주가시계열의 무한분산과 장기의존성*

이 일 균**

요 약

쇄신의 분산이 무한인 주가시계열이 장기의존성 과정에 의하여 생성되고 있는가 또는 생성되고 있지 않는가를 검정하고자 한다. 기존의 연구가 쇄신의 분산이 유한한 경우에 한정하여 장기의존성 주가 과정에 대한 장기기억성이 검토되어왔다. 이 논문에서는 쇄신의 분산이 유한한 경우와 무한한 경우에 다같이 적용되는 방법들을 한국종합주가지수의 일별수익률에 적용하여 장기기억 모수를 추정·검정한다. 추정방법으로서는 : 분수 가우스 잡음, 가우스 분수적분 자기회기 이동평균, 선형 분수안정잡음 등이 형성되는 상황에 절대값 방법, 분수 방법과 총량화 Whittle 방법을 사용한다. 한국종합주가지수의 일별대수수익률 시계열은 분산이 무한한 경우에도 장기의존성과정에 의하여 생성되고 있다. 극치가 존재해도 장기기억과정이 형성되고 있다.

I. 서 론

한 주가는 이 주가와 관련된 정보의 도착에 따라 변동한다. 세상이 복잡하고 세상을 움직이는 힘들은 다양하다. 이 복잡성과 다양성은 이 힘들의 균형이 장기적 안정에 머물러 있지 못하게 하고 있다. 세상을 움직이는 힘들의 균형의 불안정은 이 균형 안에서 강하게 작용하고 있던 힘들의 약화를 필연적으로 초

* 본 논총에 나에 대한 특집을 계획해주신 김상기 전 회장님, 오현탁 회장님, 김철중 편집위원장님, 구본열 교수님, 황선웅 교수님, 김훈용 교수님, 논문을 지필하신 교수님들에게 이 자리를 비러 사의를 표한다.

** 명지대학교 경영학과 교수

래하고 약하게 활동하고 있는 힘들의 강화를 야기시킬 수 있다. 그뿐만 아니다. 새로운 강력한 힘들을 출현케 하기도 한다. 이 힘들이 역학적 영향력을 서로서로에게 미치고 그 결과 새 균형이 탄생한다. 새 균형이 형성되는 과정과 새로 형성된 균형이 다같이 시장에서 정보로 표출된다. 균형을 유지하고 있는 힘들 중 하나 또는 몇 개가 보다 강력해지거나 또는 보다 약화되면 균형은 깨지고 새 균형이 형성된다. 이에 따라 강력해진 힘이나 약화된 힘의 내용이 정보로 표출되며, 동시에 균형 속에 존재하던 모든 힘들의 상대적 강도가 변화하고 이것 역시 정보로 표출된다. 강력한 새 힘이 생성되면 이 힘이 균형 속에서 활동하던 힘들의 역학관계를 변화시키고 이에 따라 균형을 형성하고 있던 어떤 힘들은 강화시키고 어떤 힘들은 약화시킨다. 이것들도 정보로 표출된다. 이 정보들은 주가들을 변동시킨다.

관련정보에 따라 주가가 변한다면 시장에 존재하고 있는 힘들의 상대적 강도가 정보인 만큼 이 힘들이 주가를 변동시키는 것이다. 어느 한 힘이 시간의 흐름에 따라 변해가고 있을 때 한 시점에서 갖고 있는 힘의 강도에 따라 다음 시점의 힘의 강도가 정해질 수 있다. 살아서 움직이고 있는 힘이라면 이 힘이 도살당하지 않은 경우 애초에 매우 큰 강력성을 가지고 있던 힘은 새로 출현한 힘이 약화시켜도 어느 정도 강력한 힘을 보유하게 될 것이다. 강력한 체력의 권투 선수가 자기보다 무척 강력한 체력의 신예 권투선수와 대결한 경기시합에서 패한다 해도 경기 시작 처음 한방에 뻗어 일어나지 못하는 경우는 거의 없을 것이다. 한 방에 뻗는다면 그 힘은 도살된 것으로 보아야 할 것이다. 이와 같이 힘들의 표상으로 현현하는 정보가 변동시키는 주가시계열을 단기적으로는 의존관계를 가진다. 그러나 단기적 의존관계는 조만간 소멸한다.

주가에 영향을 미치는 힘들의 균형과 이 힘들의 상호교환으로 인해 새로 이루어지는 균형은 주가시계열의 단기적 의존 관계가 아니라 장기적 의존관계를 형성시킬 수 있으며 이 형성가능성을 배제하기란 불가능하다. 이 경우 시계열의 의존성은 장기 자기상관 또는 장기 시계열상관으로 표출된다. 시계열 내의 의존성은 통계학적으로 자기상관성(자기공분산)이기 때문이다. 시계열의 단기의존성을 단기상관성이므로 시계열 상관이 조만간에 소멸해야 한다. 따라

서 시계열 상관은 단기의존성이 존재할 때 기하급수적으로 소멸한다. 그러나 시계열의 장기의존성을 의존이 장기적이므로 상관성이 장기간 지속되어야 한다. 이 경우 시계열 상관은 매우 느리고 더디게 감소하여 소멸하게 된다. 따라서 장기의존성이 시계열에 존재할 때 시계열 상관은 쌍곡선적으로 소멸한다.

나는 주가시계열의 장기의존성, 즉 장기기억 주가 과정에 관심을 가지고 연구해온 바 있다(2005, 2003a, 2003b, 2002, 2001, 1999). 주가가 장기기억 과정에 의해 생성된다면 투자 전략에 이 성질을 효율적으로 사용할 수 있다. 주가가 장기기억과정에 의해 형성되면 충격의 발생, 즉 정보의 발생이 주가를 변동시킬 때 충격이 발생하는 초창기에는 변동된 주가가 상승하거나 하락할 것이다. 주가 형성에 불리한 정보(bad news)에 의해 주가가 변동된다면 주가는 정보의 양만큼 하락한다. 그리고 새로 형성된 주가가 변동발생 초창기에는 그대로 유지되며 서서히 주가가 상승해 갈 것이다. 느리고 더디게 상승하여 평균에 회기할 것이다. 주가 상승의 정도는 미세하여 눈에 잘 띄지 않을 정도이다. 이 경우 주식을 매도하는 것이 유리하다. 이 주식을 기저자산으로 발생된 콜옵션을 보유한 투자자는 주가가 행사가격 이하로 하락한 경우 콜옵션을 매도해야 한다. 왜냐하면 옵션은 기본적으로 단기증권이고, 장기의존성 또는 장기기억이 시계열에 존재하면 하락한 가격은 단기적으로 변동하지 않기 때문이다.

이 논문에서는 주가시계열에 장기의존성이 존재하고 있는가를 검정하는데 그 목적을 둔다. 시계열의 장기의존성은 분산이 유한한 경우에 한정하여 검정이 수행되어오고 있다. 여기에서는 분산이 무한한 경우에 발생하는 시계열의 장기의존성 여부를 검정하고자 하며 이점이 기존의 다른 논문들과의 차이이다.

이 논문의 진행은 다음과 같다. 제Ⅱ절에서는 시계열의 총량화를 다룬다. 제Ⅲ절은 유한분산과 무한분산의 분포적 성질을 규명한다. 제Ⅳ절에서는 장기의존성 추정량을 제시하고 제Ⅴ절에서는 실증분석을 수행한다. 제Ⅵ절은 주가시계열의 극치와 장기의존성의 관계를 탐구한다. 제Ⅶ절에서 결론은 맺는다.

Ⅱ. 장기의존성

시계열에 장기의존성이 존재할 때 이 장기의존성을 장기기억 또는 1/f 잡음(noise)이라고 한다. 분산이 유한한 경우 장기기억은 자기공분산(자기상관)이 무척 더디게 서서히 소멸한다. 다시 말하면 진동수(frequency)가 0으로 감에 따라 스펙트럼 밀도(spectral density)는 무한으로 발산한다. 그 뿐 만 아니다. 장기기억과정은 시계열의 총량화들이 자기 닮음성(self-similarity)을 가지고 있다. 이 현상의 강도는 모수 d로 측정한다. 모수 d는 장기의존성 모수 또는 장기기억모수이다. 이 모수 d는 시계열이 정상성을 확보하고 있지 못할 때 시계열의 정상성을 만들기 위해 차분하는데 사용되는 차분모수이기도 하다.

분수적분(fractionally integrated) 자기 회귀 이동평균 (FARIMA) 과정이 장기의존성을 갖는 이동평균 과정이다. 이 이동평균은 $X_n = \Sigma_{i=-\infty}^{n} c_{n-i}\varepsilon_i$이다. 여기에서 c_k는 k가 클 때 k^{d-1}로 행동하고 ε_i는 iid확률변수로 쇄신(innovation)이다. 이 논문에서는 쇄신이 유한의 분산을 가지는 경우와 무한의 분산을 가지는 경우의 FARIMA(1, d, 1)과 FARIMA(0, d, 0)을 다루고자 한다. 분산이 유한인 쇄신의 경우로는 가우스 분포, 지수분포와 정규분포를 산정하고 분산이 무한인 경우에는 쇄신이 Pareto 분포와 안정분포를 따른다고 가정한다. 모수가 α이면 Pareto 분포와 안정분포는 $x \to \infty$에서 $P(\varepsilon > x) \sim Cx^{-\alpha}$이다. 즉 이 분포는 분포의 꼬리가 가우스 분포보다 두껍다. 모수 α는 분포꼬리의 두꺼움을 나타내는 모수이다. 분포 꼬리의 두꺼움은 승멱함수(power function)와 동일한 행동을 취하고 있으므로 서서히 더디게 감소한다. 더욱이 $\alpha < 2$이면 $\mathrm{var}[\varepsilon] = \infty$이고 $0 \le \alpha < 1$이면 $E[\varepsilon] = \infty$이다.

장기의존성의 모수는 d와 H로 표시하는 것이 보통이다. 모수 d는 FARIMA 과정에서 차분모수의 역할을 담당한다. 모수 H는 축적모수(scaling parameter)로 이 모수는 다음과 같이 그 성질을 나타낼 수 있다. 즉 길이가 N인 시계열 X_i가 주어질 때 총량화 시계열을 다음과 같이 정의하자.

$$X^{(m)}(k) = \frac{1}{m} \sum_{i=(k-1)m+1}^{km} X_i. \quad k = 1, 2, \cdots, [N/m] \tag{1}$$

위에서 [ ]는 오일러 함수이다. N/m과 m이 충분히 크면

$$X^{(m)} \overset{d}{\sim} m^{H-1}S \tag{2}$$

위에서 $\overset{d}{\sim}$ 는 분포의 측면에서 점근적으로 동일하다는 것을 의미한다. S는 X의 분포에 의존하고 m에는 의존하지 않는 과정이다. 식 (2)가 점근적 자기닮음이다. 식 (2)에 의해 축적모수 H가 정의되면 H와 d는 분산이 유한한 경우에는 다음의 관계를 가진다.

$$H = d + \frac{1}{2}$$

분산이 무한한 때에는 다음의 관계가 성립한다.

$$H = d + \frac{1}{\alpha}$$

Ⅲ. 쇄신의 분포

쇄신의 분산이 유한한 경우와 무한한 경우 시계열은 그 성질이 다르다. 유한분산과 무한분산을 나누어 모형화하고자 한다.

1. 분수 가우스 잡음

FARIMA의 준거기준이 되는 시계열이 분수 가우스 잡음(fractional Gaussian noise ; FGN)이다. FGN은 정확한 자기닮음에서 생성된다. $X = \{X_i, i \geq 1\}$가 FGN이면 식 (1)의 $X^{(m)}$은 $X^{(m)} \overset{d}{=} m^{H-1}$이다. $\overset{d}{=}$ 는 분포의 측면에서 동일함을

의미한다. FGN 시계열 $\{X_i, x\geq 1\}$은 평균이 0인 정상적 가우스 시계열로 시차 h에서의 자기공분산 함수는 다음과 같다.

$$\gamma(h)=E[X_iX_{i+h}]=\frac{1}{2}\{(h+1)^{2d+1}+|h-1|^{2d+1}\}, h\geq 0, -\frac{1}{2}<d<\frac{1}{2} \tag{3}$$

장기기억모수 d가 $d\neq 0$일 때 자기공분산은 $h\to\infty$에서 다음을 만족한다.

$$\gamma(h)\sim d(2d+1)h^{2d-1} \tag{4}$$

따라서 시차가 클 때 자기공분산은 승멱함수(power function)와 동일한 행동을 수행하며 0으로 감소한다. d가 시계열 X의 장기의존성의 강도를 측정하는 모수이다. 축적모수 H와는 $H=d+1/2$의 관계를 형상한다. 스펙트럼 밀도는 ν가 진동수일 때 $\nu\to 0$에서 다음과 같다.

$$f(\nu)=C_d(2\sin\frac{\nu}{2})^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{|\nu+2\pi k|^{2d+2}}\sim C_d|\nu|^{-2d} \tag{5}$$

위에서 C_d는 상수이다. 스펙트럼 밀도는 원점에서 승멱함수와 같은 행동을 한다. 장기의존성은 $d>0$에 대응된다. 왜냐하면 이 경우 시계열 스펙트럼 밀도가 원점에서 무한으로 발산하기 때문이다.

2. 가우스 FARIMA

가우스 FARIMA(0, d, 0) 과정은 ε_i가 평균이 0인 iid가우스 확률변수일 때 $i\geq 1$에 대하여 $X_i=\Delta^{-d}\varepsilon_i$로 정의된다. Δ는 차분작용소로 $\Delta\varepsilon_i=\varepsilon_i-\varepsilon_{i-1}$이다. 분수차분모수 d는 Δ^{-d}로 표시되며 Δ^{-d}의 전개는 다음과 같다.

$$\Delta^{-d}=\sum_{i=0}^{\infty}b_i(-d)B^i$$

위에서 B는 후진작용소로 $B\varepsilon_i=\varepsilon_{i-1}$이고 $b_i(-d)$는 다음과 같다.

$$b_i(-d) = \frac{\Gamma(i+d)}{\Gamma(d)\Gamma(i+1)}, \quad i = 1, 2, \cdots \tag{6}$$

위에서 Γ는 감마함수이다. 이 과정의 자기공분산 함수는 $-1/2<d<1/2$에 대하여 $h \to \infty$에서 다음을 만족한다.

$$\gamma(h) \sim C_d h^{2d-1} \tag{7}$$

위에서 $C_d = \pi^{-1}\Gamma(1-2d)\sin \pi d$이다. 시차가 클 때 FARIMA(0, d, 0)의 자기공분산인 식 (7)은 FGN의 자기공분산인 식 (4)와 동일한 소멸속도를 가진다. 따라서 가우스 FARIMA(0, d, 0)의 스펙트럼 밀도는 원점에서 승멱함수의 행동과 동일하다.

3. 무한분산

쇄신 ε의 분산이 무한일 때 Pareto 분포와 안정적 분포에 의해 이 시계열을 모형화 할 수 있다. 이 분포는 모수가 α로 안정분포이며 $x \to \infty$에서 다음을 만족한다.

$$P(\varepsilon > x) \sim Cx^{-\alpha} \tag{8}$$

그런데 $\alpha < 2$이면 분산이 무한이다. 대칭적 α안정적 분포는 이를 $S_\alpha(\sigma)$라고 표기하면 특성함수가 다음과 같다.

$$E[\exp(i\theta\varepsilon)] = \exp(-\sigma^\alpha |\theta|^\alpha)$$

위에서 σ는 축적모수이다. $\alpha = 2$이면 이 분포는 Gauss 분포이다. 왜도가 완전 우측인 안정확률변수는 특성함수가 다음과 같다.

$$E[\exp(i\theta\varepsilon)] = \exp[-\sigma^\alpha |\theta|^\alpha (1 - i(\sin\theta)\tan\frac{\pi\alpha}{2})]$$

위에서 $i = \sqrt{-1}$이다. 그리고 $\theta < 0$, $\theta > 0$, $\theta = 0$일 때 각각 $\theta = -1$, $\theta = 1$,

$\theta = 0$이다. Pareto 확률변수로 누적분포 함수가 다음과 같다.

$$F(x) = 1 - \frac{1}{x^{\alpha}}, \quad x \geq 1 \tag{9}$$

4. 선형 분수 안정 잡음

FGN이 정확한 자기닮음 가우스 과정이며 다음을 만족한다.

$$X^{(m)} \overset{d}{=} m^{H-1}X \tag{10}$$

X가 $\alpha < 2$로 α안정적이면 식 (10)을 만족하는 과정은 많고 선형 분수안정 잡음(linear fractional stable noise : LFSN)은 그 중 하나이다.

Ⅳ. 모수 추정 방법

장기의존성의 모수인 장기기억 모수를 추정하는 방법은 그래프 방법, R/S 방법과 비모수 방법을 비롯하여 다양하게 개발되어 있다. 여기에서는 절대값 방법, 분산방법과 Whittle 방법을 다루고자 한다. 이 방법들은 주가 시계열에 적용한 예가 거의 없어 새로운 결과를 제시할 수도 있을 것이기 때문에 다루고자 한다.

1. 절대값 방법

식 (1)의 총량화 시계열은 길이가 N인 시계열을 길이가 m인 시계열의 집합으로 분할하여 얻는 시계열이다. 원시계열을 분할하여 얻은 새 시계열의 첫째 모멘트의 절대 값을 다음과 같이 계산하자.

$$AM^{(m)} = \left(\frac{N}{m}\right)^{-1} \sum_{k=1}^{[N/m]} \left| X^{(m)}(k) - \overline{X} \right| \tag{11}$$

위에서 $X^{(m)}$은 식 (1)에서 정의된 시계열이고 $\overline{X}$는 전체 시계열의 평균이다. $X^{(m)} - E[X^{(m)}]$은 $m^{H-1}S_{\alpha,d}$와 점근적으로 동일하다. 이 때 $S_{\alpha,d}$는 α 안정적 확률변수 수열이며 LFSN이다. 특히 X가 유한의 분산을 가지면 $S_{\alpha,d}$는 FGN이다.

위의 $AM^{(m)}$은 m이 클 때 m^{H-1}의 행동을 취한다. 시계열의 쇄신의 분산이 유한할 때 H=d+1/2 이므로 $m^{H-1} = m^{d-1/2}$이다. 분산이 무한인 시계열에 있어 H는 $H = d + 1/\alpha$이다. 따라서 $m^{H-1} = m^{d+1/\alpha-1}$이다. 이 방법에 의해 추정된 모수는 H이고 d가 아니다.

그런데 m을 잇달아 변경시켜 수열 m을 얻게 되면 이에 따라 총량화 시계열 $AM^{(m)}$의 수열을 얻는다. 이 수열의 대수값을 m의 수열의 대수값에 대하여 그래프화하면 직선을 얻는다. 이 그래프의 기울기는 H-1이다. 따라서 OLS에 의하여 기울기 H-1을 얻을 수 있다. 시계열이 장기 의존성을 갖지 못하고 분산이 유한일 때 H=0.5이며 OLS에 의하여 추정한 기울기는 -1/2이다.

2. 분산방법

제1차 모멘트의 절대값 대신 표본분산을 사용하여 장기기억 모수를 추정할 수 있다. 표본 분산은 다음과 같다.

$$\mathrm{var}[X^{(m)}] = \left(\frac{N}{m}\right)^{-1} \sum_{k=1}^{[N/m]} (X^{(m)} - \overline{X})^2 \tag{12}$$

시계열 $X^{(m)} - E[X^{(m)}]$의 축적이 m^{H-1}이다. 따라서 시계열이 가우스이거나 적어도 분산이 유한이면 표본분산은 N/m과 m이 클 때 $m^{2H-1} = m^{2d-1}$에 점근적으로 비례한다. 그리고 분산은 다음과 같다.

$$\mathrm{var}[X^{(m)}] \overset{d}{\sim} C(N)m^{2H-2+1-2/\alpha}U_{\alpha/2} = C(N)m^{2d-1}U_{\alpha/2} \tag{13}$$

위에서 C(N)은 N에 의존하는 상수이다. N>>m일 때 분산 방법은 분산이 유

한이거나 분산이 무한이거나 간에 다같이 m^{2d-1}에 비례하는 확률변수를 생성시킨다.

절대값 방법에서와 같이, m에 대한 대수대수 그래프는 직선을 형성한다. 그리고 기울기는 2d-1이다.

3. Whittle 방법

주기도(periodogram)는 다음과 같이 정의된다.

$$I(\nu) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{j=1}^{N} X_j e^{ij\nu} \right|^2 \tag{14}$$

위에서 ν는 진동수(frquency)이고 i는 허수이다. 분산이 유한인 경우 $I(\nu)$는 X의 스펙트럼 밀도의 추정량이다. 장기의존성을 갖는 시계열은 스펙트럼 밀도가 원점에 근접해서 $|\nu|^{-2d}$에 비례한다. 대수대수 회귀식에 의하여 d를 추정할 수 있다. $\nu \to 0$에서 $|\nu|^{-2d}$에 대한 비례성은 분산이 무한한 경우에도 성립한다. 회귀식의 기울기는 -2d이다.

Whittle 추정량은 주기도에 터하고 있으며 다음의 함수가 중요시된다.

$$Q(\eta) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{I(\nu)}{f(\nu;\eta)} d\nu + \int_{-\pi}^{\pi} \log f(\nu;\eta) d\nu \tag{15}$$

위에서 η는 모수 벡터이고 $I(\nu)$는 주기도이다. $f(\nu;\eta)$는 진동수 ν에서의 스펙트럼 밀도이다. $f(\nu;\eta)$를 정규화하면 위 식의 둘째 항은 0으로 놓을 수 있다. 정규화는 축적 모수에만 의존한다. 따라서 정규화된 함수를 $f^* = cf$라 하면 f를 f^*로 대치할 때 $\int_{-\pi}^{\pi} \log f^*(\nu;\eta) d\nu = 0$이다.

Whittle 추정량은 함수 Q를 최소화하는 값으로 정의할 수 있다. 식 (15)를 Fourier 진동수에 대한 합으로 대체하자. 그러면 시계열이 FARIMA(0, d, 0)일 때 η가 모수 d이다. FARIMA(p, d, q)에서도 역시 η가 모수 d이다.

Whittle 추정량은 수펙트럼 밀도의 함수형을 알고 있을 때에만 사용이 가능

하다. 이 결점을 극복하기 위한 것이 총량화 Whittle 방법이다. 시계열의 총량화는 다음과 같이 수행된다.

$$X_k^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{i=m(k+1)+1}^{mk} X_i \tag{16}$$

여기에서 $X^{(m)} - E[X^{(m)}]$은 FGN에 근접한다. 그런데 이 오차는 유한분산의 경우 FGN 모형을 갖는 Whittle 추정량을 사용하여 줄일 수 있다. Whittle 추정량은 FARIMA(1, d, 1)을 가정하여 추정한다.

Taqqu and Teverovsky(1998)는 Gauss 분포 대신 지수분포와 대수분포를 사용하여 장기기억 모수를 추정해도 그 결과가 동일하다는 것을 시뮬레이션을 통하여 제시하고 있다.

V. 실증분석

시계열의 장기의존성 여부를 검정하기 위한 장기기억 모수의 추정에 사용한 데이터는 한국종합주가지수이다. 기간은 1980~2002년이며 일별지수를 사용한다. 일별 대수 수익률을 계산하여 주가시계열의 장기의존성을 검정한다. 즉 시점 t의 일별 주가지수를 P_t라 하면 일별 대수 수익률은 다음과 같다.

$$r_t = \log P_t - \log P_{t-1}$$

일별수익률의 기술 통계량이 <표 1>과 같다. 이 표에 의하여 대수수익률의 표준편차가 크고 동시에 최소수익률과 최대수익률의 격차가 상당히 크다는 것을 알 수 있다. 따라서 대수수익률은 진폭성이 상당하다.

〈표 1〉 기술통계량

평균	분산	표준편차	최소값	최대값
0.00028	0.00024	0.01560	-0.12805	0.08161

절대값 방법, 분산방법과 Whittle 방법에 의한 장기기억 모수의 추정량을 제시하면 <표 2>와 같다. 표에서 괄호안의 수치는 표준오차이다.

〈표 2〉 장기기억 모수 추정값

절대값 방법 (H-1)	분산 방법 (2d-1)	Whittle 방법 (H)
-0.4514 (0.01780)	-0.86638 (0.03547)	0.55391

절대값 방법에 의한 OLS 추정의 기울기는 H-1이다. 그리고 H=d+1/2이다. 이 관계는 다음과 같다.

$$H-1=(d+\frac{1}{2})-1=d-\frac{1}{2}$$

위 식에 의하여 장기기억 모수 d는 d=0.08486이고 H는 H=0.58486이다. $H \neq 1/2$이다. d가 -1/2 <d<1/2이고 $d \neq 0$이면 이 시계열은 장기의존성을 갖는 시계열이다.

분산방법에 있어서 OLS의 기울기는 2d-1이다. (2d-1)의 값이 0.86638이므로 d는 d=0.06681이다. 이 때 2H-2=2d-1의 관계가 형성된다. 따라서 H는 H= 0.56681이다. 여기에서도 $H \neq 1/2$이다. 이 방법에 의해서도 종합주가지수의 일별 대수수익률은 장기의존성 과정에 의하여 생성되고 있음을 알 수 있다.

총량화 Whittle 방법에 의한 장기기억모수 H의 추정은 H=0.55391이다. 그리고 d=0.05391이다. 이 통계량 역시 종합주가 지수가 장기의존성 과정에 의하여 생성되고 있음을 제시하고 있다.

Ⅵ. 극치와 장기의존성

주가시계열이 장기의존성 과정에 의하여 생성되고 있는가 또는 생성되고 있

지 않은가를 검정하였다. 기존의 연구가 쇄신의 분산이 유한한 경우에 한정하여 장기의존성 주가 과정이 검정되어 왔다. 이 논문에서는 쇄신의 분산이 유한한 경우와 무한한 경우에 다같이 적용되는 방법들을 한국종합 주가지수의 일별 수익률에 적용하여 장기기억 모수를 추정·검정하였다. 추정방법으로서는 : 분수 가우스 잡음, 가우스 분수적분 자기회기 이동평균, 선형 분수안정잡음 등이 형성되는 상황에 절대값 방법, 분수 방법과 총량화 Whittle 방법을 사용하였다.

한국종합주가지수의 일별 대수수익률의 Hurst 계수인 장기기억모수 H는 이 세 방법에서 각각 0.58486, 0.56681과 0.55391을 얻었다. $H=1/2$인 시계열은 무작위 행보(random walk)에 의해 생성된다. 따라서 종합주가지수의 대수수익은 무작위 행보를 따르지 않고 있다. 이 수익률은 오히려 장기의존성과정 또는 장기기억과정을 따르고 있음이 발견되었다. FARIMA(0, d, 0)이나 FARIMA(1, d, 1)의 차분모수인 장기기억모수 d는 이 세 방법에 의하여 각각 0.08486, 0.06681, 0.05391이다. 대수수익률의 차분모수가 정수가 아니라 분수인 실수이다. 차분모수가 $-1/2<d<1/2$에 있으므로 대수수익률의 장기의존성을 증거하고 있다. 따라서 한국종합주기지수의 일별 대수수익률은 장기의존성과정에 의하여 생성되고 있다.

나는 주가시계열이 장기기억과정 또는 장기의존성과정에 의하여 생성되고 있는가의 여부를 파악하기 위해 일련의 연구를 수행한 바 있다. 그 결과 주가가 이 과정에 의해 생성된다는 점을 발견하였다. 내가 관심을 가지고 있는 주제 중 하나가 주가시계열의 극치(extreme value)이다.

시계열이 극치과정을 따를 때 Pareto 분포나 안정적 분포에 의하여 시계열이 생성되고 이때 시계열의 쇄신의 분산은 무한인 경우가 대부분이다. 시계열의 쇄신의 분산이 무한인 경우에도, 다시 말해서 주가가 극치분포에 의해 생성되는 경우에도 장기적의존성이 존재하고 있는지의 여부가 발견되는가가 중요한 주제인 것이다. 이일균(2001, 1999a)이 제시하고 있는 바와 같이, 주가가 극치분포에에 의해 생성되고 있다는 것은 사실이므로 쇄신의 분산이 무한인 극치분포에 의해 생성되는 주가가 장기기억과정을 따르고 있는지에 대한 규명이 나에게는 시급히 요청되고 있는 주제인 것이다. 그 결과 이 논문을 쓰게 되고 동시에

쇄신의 분산이 무한인 경우에도 주가가 장기기억과정 또는 장기의존과정에 의하여 생성된다는 결과를 얻게 된 것이다.

그렇다면, 이제 또 하나의 과제가 제기된다. 그것은 극치의 발생시기를 찾아내는 방법의 발견이다. 주가가 장기의존성을 확보하고 있을 때 발생하는 극치는 그것이 음수의 극치이거나 양수의 극치이거나 상당히 더디고 느린 속도로 소멸한다. 소멸이 이루어 질 때 주가는 평균에 회귀한다. 주가가 평균회귀과정을 따르고 있는 것은 분명하다. 그러나 평균회귀 속도는 장기기억과정에서 무척 느리다. 따라서 평균회귀에 상당한 기간이 소요된다. 이런 상황 속에서는 극치의 발생시기만 발견되면 주식투자전략에 극치발생시기를 유용하게 사용할 수 있다. 주식뿐 만아니라 주가(지수) 옵션, 주가(지수) 선물 등이 투자전략에도 유용한 역할을 담당하게 된다. 따라서 극치분포와 장기기억과정의 동시분포에 대한 연구와 극치발생시기의 포착에 대한 연구가 요청되고 있다.

Ⅶ. 결　　론

이 논문에서는 주가가 장기의존성과정에 의해 생성되고 있다는 점이 발견되었다. 주가시계열의 장기의존성은 주가시계열의 쇄신의 분산이 유한한 경우뿐만 아니라 무한한 경우에도 성립하고 있음이 발견되었다. 쇄신의 분산이 유한한 경우에는 가우스 분포, 대수정규분포와 지수분포와 같은 유한분산 확률분포를 주가가 따를 때 주기시계열에 장기의존성이 존재하고 있다는 점을 의미하고 있다. 쇄신의 분산이 무한한 경우에는 분산이 무한한 안정분포에 의하여 주가가 형성될 때에도 주가시계열에 장기의존성이 존재하고 있음을 함의한다. 분산이 무한한 안정분포는 극치분포이다. 주가시계열에 극치 또는 극단값이 존재할 때 이 극치는 분포의 꼬리부분에 놓인다. 따라서 극치분포는 정규분포보다 좌우의 양쪽꼬리가 상당히 두껍다. 주가시계열에 극치가 존재한다는 것은 이 극치의 발견시기만 포착할 수 있으면 이 극치는 투자전략 수립과 실행에 매우 유용한 정보가 된다.

극치의 발상시기가 포착되면 발생시점 직전에 음수의 극치발생에서는 보유주식의 매도 또는 공매, 양수의 극치발상에서는 매수를 통하여 상당한 이익을 낼 수 있을 것이다. 주식(지수)을 기저자산으로 발행된 옵션과 선물의 투자활동에도 유용하며 즉각 사용 가능한 정보를 제공한다. 극치분포가 장기기억과정을 따르면 극치는 상당기간 변동없이 그대로 시계열 내에 존속할 것이기 때문이다. 극치가 존재하고 있으며 장기의존성 과정을 형성하고 있다는 것은 주가의 군집화현상으로 주가시계열에 나타난다. 우리나라의 주가시계열에 군집화현상이 발생하고 있다는 점이 이일균(2001)에 의해 발견된 바 있다. 이런 의미에서 주가시계열에 장기의존성이 존재한다는 발견은 중요성을 가지고 있다.

참 고 문 헌

이일균, 웨이브렛 변환과 재무시계열, 재무관리논총(재무관리학회), 제11권 제1호, (2005.2), 1-44.

이일균, 다중프랙탈 확률과정과 주가형성, 재무관리연구, 제20권 제2호, (2003.12), 95-126.

이일균, 주가의 장기적기억, 자기회귀 분수적분 이동평균과정과 주가형성, 재무관리논총(재무관리학회), 제9권 제1호, (2003.2), 95-118.

이일균, 증권시장에서 형성되는 실수적분과정 : 분수적분과정, 무작위행보과정과 평균회귀과정, 재무관리연구(재무관리학회), 제19권 제2호, (2002.12), 159-185.

이일균, 분수차분 장기기억과정과 증권의 가격결정, 재무관리연구, 제18권 제1호, (2001.6), 1-21.

이일균, 주가시계열의 성질과 특성 : 한미비교, 재무관리논총, 제7권 제1호, (2001.2), 1-48.

이일균, 충격의 확률적 장기영향과 자본시장의 구조변화, 재무관리연구, 제17권 제1호, 2000, 91-110.

이일균, 주가의 장기기억과 분수적분 일반 자기회귀 조건부 이분산, 증권학회지, 제25집, 1999, 31-70.

이일균, 쪽거리, 분수브라운 운동과정, 장기기억 및 분수적분 일반자기회귀 이분산 : 주가형성과정에 대한 한 탐구, 증권학회지, 제24집, 1999, 1-51.

이일균, 카오스 현상과 자본시장의 가격형성 메카니즘, 증권학회지, 제23집, 1998.12, 1-59.

이일균, 주가의 비선형성과 시계열적 특성, 재무관리논총, 제3권 제1호, 1996, 1-30.

이일균, 쪽거리와 장기기억, 재무관리연구, 제12권 제1호, 1995, 1-17.

이일균, Chaos와 자본시장, 재무관리연구, 제11권 제2호, 1994, 1-39.

이일균, 증권의 일별수익률과 월별수익률의 특성에 관한 연구", 증권학회지, 제11집, 1989, 199-229.

이일균, 한국증권시장의 일별주가수익률의 비동시발생성에 대한 검증, <순양 유용근 선생 회갑기념 논집/89>.

Baillie, R. T. and M. L. King, editors, "Fractional Differencing and Long Memory Processes," *Special Issue of the Journal of Econometrics*, Vol.73, No.1, July 1996.

Baillie, R. T., "Long Memory Processes and Fractional Integration in Econometrics," *Journal of Econometrics*, 73, 1996, 5-59.

Beran, J., *Statistics for Long-Memory Processes*, Chapman & Hall, New york, 1994.

Brockwell, P. J. and R. A. Davis, *Time Series : Theory and Methods*, Springer-Verlag, New York, 2nd edition, 1991.

Fox, R. and M. S. Taqqu, "Large-sample Properties of Parameter Estimates for Strongly Dependent Stationary Gaussian Time Series," *The Annals of Statistics*, 14, 1986, 517-532.

Granger, C. W. J. and Z. Ding, "Stylized Facts on the Temporal and Distributional Properties of Daily Data From Speculative Markets," *Preprint.*

Higuchi, T., "Approach to an Irregular Time Series on the Basis of the Fractal Theory," *Physica D,* 31, 1988, 227-283.

Klüppelberg, C. and T. Mikosch, "The Integrated Periodogram for Stable Processes," *The Annals of Statistics*, 1996, To Appear.

Kokoszka, P. S. and M. S. Taqqu, "Parameter Estimation for Infinite Variance Fractional ARIMA," To Appear in *The Annals of Statistics,* 1996.

Leland, W. E., M. S. Taqqu, W. Willinger, and D. V. Wilson, "On the Self-Similar Nature of Ethenet Traffic (Extended Version)," *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 2, 1994, 1-15.

Mandelbrot, B. B. and M. S. Taqqu, "Robust R/S Analysis of Longrun Serial Correlation, In Proceedings of the 42nd Session of the International Statistical Institute, Manila," *Bulletin of the International Statistical Institute*, Vol.48, Book 2, 1979, 69-104.

Robinson, P. M., "Gaussian Semiparametric Estimation of Long Range Dependence," *The Annals of Statistics*, 23, 1995, 1630-1661.

Samorodnitsky, G. and M. S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Processes : Stochastic Models with Infinite Variance*, Chapman and Hall, New york, London, 1994.

Taqqu, M. S. and V. Teverovsky, "Robustness of Whittle-Type Estimates for Time Series With Long-Range Dependence," *Preprint*, 1995.

Teverovsky, V. and M. S. Taqqu, "Testing for Long-Range Dependence in the Presence of Shifting Means or a Slowly Declining Trend Using a Variance-Type Estimator," *Preprint*, 1995.