

< 논문 >

고차 혼합 곡선보 요소에 의한 아치의 자유진동해석

박 용 국[†] · 김 진 곤^{*}

(2005년 6월 20일 접수, 2005년 11월 30일 심사완료)

Free Vibration Analysis of Arches Using Higher-Order Mixed Curved Beam Elements

Yong Kuk Park and Jin-Gon Kim

Key Words : Curved Beam Element(곡선보 요소), Hybrid-Mixed Formulation(혼합 정식화), Kinematic Condensation(동적 축약), Free Vibration Analysis(자유진동해석)

Abstract

The purpose of this research work is to demonstrate a successful application of hybrid-mixed formulation and nodeless degrees of freedom in developing a very accurate in-plane curved beam element for free vibration analysis. To resolve the numerical difficulties due to the spurious constraints, the present element, based on the Hellinger-Reissner variational principle and considering the effect of shear deformation, employed consistent stress parameters corresponding to cubic displacement polynomials with additional nodeless degrees. The stress parameters were eliminated by the stationary condition, and the nodeless degrees were condensed by Guyan Reduction. Several numerical examples indicated that the property of the mass matrix as well as that of the stiffness matrix have a great effect on the numerical performance. The element with consistent mass matrix produced best results on convergence and accuracy in the numerical analysis of Eigenvalue problems. Also, the higher-order mixed curved beam element showed a superior numerical behavior for the free vibration analyses.

1. 서 론

곡선보는 공학의 여러 분야에서 널리 사용되는 구조요소일 뿐 아니라, 셸과 같은 복잡한 구조요소의 곡률에 의한 영향을 이해하기 위한 전 단계의 요소로서도 큰 중요성을 가진다. 이중곡률에 의한 영향을 제외하면, 곡선보는 축대칭 셸요소가 가지는 신장-굽힘간 상호작용, 강체모드 구현의 어려움, 막-전단 강성과잉현상(membrane and shear locking) 등의 중요한 특징들을 대부분 가진다.

이러한 곡선보 요소의 개발을 위해 지금까지 다양한 변분 이론이 적용되었으며, 이 중 최소 위치 에너지 이론에 바탕한 변위 모델이 가장 일반적으로 사용되어 왔다. 그러나, 3 차 함수를 사용하

는 C^1 곡선보 요소 또는 전단 변형을 고려한 저차의 보간 함수를 사용하는 요소는 두께가 곡률의 반경에 비해 아주 작은 경우의 아치문제에서 가성 구속이 발생하여 강성과잉현상이 발생한다.⁽¹⁻³⁾ 강성과잉현상이 발생하면 변위는 실제보다 작게 계산되며 심각한 요동을 가지는 응력분포를 나타낸다. 이러한 강성과잉문제를 해결하기 위해 제시된 대표적인 방법들로는 감차/선택 적분 요소,⁽⁴⁻⁶⁾ 장-일관 요소(field consistent element),^(7,8) 비등매개변수 요소(anisoparametric element),⁽⁹⁾ 변형률 요소⁽¹⁰⁾ 등이 있다.

이러한 변위 모델에 대한 또 다른 대안으로써, Saleeb,⁽¹¹⁾ Dorfi,⁽¹²⁾ Kim⁽¹³⁻¹⁶⁾ 등은 Hellinger-Reissner 변분이론에 바탕한 혼합 요소들(hybrid-mixed element)을 제안하였다. 그러나 제안된 혼합 요소들은 강성과잉과 같은 수치적인 문제점은 완화시켰지만, 저차의 보간함수를 사용하는 경우 효율성이 높지 않은 문제점을 가지고 있다. 따라서, 저차 혼합요소의 효율성을 향상시키기 위해, Kim 은 혼합 곡선 보 요소에 무절점 자유도(nodeless degrees)

[†] 책임저자, 회원, 대구가톨릭대학교 기계자동차공학부
E-mail: ykpark@cu.ac.kr
TEL: (053)850-2723 FAX: (053)850-2710
^{*} 회원, 대구가톨릭대학교 기계자동차공학부

를 도입하여 곡선보요소의 수치적 특성을 크게 향상시켰다.

본 논문에서는, 이러한 무절점 자유도를 도입한 고차 혼합 곡선보 요소의 정식화를 곡선보의 자유진동해석에 적용하였다. 무절점 자유도를 가지는 고차 변위함수에 대응되는 적절한 응력매개변수(stress parameter)들을 선정하기 위해 장-일관성 개념을^(7,8) 도입하였으며, 응력매개변수들은 定常조건(stationary condition)을 통하여, 그리고 도입된 무절점 자유도들은 동적 축약(Guyan reduction)⁽¹⁷⁾을 통하여 요소 정식화의 최종단계에서 제거함으로써, 일반적인 변위 요소와 크기가 같은 (6x6)의 강성행렬 및 질량행렬을 유도하였다. 본 연구에서 정식화된 혼합 곡선보 요소의 자유진동해석에서 질량행렬이 미치는 영향을 분석하기 위하여 변위함수와 일치하는 질량행렬, 선형의 Lagrange 보간함수를 사용한 변위함수와 일치하지 않는 질량행렬 그리고 집중 질량행렬(Lumped mass matrix)의 세 가지 경우를 적용하고, 그 특성 및 성능을 기존의 문헌에 보고된 여러 결과들과 비교 검토하였다.

2. 혼합변분이론

Fig. 1 은 6 개의 변위 자유도를 가지는 2 절점 곡선보 요소를 보여주고 있다. u 와 v 는 중립면에서 각각 접선 x 방향과 법선 y 방향 변위를 나타내며, θ 는 z 방향 회전량을 나타내는 변위 성분이다. N 과 V 는 각각 접선 x 방향과 법선 y 방향의 내력들이며, M 은 모우멘트 성분이다. 그림에서 하첨자 1 과 2 는 변위와 내력 성분들이 정의되는 절점을 의미한다. 고려된 곡선보는 두께 h 와 초기 곡률반경 R 과 길이 l 을 가진다. 곡선보의 두께방향으로 수직변위가 일정하다고 가정하면, 접선과 법선 방향의 변위성분들을 다음과 같이 표현할 수 있다.

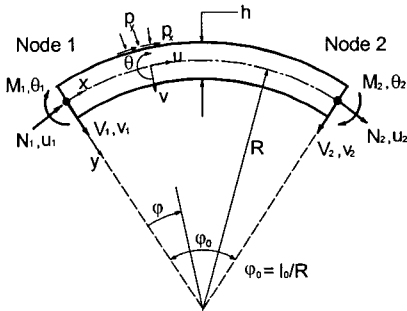


Fig. 1 The geometry of a two-noded curved beam element

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} \quad (1)$$

곡선보에 대한 Hellinger-Reissner 범함수는 다음과 같은 형태로 나타낼 수 있다.

$$\delta \Pi_R = \delta \left\{ \int_c L_R dx - \frac{1}{2} \rho \omega^2 \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{U}' \cdot \mathbf{U} dy dx \right\} = 0 \quad (2)$$

여기서, ρ 와 ω 는 각각 밀도와 각진동수(angular frequency)를 나타내며, 에너지밀도 L_R 은 다음과 같이 표현된다.

$$L_R = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}' \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}' \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3)$$

곡선보의 응력 벡터 $\boldsymbol{\sigma}$ 와 변형률 벡터 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 는 각각 $\boldsymbol{\sigma} = [N, V, M]'$ 와 $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_0, \gamma_0, \kappa]'$ 이며, \mathbf{S} 는 컴플라이언스 행렬(compliance matrix)을 나타낸다. Naghdi 와 Reissner⁽¹¹⁾ 의 셀 이론으로부터 유도된 곡선보 이론에 의해 변형률은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} \frac{d}{d\varphi} & -\frac{1}{R} & 0 \\ \frac{1}{R} & \frac{1}{R} \frac{d}{d\varphi} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R} \frac{d}{d\varphi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} = \Delta \mathbf{u} \quad (4)$$

이 때, φ 는 원주방향 중심각을 나타내며, 그리고

$$N \approx EA \left(1 + \frac{I_z}{AR^2} \right) \varepsilon_0 - \frac{EI_z}{R} \kappa \quad (5a)$$

$$V \approx kGA \gamma_0 \quad (5b)$$

$$M \approx EI_z \kappa - \frac{EI_z}{R} \varepsilon_0 \quad (5c)$$

여기서 E 는 탄성계수, G 는 전단계수, k 는 전단보정계수를, A 와 I_z 는 각각 단면의 면적과 2 차 관성 모우멘트를 나타낸다. 식 (5)로부터 다음과 같은 컴플라이언스 행렬을 구성할 수 있다.

$$\mathbf{S} = \frac{1}{EA} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{R} \\ 0 & \frac{E}{kG} & 0 \\ \frac{1}{R} & 0 & \frac{A}{I_z} + \frac{1}{R^2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

3. 유한요소정식화

선형의 저차함수를 가지는 2 절점 혼합 곡선보

요소의 수치적 효율성을 향상시키기 위해, 일반적인 등매개 보간함수에 $\xi(1-\xi), \xi^2(1-\xi)$ 와 같은 무절점 자유도를 가지는 고차함수(bubble function)들을 도입하였다. 곡선보 요소의 굽힘 거동이나 고차의 진동모드를 보다 정확하게 표현하기 위해 도입된 무차원 변수 $\xi = \varphi/\varphi_0 = x/l$ ($0 \leq \xi \leq 1$) 로 표현되는 고차함수를 사용함으로써, 변위는 다음과 같이 3 차의 보간 함수를 가지게 된다.

$$\begin{aligned} u &= (1-\xi)u_1 + \xi u_2 + \xi(1-\xi)a_1 + \xi^2(1-\xi)a_2 \\ v &= (1-\xi)v_1 + \xi v_2 + \xi(1-\xi)b_1 + \xi^2(1-\xi)b_2 \\ \theta &= (1-\xi)\theta_1 + \xi\theta_2 + \xi(1-\xi)c_1 + \xi^2(1-\xi)c_2 \end{aligned} \quad (7)$$

식 (7)을 행렬식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{u} = [\mathbf{N}_c : \mathbf{N}_h] \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_c \\ \mathbf{d}_h \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{d} \quad (8)$$

여기서, $\mathbf{d}_h = \{a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2\}'$ 는 요소내부의 무절점 자유도들이며, $\mathbf{d}_c = \{u_1, \dots, \theta_2\}'$ 는 일반적인 형태의 등매개 곡선 보요소 가지는 절점에서의 자유도 성분들을 나타낸다.

혼합정식화에서, 변위의 근사함수에 대응되는 적절한 응력매개변수를 선정하기 위하여, 식 (4)의 전단 변형률에 대한 극한 거동을 살펴보고자 한다. 먼저, 보가 거의 직선에 가깝고, 두께가 아주 얇아지는 경우 ($R \rightarrow \infty$), 전단 변형률이 무시할 정도로 작아진다.^(5,7,8) 따라서, 식 (4)과 (8)로부터 전단 변형률은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{dv}{l_0 d\xi} - \theta = \left(\frac{v_2 - v_1 + b_1}{l_0} - \theta_1 \right) \\ &+ (\theta_1 - \theta_2 - c_1 - 2 \frac{b_1 - b_2}{l_0}) \xi \\ &+ (c_1 - c_2 - 3 \frac{b_2}{l_0}) \xi^2 + c_2 \xi^3 \end{aligned} \quad (9)$$

식 (9)에서, 전단 변형률 γ_0 이 0 이 되면서, $c_2 \rightarrow 0$ 을 포함한 $(n+1)$ 개의 구속조건이 발생하게 된다. 이 중에서, 특히 c_2 이 0 으로 가는 구속조건은 불필요한 구속조건으로써, 요소 단위에서는 $d^3\theta/d\xi^3$ 와 같은 가상구속조건(spurious constraint)을 발생시키게 된다. 이러한 가상구속조건은 존재하지 않은 전단에 대한 가상에너지를 정식화 과정에 도입하게 되어, 전단 강성과잉이나 전단력 계산에 심각한 편차를 발생시킨다.⁽⁸⁾ 따라서, 상기의 보의 극한적 거동에서 발생하는 가상구속을 제거하기 위하여, 전단 변형률이나 응력에 대한 근사

함수는 2 차 함수로 가정하여야 한다.

유사한 방법으로, 비신장 굽힘(inextensional bending)과 같은 극한조건에서, 식 (4)의 축방향 변형률을 살펴보면 b_2 가 0 이 되는 가상구속조건이 아래 식 (10)에서 발생함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= u_{,\xi} + \frac{v}{R} = (-u_1 + u_2 + a_1 + \frac{v_1}{R}) \\ &+ (-2a_1 + 2a_2 - \frac{v_1}{R} + \frac{v_2 + b_1}{R}) \xi + \\ &+ (-3a_2 + \frac{b_2 - b_1}{R}) \xi^2 - \frac{b_2}{R} \xi^3 \end{aligned} \quad (10)$$

따라서, 일반적인 응력장에서 발생하는 가상구속조건들을 제거하기 위하여, 응력장의 근사를 위해서는 3 차의 변위함수보다 한 차수 낮은 2 차의 응력함수를 가지도록 응력매개변수들 가정하여야 한다.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P}(1, \xi, \xi^2) \cdot \boldsymbol{\beta} \quad (11)$$

여기서, 응력매개변수 벡터 $\boldsymbol{\beta}$ 는 $\{\beta_1, \dots, \beta_9\}'$ 로 정의되며, \mathbf{P} 는 응력 매개변수에 대한 2 차의 근사함수의 행렬을 나타낸다. 이와 같이 변위보간함수와 장-일치되는 적절한 응력함수로 가정하지 않는다면, 비록 혼합요소일지라도 강성과잉이나 응력요동과 같은 수치적인 문제점을 가지며, 일반적인 변위요소와 등가의 강성행렬을 가진다는 것이 Kim 에 의해 보고된 바 있다.⁽¹⁶⁾

4. 요소강성행렬과 질량행렬

유한요소의 강성행렬을 유도하기 위해, 식 (8) 와 (11)을 식 (2)에 대입하면 다음과 같은 식으로 나타낸다.

$$\Pi_R = \boldsymbol{\beta}' \mathbf{G} \mathbf{d} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}' \mathbf{H} \boldsymbol{\beta} - \frac{1}{2} \omega^2 \mathbf{d}' \mathbf{M} \mathbf{d} \quad (12)$$

여기서,

$$\mathbf{H} = \int \mathbf{P}' \mathbf{S} \mathbf{P} dx \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \int \mathbf{P}' \boldsymbol{\Delta} \mathbf{N} dx = \int \mathbf{P}' \boldsymbol{\Delta} [\mathbf{N}_c : \mathbf{N}_h] dx \\ &= [\mathbf{G}_c : \mathbf{G}_h] \end{aligned} \quad (14)$$

$$\mathbf{M} = \int \mathbf{N}' \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{N} dx \quad (15)$$

여기서, 질량행렬 \mathbf{M} 에 정의되는 행렬 $\boldsymbol{\Lambda}$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \rho A & 0 & 0 \\ 0 & \rho A & 0 \\ 0 & 0 & \rho I_z \end{bmatrix}$$

식 (12)에서 벡터 \mathbf{d} 와 $\boldsymbol{\beta}$ 에 대해 범함수 (functional)의 평형조건을 적용하면 다음과 같은 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{cc} & \mathbf{K}_{ch} \\ \mathbf{K}_{hc} & \mathbf{K}_{hh} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{cc} & \mathbf{M}_{ch} \\ \mathbf{M}_{hc} & \mathbf{M}_{hh} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_c \\ \mathbf{d}_h \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

여기서 성분 \mathbf{K}_{ij} 와 \mathbf{M}_{ij} 는 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_{ij} = \mathbf{G}_i^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}_j \quad (i \text{ and } j = c, h) \quad (17)$$

$$\mathbf{M}_{ij} = \int_c N_i^T \Delta N_j dx \quad (i \text{ and } j = c, h) \quad (18)$$

무절점 자유도 \mathbf{d}_h 는 요소 운동방정식의 정식화 단계에서 자유도를 증가시키므로, 동적축약(kinematic condensation 또는 Guyan reduction)을 통하여 요소 최종 방정식에서 제거하였다. 동적축약과 정지조건(stationary condition)을 통하여 무절점 자유도 \mathbf{d}_h 와 응력태개변수 $\boldsymbol{\beta}$ 를 제거하면, 최종적인 요소의 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\left[\mathbf{K}_e - \omega^2 \mathbf{M}_e \right] \mathbf{d}_c = \mathbf{0} \quad (19)$$

여기서 축약된 요소 강성행렬 \mathbf{K}_e 와 질량행렬 \mathbf{M}_e 는 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{K}_{cc} - \mathbf{K}_{ch} \mathbf{K}_{hh}^{-1} \mathbf{K}_{hc} \quad (20)$$

$$\mathbf{M}_e = \mathbf{M}_{cc} + \mathbf{K}_{ch} \mathbf{K}_{hh}^{-1} \mathbf{M}_{hh} \mathbf{K}_{hh}^{-1} \mathbf{K}_{hc} - \mathbf{K}_{ch} \mathbf{K}_{hh}^{-1} \mathbf{M}_{hc} - \mathbf{M}_{ch} \mathbf{K}_{hh}^{-1} \mathbf{K}_{hc} \quad (21)$$

따라서, 요소는 이제 절점에서의 변위성분만을 변수로 갖는 강성행렬과 질량행렬형태의 고유치문제로 다룰 수 있게 되었다.

본 연구에서는 혼합곡선보요소의 고유치문제해석에서 질량행렬의 영향을 살펴보기 위하여 다음의 혼합곡선보요소가 다음과 같이 3 가지 경우의 질량행렬을 가지는 경우를 살펴보고자 한다.

1. **HM2CM**(Hybrid-Mixed 2-Noded Element with Consistent Mass Matrix): 식(21)과 같이 강성행렬을 구성할 때 사용된 변위장과 일치하는 3 차의 변위함수를 사용하여 일관 질량행렬을 사용한 요소
2. **HM2IM**(Hybrid-Mixed 2-Noded Element with Inconsistent Mass Matrix): 강성행렬을 구성할 때 사용된 3 차의 변위함수 대신, 선형의 Lagrange 보간함수를 사용하여 구성한 비일관 질량행렬 \mathbf{M}_{cc} 를 사용한 요소
3. **HM2LM**(Hybrid-Mixed 2-Noded Element with Lumped Mass Matrix): 해석의 간편성과 비교를

위하이 식 (21)의 \mathbf{M}_e 대신 다음과 같은 집중 질량행렬을 사용한 요소

$$\mathbf{M}_{lump} = [m_1 \ m_1 \ J_1 \ m_2 \ m_2 \ J_2]_{diagonal_matrix} \quad (22)$$

여기서,

$$m_1 = m_2 = \frac{1}{2} \rho A R \phi_0$$

$$J_1 = J_2 = \frac{1}{2} \rho I_z R \phi_0$$

5. 수치예제

5.1 단순지지 직선보

$R/L = 100$ 이고 $R\phi_0 = L$ 인, 양단이 단순지지되고 직선에 가까운 보(nearly straight simply-supported beam)에서 전단강성과인형상을 살펴 보기 위하여, 보의 길이가 L , 두께가 h , 그리고 단면의 폭이 b 인 단순지지보의 3 번째까지 고유진동수에 대한 수치해석결과를 다음과 같은 이론해와⁽¹⁸⁾ 비교하였다.

$$\frac{\rho r_1^2}{kG} \omega_n^4 - \omega_n^2 \left(1 + \frac{n^2 \pi^2 r_1^2}{L^2} + \frac{n^2 \pi^2 r_1^2 E}{L^2 kG} \right) + \frac{\alpha^2 n^4 \pi^4}{L^4} = 0 \quad (23)$$

여기서,

$$\alpha^2 = \frac{E I_z}{\rho A} ; \quad r_1^2 = \frac{I_z}{A}$$

수치계산을 위하여 단면의 폭 $b=1$ in, 길이 $L=10$ in 물성치는 $E=3 \times 10^7$ psi, $\nu=0.3$, $k=0.8497$, $\rho=0.02736$ slugs ft/in^4 를 사용하였다.

Fig. 2, 3, 4 는 각각 $L/h=1000$ 인 두께가 상당히 얇은 단순지지된 직선보에서 이론해에 대해 본 연구에서 제안된 HM2CM, HM2LM, HM2IM 혼합곡선보요소들의 1 차부터 3 차까지 고유진동수의 수렴성을 보여주는 그림들이다. 세로축은 수치해석 결과를 이론해로 나눈 값이며, 가로축은 해석에 사용된 유한요소의 개수를 나타낸다. 본 논문에서 제안된 요소들의 신뢰성을 확인하기 위해 비교된 2 절점 LCCS(CO)⁽¹⁹⁾는 3 차의 변위보간함수를 가지고 변형률장에 일치하는 변위장을 사용하여 일관 질량행렬을 구성한 변형률 요소이며, 2 절점 LCCS(IN)⁽¹⁹⁾은 변형률장에 일치하지 않는 선형의 Lagrange 보간함수를 사용하여 비일관 질량행렬을 구성한 변형률 요소이다.

Fig. 2, 3, 4 에서 이론해에 수렴하는 경향은 HM2CM, LCCS(CO), HM2LM, HM2IM, LCCS(IN)의 순이다. 강성행렬을 구성하는데 사용된 변위장과 동일한 변위장을 이용하여 질량행렬을 구성한 경우 가장 우수한 수렴성을 보여주었으며, 해석의

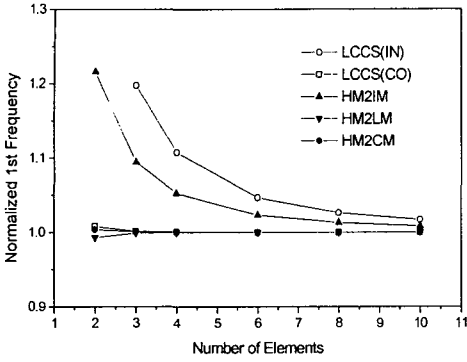


Fig. 2 Convergence trends of the normalized 1st frequencies in a simply-supported nearly straight beam ($L/h=1000$)

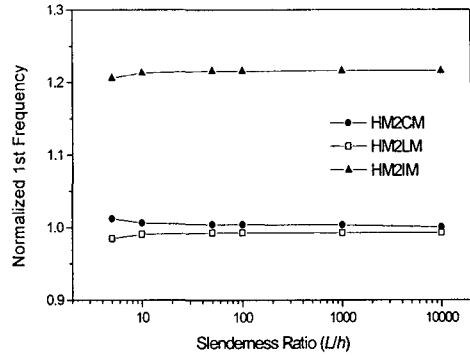


Fig. 5 Normalized two-element results vs. Slenderness Ratio (L/h)

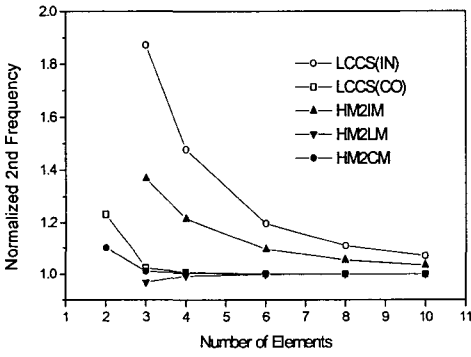


Fig. 3 Convergence trends of the normalized 2nd frequencies in a simply-supported nearly straight beam ($L/h=1000$)

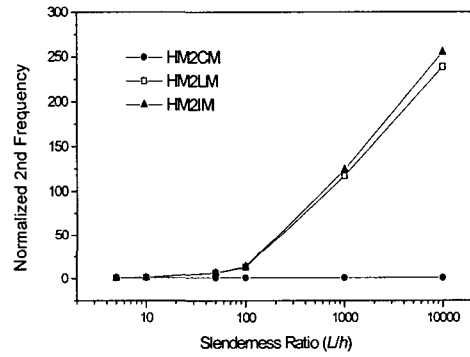


Fig. 6 Normalized two-element results vs. Slenderness Ratio (L/h)

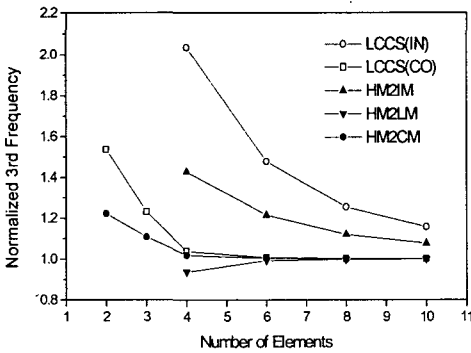


Fig. 4 Convergence trends of the normalized 3rd frequencies in a simply-supported nearly straight beam ($L/h=1000$)

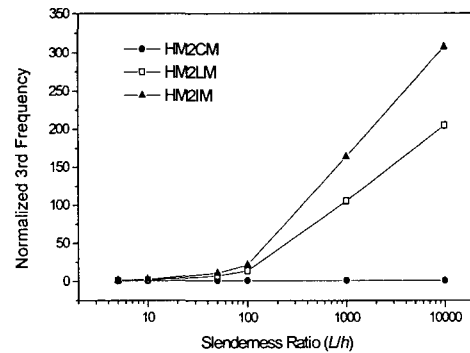


Fig. 7 Normalized two-element results vs. Slenderness Ratio (L/h)

Table 1 Fundamental frequency (rad/s) of hinged circular arches for various subtended angles

Angles(degree)	HM2CM (12 d.o.f.)	MFE ⁽²²⁾ (12 d.o.f.)	THICK-2 ⁽²⁰⁾ $p=5$	E1. 1b ⁽²¹⁾	Heppler ⁽²³⁾
10	5845.78	5852.32	5841.74	5874.30	5849.90
20	2836.20	2829.66	2827.63	2823.10	2830.20
30	2370.01	2373.23	2339.82	2345.20	2339.70
60	564.05	567.71	560.25	561.20	560.24
90	230.31	232.94	229.66	230.40	229.77
120	115.82	117.50	115.64	116.30	115.64
150	64.52	76.24	64.43	64.93	64.44
180	37.91	38.71	37.86	38.24	37.87
210	22.80	23.42	22.77	23.05	22.77
240	13.69	14.19	13.66	13.87	13.67
270	7.94	8.39	7.92	8.06	7.93
300	4.20	4.65	4.18	4.27	4.19
330	1.70	2.28	1.69	1.73	1.69
350	0.50	1.38	0.49	0.50	0.24

간편성을 위해 자주 사용되는 집중 질량행렬을 사용하는 경우가 선형의 Lagrange 보간함수를 사용하여 질량행렬을 구성하는 경우보다 더 나은 수렴성을 나타내었다. 이로부터 수치해석결과의 수렴성은 강성행렬뿐만 아니라 질량행렬의 성질에도 큰 영향을 받음을 알 수 있다. 또한, 고차모드로 갈수록 HM2CM 요소와 기타 요소들과의 수렴성의 차이가 점차로 커짐을 알 수 있다.

Fig. 5, 6, 7은 고유모드를 표현하기에 부족한 요소 분할상태에서 고유진동수에 대한 해석결과의 두께에 대한 민감도를 알아보기 위하여, HM2CM, HM2LM, HM2IM 요소 2 개를 사용하여 1 차, 2 차 그리고 3 차 고유진동수를 계산한 결과들이다. 저차모드에서는 세 요소 모두 두께변화에 대한 민감도가 크지 않지만, 고차모드로 갈수록 일관 질량행렬(consistent mass matrix)를 사용한 HM2CM 요소를 제외한 집중 질량행렬(lumped mass matrix)나 비일관 질량행렬(inconsistent mass matrix)을 사용한 HM2LM 과 HM2IM 요소의 경우 고차모드에서 두께가 얇아질수록 오차가 커지는 경향을 보이고 있다. 특히, 비일관 질량행렬을 사용하는 경우 그러한 경향이 뚜렷하게 관찰된다.

이러한 결과들로부터 장-일치개념을 이용하여 응력매개변수를 선정하여 정적해석에서 강성과잉 현상을 제거되어 있음이 알려져 있고⁽¹³⁾, 일관 질량행렬을 사용한 혼합요소인 HM2CM 요소가 고차진동모드에서도 두께가 얇더라도 매우 정확한 고유치 해석 결과를 보여줌을 확인할 수 있었다.

5.2 ힹ지 아치(hinged arch)

Fig. 8 은 양단이 단순지지된 아치를 보여주고 있다. Fig. 9 와 Table 1 는 이러한 양단 단순지지된

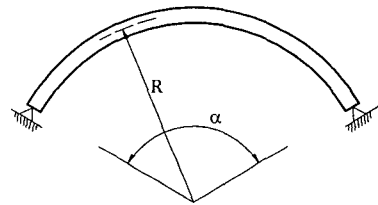


Fig. 8 Geometry of the hinged circular arches

아치에서 α 가 10 도부터 350 도까지 변하는 경우 본 연구에서 제안된 3 개의 요소(12 d.o.f.)를 사용하여 얻은 1 차 고유진동수(rad/s)의 변화를 보여주고 있다. 본 해석을 통하여 곡선보의 곡률 변화에 대한 본 요소의 수치적 거동과 곡선보의 진동특성에 곡률이 미치는 영향 등을 살펴볼 수 있다. 수치해석에 사용된 기하학적 치수와 물성치들은 $R=12$ in, $E=3.04 \times 10^7$ psi, $\rho=0.02736$ slugs ft/in^3 , $A=0.1563$ in^2 , $I_z=8.138 \times 10^{-4}$ in^4 , $h=0.25$ in, $\nu=0.3$, $k=0.8497$ 이다.

Fig. 1 에서 기준값은 3 차의 다항함수와 5 개의 푸리에급수를 사용한 Leung⁽²⁰⁾의 푸리에 p -요소(Fourier p -element) 1 개를 사용하여 구한 결과를 사용하였다. 본 논문의 HM2CM 은 비록 깊은 셸 이론(deep shell theory)에 바탕하여 정식화하였지만 얇은 곡선보부터 깊은 곡선보까지 전 각도에서 Leung 과 절점에서 전단변형률을 포함한 4 개의 자유도 성분을 가지는 2 절점 곡선보요소인 Krishnan⁽²¹⁾의 E1.1b 요소와 비슷한 해석결과를 보여주고 있다. 그러나, 깊은 셸 이론에 바탕하고 해석에서 본 HM2CM 요소와 동일한 개수의 자유도를 사용한 Raveendranath⁽²²⁾의 2 절점 곡선보요소인

후기

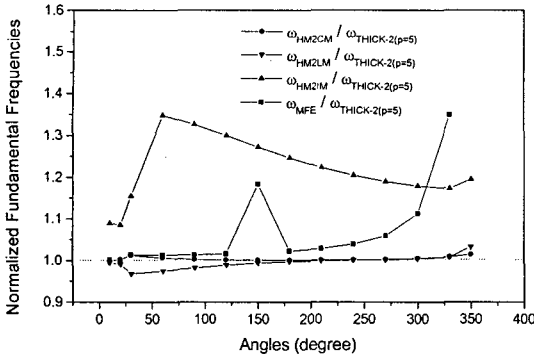


Fig. 9 Influence of curvature on the fundamental frequencies by present 3 elements(12 d.o.f.) idealization of the hinged circular arches

MFE 는 각도가 100 도 이상 커질수록 그 차이가 커지는 경향을 보이고 있다. 집중 질량행렬을 사용한 HM2LM 요소도 전 영역에 걸쳐 비교적 정확한 결과를 보여주었지만, 비일관 질량행렬을 사용한 HM2IM 요소는 60 도까지 오차가 크게 증가하다가 이후 완만하게 줄어드는 경향을 보이고 있다. 이로부터 본 논문에서 제안된 HM2CM 요소의 수치적 효율성과 정확성을 다시 한 번 확인할 수 있다.

6. 결론

본 논문에서는, 저차 혼합요소의 수치적 정확성을 향상시키기 위해서 무절점 자유도를 도입한 변위장과 이에 대응하는 적절한 응력장을 가지는 고차 혼합 곡선보요소를 이용하여 자유진동해석을 수행하였다. 양단이 단순지지된 직선보와 아치에 대한 수치해석결과를 검토한 결과, 혼합요소의 정식화에서 강성행렬뿐만 아니라 질량행렬의 성질에서 비롯되는 오차도 두께와 곡률의 변화와 밀접한 관련이 있음을 확인할 수 있었다. 본 논문에서 제안한 강성행렬을 구성할 때 사용된 3 차의 변위장과 일치하는 동차의 변위함수를 사용하여 일관 질량행렬을 사용한 HM2CM 요소는 단순지지된 직선보와 곡선보의 자유진동해석에서, 기존의 다른 요소들에 비해 빠른 수렴성을 보였으며 특히 고차모드에서 뛰어난 수치적 거동을 나타내었다. 또한, 보의 두께와 곡률에 상관없이 매우 안정적이고도 정확한 해석결과를 얻을 수 있었다.

이 논문은 2004 년 대구가톨릭대학교 교비해외 파견 연구지원금에 의한 것임.

참고문헌

- (1) Dawe, D. J., 1974, "Numerical Studies Using Circular Arch Finite Elements," *Comput. Struct.*, Vol. 4, pp. 729~740.
- (2) Stolarski, H. and Belytschko, T., 1983, "Shear and Membrane Locking in Curved C^0 Elements," *Comp. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. 41, pp. 279~296.
- (3) Noor, A. K. and Peters, J. M., 1981, "Mixed Models and Reduced/Selective Integration Displacement Models for Nonlinear Analysis of Curved Beams," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 17, pp. 615~631.
- (4) Noor, A. K., Greene, W. H. and Hartley, S. J., 1977, "Nonlinear Finite Element Analysis of Curved Beams," *Comp. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. 12, pp. 289~307.
- (5) Stolarski, H. and Belytschko, T., 1982, "Membrane Locking and Reduced Integration for Curved Elements," *J. Appl. Mech.*, Vol. 49, pp. 172~176.
- (6) Moon, W. J., Kim, Y. W., Min, O. K. and Lee, K. W., 1996, "Reduced Minimization Theory in Skew Beam Element," *Transactions of the KSME*, Vol. 20, No. 12, pp. 3792~3803.
- (7) Babu, C. Ramesh and Prathap, G., 1986, "A Linear Thick Curved Beam Element," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 23, pp. 1313~1328.
- (8) Prathap, G. and Babu, C. Ramesh, 1986, "An Isoparametric Quadratic Thick Curved Beam Element," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 23, pp. 1583~1600.
- (9) Tessler, A. and Spiridigliozzi, L., 1986, "Curved Beam Elements with Penalty Relaxation," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 23, pp. 2245~2262.
- (10) Ryu, H. S. and Sin, H. C., 1996, "A 2-Node Strain Based Curved Beam Element," *Transactions of the KSME*, Vol. 18, No. 8, pp. 2540~2545.
- (11) Saleeb, A. F. and Chang, T. Y., 1987, "On the Hybrid-Mixed Formulation C^0 Curved Beam Elements," *Comp. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. 60, pp. 95~121.
- (12) Dorfi, H. R. and Busby, H. R., 1994, "An Effective Curved Composite Beam Finite Element Based on the Hybrid-Mixed Formulation," *Comput. Struct.*, Vol. 53, pp. 43~52.
- (13) Kim, J. G. and Kim, Y. Y., 1998, "A New Higher-Order Hybrid-Mixed Curved Beam Element," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 43, pp. 925~940.
- (14) Kim, J. G., 2000, "Optimal Interpolation Functions of 2-Node Hybrid-Mixed Curved Beam Element," *Transactions of the KSME*, A, Vol. 24, pp. 3003~3009.
- (15) Kim, J. G. and Kang, S. W., 2003, "A New and Efficient C^0 Laminated Curved Beam Element,"

- Transactions of the KSME, A*, Vol. 27, pp. 559~566.
- (16) Lee, H. C. and Kim, J. G., 2005, "A New Hybrid-Mixed Composite Laminated Curved Beam Element," *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 19, pp. 811~819.
- (17) Cook, R. D., Malkus, D. S. and Plesha, M. E., 1989, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 3rd Edition, Wiley, New York.
- (18) Rao, S. S., 2004, *Mechanical Vibrations*, 4th Edition, Pearson Prentice Hall.
- (19) Ryu, H. S. and Sin, H. C., 1997, "The Effect of the Mass Matrix in the Eigenvalue Analysis of Curved Beam Element," *Transactions of the KSME, A*, Vol. 21, pp. 288~296.
- (20) Leung, A. Y. T. and Zhu, B., 2004, "Fourier p-Elements for Curved Beam Vibrations," *Thin-Walled Structures*, Vol. 42, pp. 39~57.
- (21) Krishinan, A., Dharmaraj, S. and Suresh, Y. J., 1995, "Free Vibration Studies of Arches," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 186, pp. 856~863.
- (22) Raveendranath, P., Singh, G. and Pradhan, B., 1999, "A Two-Noded Locking-Free Shear Flexible Curved Beam Element," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 44, pp. 265~280.
- (23) Heppler, G. R., 1992, "An Element for Studying the Vibration of Unrestrained Curved Timoshenko Beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 158, pp. 387~404.