가해지는 효과를 주기 위해서 강체판에 집중하중을 가해서 강체판과 지지격자의 윗부분이 접촉을 하도록 해석을 수행하였다. 지지격자의 재료로는 Zircaloy-4를 사용하였으며 물성치는 Fig. 8과 같이 단축 인장시험 결과를 사용하였다. 지지격자의 설계 변수로는 지지격자 내판의 두께, 지지격자 외판의 두께 그리고 제어봉 안내관의 두께로 선정하였다. 설계변수에 대한 그림은 Fig. 9와 같다.

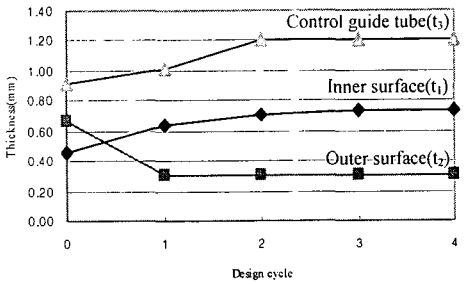

Fig. 10 History of design variables for the spacer grid

Table 2 Optimum results of the spacer grid

Design cycle	t_1	t_2	t_3	Obj[a)]	MCV[b)]
0	0.457	0.664	0.920	0.727	38.5
1	0.636	0.300	1.010	0.849	16.8
2	0.710	0.300	1.200	0.948	3.4
3	0.737	0.300	1.200	0.976	0.0
4	**0.737**	**0.300**	**1.200**	**0.976**	**0.0**

a) Normalized objective function
b) Maximum constraint violation (%)

최적설계를 위한 설계 정식화는 식 (20)과 같다.

$$\begin{aligned} &\text{Find} && \text{plate thickness } (t_1, t_2, t_3) && (20a)\\ &\text{to minimize} && \text{mass} && (20b)\\ &\text{subject to} && \mathbf{K}(\mathbf{b},\mathbf{z})\mathbf{z}-\mathbf{f}=0 && (20c)\\ & && c_i - 0.3048 \le 0, \quad i=1,\cdots,16\times16 && (20d)\\ & && 0.3 \le t_1, t_2 \le 1.0, \quad 0.3 \le t_3 \le 1.2 && (20e) \end{aligned}$$

여기서 t_1는 지지격자 내판 두께, t_2는 지지격자 외판 두께, t_3는 제어봉 안내관 두께를 의미한다. c_i는 i 번째 셀(cell)에서의 유로틈 폐쇄량을 나타낸다.

최적화 결과를 Fig. 10과 Table 2에 나타내었다. 총 4회의 비선형해석이 이루어졌다. 최적화 결과

를 살펴보면 내판의 두께와 안내관의 두께는 증가하는 경향을 보였고 외판의 두께는 감소하는 경향을 보였다. 목적함수는 약 30%증가하였으며 초기에 위배했던 제한조건은 활성화되어 수렴하였다.

5. 결 론

유한차분법을 이용한 일반적인 비선형 응답 구조최적설계 방법은 목적 함수나 제한조건의 민감도를 계산하기 위한 비선형 해석의 횟수가 증가로 설계시간이 오래 걸린다는 단점이 있다. 이러한 문제점을 극복하고자 제안된 것이 등가정하중을 이용한 비선형 응답 구조최적설계 방법(NROESL)이다. 이는 강성행렬을 구하여 등가정하중을 얻어 선형반응 구조최적설계를 반복 수행하여 원래의 비선형응답 구조최적화를 이루는 방법이다. NROESL 방법을 이용하면 비선형 해석 회수를 상당히 줄일 수 있는 장점이 있었다. 그러나 강성행렬을 이용하여 등가정하중을 얻는 방법은 대단히 큰 구조물에 대해서는 강성행렬 다루기가 쉽지 않은 단점이 여전히 존재한다. 비례하중변환(PTL)법은 강성행렬을 이용하지 않고 선형응답의 특성을 이용하여 등가정하중을 얻는 방법이다.

구조물 적용 예로 10부재 트러스의 최적설계 문제에 대해 기존의 방법들에 의한 최적설계 결과와 PTL에 의한 등가정하중을 이용한 비선형 응답 구조최적설계 방법의 결과를 비교하여 보았다. 결과를 보면 강성행렬에 의한 등가정하중을 이용한 방법은 11회, 마찬가지로 PTL에 의한 등가정하중을 이용한 방법은 8회로 일반적인 방법의 301회에 비해서 비선형 해석 횟수가 월등히 적음을 확인할 수 있었다. 그리고 원자로 핵연료봉 지지격자와 같이 자유도가 큰 실제 구조물에 대해서 제안한 방법을 적용하였다. 총 4번의 비선형 해석만으로 제한조건을 만족하는 최적해를 도출하였다. 따라서, 대단히 많은 자유도를 갖는 대형 구조물에 대해서도 등가정하중을 이용한 비선형응답 최적설계가 적용 가능함을 확인할 수 있었다.

원래 지지격자의 최적설계 문제는 동하중이 가해지는 문제이지만 동적비선형 최적설계의 어려움으로 인하여 정적비선형 최적설계를 수행하였다. 본 연구에서는 정적 비선형 거동을 하는 구조물에 대해서만 PTL에 의한 등가정하중을 이용한 최적설계 방법을 적용하였다. 동적하중이 작용하고 비선형 거동을 하는 구조물에 대해서도 적용이 필요 할 것이다.

후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 최적설계 신기술 연구센터의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

(1) Belytschko, T., Liu, W.K and Moran, B., 2000, Nonlinear Finite Element for Continua and Structures, John Wiley & Sons, England

(2) Bathe, K.J., 1996, Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA.

(3) Haug, E.J. and Arora, J.S., 1979, Applied Optimal Design, John Wiley & Sons, Inc., New York, USA.

(4) Vanderplaats, G.N., 1984, Numerical Optimization Techniques for Engineering Design, Mcgraw-Hill Book Company, New-York, USA.

(5) Haftka, R.T. and Gurdal, Z., 1992, Elements of Structural Optimization, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

(6) Belegundu, A.D. and Chandrupatla, T.R., 1999, Optimization Concepts and Applications in Engineering, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, USA.

(7) Wu, C.C. and Arora, J.S., 1987, "Simultaneous Analysis and Design Optimization of Nonlinear Response," *Engineering with Computers*, Vol. 2, No. 1, pp. 53~63.

(8) Haftka, R.T., 1993, "Semi-analytical Static Nonlinear Structural Sensitivity Analysis," **AIAA J.**, Vol. 31, No. 7, pp. 1307~1312.

(9) Choi, W.S. and Park, G.J., 2002, "Structural Optimization Using Equivalent Static Loads at All the Time Intervals," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 191, pp. 2105~2122,

(10) Kang, B.S., Choi, W.S. and Park, GJ., 2001, "Structural Optimization under Equivalent Static Loads Transformed from Dynamic Loads Based on Displacement," *Computer & Structures*, Vol. 79, No. 2, pp. 145~154.

(11) Park, K.J., Lee, J.N. and Park, G.J., 2005, "Structural Shape Optimization Using Equivalent Static Loads Transformed from Dynamic Loads," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 63, No. 5, pp. 589~902.

(12) Park, K.J. and Park, G.J., 2003, "Structural Optimization of Truss with Non-Linear Response Using Equivalent Linear Loads," *Transactions of KSME A*, Vol. 28, No. 4, pp. 467~474. (in Korean)

(13) Park, K.J., 2004, Nonlinear Response Structural Optimization Using Equivalent Static Loads, Ph. D. Thesis, Hanyang University, Korea. (in Korean)

(14) Park, K.J. and Park, G.J., 2005, "Structural Optimization for Non-Linear Behavior Using Equivalent Static Loads: Part I. Algorithm," *Transactions of KSME A,* Vol. 29, No. 8. (in Korean)

(15) Park, K.J. and Park, G.J., 2005, "Structural Optimization for Non-Linear Behavior Using Equivalent Static Loads: Part II. Structural Examples," *Transactions of KSME A*, Vol.

29, No. 8. (in Korean)
(16) Park, K.J. and Park, G.J., 2004, "Structural Optimization of Truss with Non-Linear Response Using Equivalent Linear Loads," *Transactions of KSME A*, Vol. 28, No. 4. (in Korean)
(17) ABAQUS/Standard Version 6.3 User's Manual, Hibbitt, Karlsson, and Sorensen, Inc., Pawtucket, RI, USA.
(18) DOT Users Manual Version 5.3, 2003, Vanderplaats Research & Development, Inc., CO, USA.
(19) GENESIS User Manual Version 7.2, 2003, Vanderplaats Research & Development, CO, USA.