대한수학교육학회지 <학교수학> 제 8 권 제 4 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.8, No.4, 417-439. Dec. 2006

고등학교 미적분에서의 수학화 교수·학습에 관한 연구[1)]

조 완 영*

본 연구의 목적은 프로이덴탈의 수학화 교수·학습론을 토대로 현행 고등학교 미적분 교수·학습의 문제점을 해결하기 위한 대안을 탐색하는 데 있다. 이러한 연구의 목적을 달성하기 위해 프로이덴탈의 수학화 이론과 딘즈의 개념학습의 다양성 이론의 변증법적 통합을 시도하고 이를 토대로 수학 II 미분 영역의 교과서 분석을 통해 문제점을 도출한 후, 수정된 수학화 과정에 충실한 미분계수 개념의 수학화 적분 교수·학습 자료를 개발하였다. 개발된 자료의 특징은 미분계수 개념의 역사적 근원문제인 접선문제와 속도문제를 다양한 표현도구를 이용하여 해결하는 과정에서 접선개념과 속도개념을 수학화 한 후에 미분계수 개념을 수학화하는 데 있다.

I. 서 론

미분과 적분은 수학뿐만 아니라 자연과학, 공학 그리고 사회과학 분야에서도 널리 응용되는 중요한 개념이다. 물리학의 힘, 화학의 반응률, 생물학의 박테리아 개체수의 변화율 등은 물론 경제학의 한계비용, 한계이익, 지질학에서의 용해된 상태의 바위가 열의 전도에 따라 냉각하는 비율, 지리학의 도시 중심부로부터 도시의 반지름이 늘어남에 따라 도시 내의 인구밀도의 변화율 등에서 미적분 개념이 응용된다(Stewart, 2001).

그러나 미적분학의 교육적 위기를 지적하는 연구가 많다(Orton, 1980; Steen, 1987; Tall, 1986; Artigue, 1991; 류희찬·조완영·김인수(역), 2003). 미적분학 개념이 무엇인지 알지 못한 채 정형화된 계산 문제를 해결 기능습득에 치중하고 있으며, 그 결과 학생들은 미적분 개념을 잘 이해하지 못한다(Orton, 1980; Artigue, 1991, 류희찬·조완영·김인수(역), 2003). 김정희(2004)에 따르면 미분계수, 접선의 방정식, 도함수를 구하는 알고리즘은 기계적으로 잘 해결하고 있지만 미분계수, 접선, 미분가능성, 도함수의 의미 등을 개념적으로 이해하지 못하는 학생들이 많다. 수학을 선택하고 미적분학을 한 강좌 이상 수강한 110명의 학생(60명은 고등학생, 50명은 대학생)을 대상으로 개인 면담을 이용한 Orton(1980)의 연구에서도 미적분을 수강한 학생들이 간단한 함수에 대한 도함수와 원시함수를 계산하는 대수적 알고리즘에는 상당히 능숙하지만 도함수와 적분 개념의 토대가 되는 극한 과정을 개념적으로 이해하는 것을 어려워하였다. 같은 연구에서 Orton(1980)은 수열을 직접 제시한 문제에서는 수열의 극한을 구하면서도 수열이 제시되지 않은 수열의 극한

1) 이 논문은 2003년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음.
* 충북대학교(wycho@cbu.ac.kr)

문제해결은 어려워하였으며, 할선의 극한이 접선이라는 사실을 모르는 학생이 43명이었다고 보고하고 있다.

미적분학의 교육적 위기의 원인을 두 가지 방향에서 고려할 수 있다. 하나는 미적분 개념 자체의 어려움에서 기인하는 인식론적 문제에서 비롯된 것이다. 미적분의 핵심적인 아이디어는 극한 개념이다. 미적분학의 기본 개념인 도함수와 정적분은 각각 평균변화율의 극한, 상합과 하합의 극한으로 정의된다. 극한 개념을 이해하기 위해서는 인식론적으로 잠재적 무한에서 실무한으로 이행하는 인식론적으로 매우 어려운 과정을 이해해야 한다. 미적분의 창시자라 일컬어지는 17세기의 Newton은 실무한의 존재를 인정하는 데 주저하고 극한값에 무한히 접근하는 그러나 결코 완결되지 않는 잠재적 무한 개념을 이용한 극한 방법으로 미적분을 창시하여 상당한 발전을 이루어 왔다. 그러나 이러한 방법은 그 기초론적인 위기를 맞게 되고, 많은 학자들의 시행착오를 거쳐 결국 실무한을 받아들인 Weierstrass의 ϵ-δ 방법의 도입으로 19세기가 되어서야 비로소 엄밀한 전개가 가능하게 되었다(우정호, 1998, pp. 395-396).

미적분 개념 자체의 어려움은 고등학생들이 현대적인 의미에서의 추상적이고 형식적인 미적분 개념을 어려워하는 이유가 되며, 학교수학에서 미적분을 도입하는 방법에 영향을 끼친다. 학교수학에서는 미적분 개념의 엄밀성을 경감하여 직관적인 도입을 선택하게 되고, 미적분 개념의 추상화, 형식화 과정을 생략 또는 약화시켜 형식적인 미적분 개념을 가르치려 시도하게 된다. 현재 우리나라 학교수학에서는 미적분 개념을 극한 방법으로 도입하고 있다. 극한방법에서는 실변수 h가 0으로 접근할 때 $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 즉, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$가 어떤 극한값에 접근할 경우 그 극한값을 $f(x)=\frac{dy}{dx}$로 택한다. 여기서 $\frac{dy}{dx}$는 미분의 몫이 아니라 $(\frac{d}{dx})y$의 의미이며 dx, dy는 아무 의미가 없으므로 그 몫으로 생각하지 않는다. 이러한 방법은 ϵ-δ 방법과의 연결을 의식한 방법으로 형식적이고 알고리즘적인 미적분 지도방법이다(우정호, 1998, 380-386).

학생들이 미적분 개념을 잘 이해하지 못하는 또 다른 이유는 교수학적인 문제에서 발생한다. 대부분의 경우 미적분의 주요 개념을 먼저 가르친 후 미적분에 대한 아이디어가 잠재해 있는 역사적 맥락이나 현실적 맥락을 단순히 응용의 문제로 다루고 있다. 예를 들어, 미분계수의 경우, 교과서는 일반적으로 평균속도와 평균변화율 개념을 도입한 후, 순간속도와 순간변화율에 이어 미분계수를 정의하는 방법으로 구성되며 교사의 수업도 교과서의 구성 순서에 따라 진행된다. 미분계수 개념의 수학화 과정이 생략 또는 약화되고 형식적인 정의와 계산 과정이 강조된다는 문제점이 있다. 미분계수의 역사적 근원 중의 하나인 접선 문제를 미분 계수의 정의 다음에 다룸으로써 미분계수의 수학화로서가 아닌 미분계수의 활용으로 접근하고 있다는 점도 문제가 된다.

이러한 미적분학 지도의 문제점을 해결하기 위한 방법을 프로이덴탈의 수학화 교수·학습론에서 찾을 수 있다. Freudenthal(1991)은 수학적 사고활동의 본질은 수학화에 있으며, 수학 학습지도는 기성수학을 강요하는 것이 아니라 인류의 수학 학습 과정인 수학의 발생과정, 수학화 과정을 학습자의 현재 상황에서 재발명하도록 안내하는 안내된 재발명 과정이어야 한다고 주장한다. 또한 수학의 발생과정에 따라 현실 문맥에서 심상을 구성하고 이를 바탕으로 개념의 형성으로 나아가야 함을 강조하면서, '새수학'에서와 같이 전문학자가 생각하는 추상

적인 개념을 구체화를 통해 지도하여 곧바로 개념형성을 시도하거나, 기성 수학의 위계구조에 따라 일반적인 구조에서 특수한 구조로 나아가는 것을 반교수학적 전도라고 비판한다(우정호, 2000에서 재인용). 이러한 관점에서 볼 때 미적분 개념을 먼저 가르친 후 응용을 시도하는 현재의 미적분 지도방법도 반교수학적 전도라 할 수 있다.

본 연구의 목적은 프로이덴탈의 수학화 교수·학습론을 토대로 현행 고등학교 미적분 교수·학습의 문제점을 해결하기 위한 대안을 탐색하는 데 있다. 이러한 연구의 목적을 달성하기 위해 프로이덴탈의 수학화 이론과 딘즈의 개념학습의 다양성 이론의 변증법적 통합을 시도하고 이를 토대로 고등학교 수학II의 미분 영역의 교과서 분석을 통해 문제점을 도출한 후, 수정된 수학화 과정에 충실한 미분계수 개념의 수학화 교수·학습 자료를 개발하였다.

II. 이론적 배경

1. 미적분 개념의 역사적 근원 문제

미분 개념은 기하에서의 접선 문제와 물리에서의 속도 문제로부터 발생하였다. 역사적으로 고대 그리스 시대에 접선 문제가 먼저 제기되었으며 순간속도에 대한 아이디어가 발생한 것은 14세기 이후이다. 그리스인들은 기하학적 양이나 이산적인 양을 이용하여 연속 변화 개념을 연구하지 못하였으며, 이러한 의미에서 그리스의 수학은 본질적으로 정적인 학문이라 할 수 있다. 그리스인들은 변화(variablity)보다는 형상(form)에 관심이 많았다(Boyer, 1959, p72; Kaput, 1994, pp77-156에서 재인용). 예를 들어, 디오판토스의 대수적 방정식에서 다루는 양은 변수라기보다는 상수의 의미를 갖는다.

아르키메데스는 나선(극방정식 $r=a\theta$)을 연구하는 가운데 오늘날의 미분법과 유사한 운동학적 생각으로 곡선에서 그은 접선을 발견했다고 한다. 아르키메데스는 이중의 운동 즉 좌표평면의 원점에서 일정한 속도로 멀어지는 운동과 원점을 중심으로 하는 원운동을 $r=a\theta$위의 점을 연구하면서 두 운동의 합력으로 운동의 방향(곡선의 접선)을 찾으려 했던 것으로 추측된다(양영오·조윤동(역), 2000).

나선 위의 임의의 한 점에서의 접선을 구하는 문제는 접선영(subtangent)을 이용하여 해결되었다. 접선영이란 곡선의 어떤 점 P에서 접선을 그렸을 때 선분 PT(점 T는 $T(x, f(x))$를 x축에 사영시킨 유향선분 $QT(Q(x,0))$을 말한다. 곡선의 식을 $f(x)$라 하면 접선영에 상응하는 값은 $\frac{f(x)}{f'(x)}$이며, 접선영에 대응하는 값을 구할 수 있으면 $f'(x)$를 구할 수 있다(한인기, 2003, p139).

이러한 아르키메데스의 접선에 대한 생각은 후에 극한에 대한 연구를 토대로 할선의 극한으로 일반화된다. 17세기 페르마는 극대와 극소를 구하는 방법을 연구하면서 그 결과를 접선을 구하는데 이용하였다. $y=f(x)$위의 점 $P(a,b)$에서 접선을 구할 때 곡선 위의 점 $(a+E, f(a+E))$를 점 P의 근방에 있는 점이라고 하면 이 점은 근사적으로 곡선 위의 점이자 접선 위의 점이라고 할 수 있다. 페르마의 방법에서 $E=0$이라 하면 $x=a$에서 곡선 $y=f(x)$의 기울기는 $\lim_{E\to 0}\frac{f(a+E)-f(a)}{E}$이라는 결론이 나온다. 페르마가 극한 개념을 사용하지 않았지만 페르마의 방법은 오늘날의 미분계수 개념과 거의 같다. 배로는 페르마의 방법과 유사하지만 E대신 오늘날 쓰이는 기호 Δx,

Δy로 두 양을 나타내었으며 배로의 아이디어는 뉴턴으로 이어진다.

현대 수학에서 접선은 할선의 극한으로 정의된다. 이러한 접선 개념은 '곡선과 직선이 한 점에서 만날 때 그 직선을 접선이라 한다.'는 직관적인 유클리드 접선 개념보다 더 형식화된 개념이다. 접선을 다음과 같이 정의할 수 있다.

곡선 $y=f(x)$위의 한 점 $P(a, f(a))$에서의 접선은 점 P를 지나고 기울기가

$$m=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

인 직선이다. 단, 극한값이 존재해야 한다.

13-15세기에 '모든 운동은 어떤 외적 힘의 결과'로 보던 관점에서 '모든 물체는 한번 움직이면 계속해서 운동하려는 경향이 있다'는 관성의 법칙으로 관점이 달라졌으며, 순간속도 개념을 수학적으로 정리하는 것이 가능해졌다. 스콜라 철학자들은 무게, 거리, 길이, 부피 등 크기 차원에서 변할 수 있는 양(quantities)과 밝기, 밀도, 속력 등 강도 차원에서 변할 수 있는 질(qualities)을 구분하면서 변화하는 형상(form)의 정량화를 연구하였다. 이러한 변화하는 형상에는 운동하고 있는 물체의 속도 그리고 온도가 일정하지 않은 물체의 온도 변화 같은 것이 포함된다.

과학과 수학에서 중요하고 결과적으로 미적분 개념으로 발전된 변화에 대한 연구가 본격적으로 이루어진 것은 14세기경이었다.

오렘(Nicole Oresme)은 측정할 수 있는 모든 것은 연속량으로 생각할 수 있다고 전제하고 등가속도로 운동하는 물체를 나타내기 위해 속도-시간 그래프를 그렸다. 변량을 그래프로 표현한 오렘의 방법은 새로운 시도였다. '등가속도 운동에서 속도의 그래프는 직선이 된다'는 것을 오렘은 "강도 0으로 끝나는 일정한 비정형의 성질은 모두 직각 삼각형으로 생각된다." 로 표현하고 있다. 이러한 오렘의 표현 속에는 함수의 변화 방식(곧 그 곡선의 미분)과 곡선 아래의 넓이의 변화 방식(함수의 적분)이 포함되어 있다. 오렘은 등가속도 운동의 속도(-시간) 그래프는 기울기가 일정하다는 것과 어느 한 점에서의 순간속도와 시간이 경과된 속도(평균속도) 사이의 차이를 인식하였다.

그 이후 변화하는 양과 변화 상태(변화율)에 대한 수치적 계산 연구를 거쳐 뉴턴과 라이프니츠 시대의 극한 개념 도입과 더불어 형식화된다. 뉴턴은 변화하는 수학적인 양을 유량(fluent), 변화율을 유율(fluxion)이라 명명하였다. 일정한 변화율과 일정하지 않은 변화율을 수치적으로 표현할 수 있었지만 이러한 개념에 대한 보다 엄밀한 정의는 뉴턴이 기여한 극한 개념의 도입 이후에 가능해진다. 뉴턴은 처음에는 이러한 개념에 대한 연구를 기하의 직관에 의존하였다.

수학사적으로 볼 때 변화율에 대한 기하학적 직관은 변화문제를 논의하던 초기 시도와 형식화 사이의 중간지점에 있었으며, 극한 개념은 미적분의 개념을 연구하는 과정에서 발생된 것이다. 이러한 순간속도 개념에 대한 모든 역사 발생 과정을 그대로 재현할 필요는 없지만 중요한 아이디어의 발생과 발달과정을 적절히 교육과정에 반영할 필요가 있다. 변화하는 움직임을 나타내고 이해한 다음 극한 개념을 이용하여 형식화할 필요가 있다. 극한 개념을 이용하여 순간속도 개념을 다음과 같이 정의할 수 있다.

어떤 물체가 좌표 직선을 따라 움직이며, 그 위치가 $s=f(t)$로 주어질 때, 시각 $t=c$에서의 순간속도는

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \text{ 이다.}$$

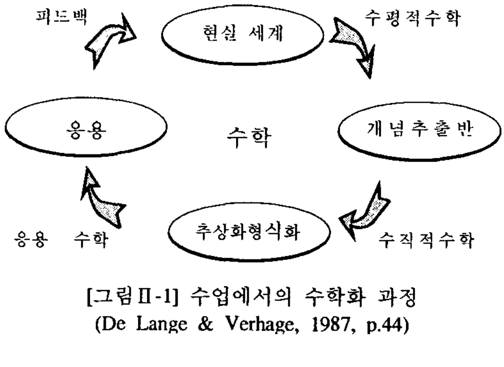
단, 극한값이 존재해야 한다.

접선문제는 기하학의 문제이고 순간속도의 문제는 역학 문제로 서로 다른 분야의 문제이지만 수학적인 미분개념의 근원문제이다. 즉, 서로 다른 맥락의 문제가 미분개념으로 수학화된 것이다. 학생들에게 현실적인 맥락문제를 통한 수학화를 주장하는 프로이덴탈의 수학화 교수·학습론이나 역사발생적 관점에 따르면 접선문제와 순간속도 문제는 미분개념의 수학화를 위한 맥락문제로 다루어져야 한다. 제7차 수학과 교육과정의 미분계수 도입과정은 순간속도(또는 순간변화율), 미분계수의 정의, 접선의 기울기 순서로 되어 있는 바, 이것을 순간속도의 정의와 접선의 기울기를 먼저 다룬 후 그 맥락의 수학화 결과로 미분계수를 도입하는 것이 자연스러울 것이다.

2. Freudenthal의 수학화 과정

수학화는 현상을 조직하는 활동이며 수학화의 기본적인 활동은 조직화 활동에서 이루어지는 정신적 활동을 의미하는 것으로 수평적 수학화와 수직적 수학화로 구분할 수 있다. Treffers(1987)는 수평적 수학화와 수직적 수학화를 문제 장면을 수학적 문제로 변형하는 과정과 수학적 체계 내에서의 처리 과정의 차이로 설명한다. 수평적 수학화란 관찰, 실험, 귀납 추론 등의 경험적 접근 방법을 통해 문제 상황을 수학적인 방법을 이용할 수 있도록 변형하는 과정 즉, 모델 형성, 도식화, 기호화를 통해 수학으로 향하는 길을 여는 것을 말하며, 수직적 수학화란 수평적 수학화 이후에 따라오는 수학적 과정, 문제를 풀고 일반화하고 형식화하는 것과 관련된 과정 즉, 수학적 처리 과정과 탐구 중인 문제 장면의 구조화 속에서의 수준 상승 과정과 관련이 있다(김용성, 2000).

수업 과정에서 수학화의 단계는 다음과 같다([그림Ⅱ-1]). 첫 단계는 문제를 수학화 하려는 관점을 가지고 직관적으로 탐구하는 단계이다. 이것은 문제의 수학적 측면들을 알아내고 규칙성을 발견하는 것을 의미하며 수학적 개념의 발견 또는 재발명으로 인도되어야 한다. 둘째 단계는 학생들 간의 상호작용, 학생들과 교사와의 상호작용, 학생들의 형식적·추상화 능력과 같은 요인들에 의존해서 현실 상황으로부터 수학적 개념을 추출해 내는 단계로 수학화 과정에 대한 반성이 필수적이다. 셋째 단계는 형식화와 추상화의 단계로 수학적 개념에 대한 기술과 엄격하고 형식적인 정의가 뒤따른다. 네 번째 단계는 개념을 새로운 문제에 적용함으로써 개념을 강화하고 일반화하는 단계이다 (De Lange & Verhage, 1987, p.44). 이러한 수학화 과정은 Freudenthal이 주장하는 '점진적 수학화 과정'을 보다 구체적으로 제시했다는 데 의미가 있다.



[그림Ⅱ-1] 수업에서의 수학화 과정
(De Lange & Verhage, 1987, p.44)

3. 프로이덴탈의 수학화 과정과 딘즈의 다양성의 원리의 종합

프로이덴탈의 수학화 교수·학습론에서 수학화 과정, 학생의 재발명을 위해 교사가 어떻게

안내할 것인지에 대한 구체적인 방법의 문제가 제기된다. 프로이덴탈은 첫째, 학습자에게 현실적인 맥락문제를 학습 상황으로 제공하여 수평적 수학화가 일어나게 하고 둘째, 수직적 수학화를 위한 도구와 수단을 제공하며 셋째, 학생과 교사, 학생 사이의 상호작용을 촉진하며 넷째, 문제해결 뿐 아니라 문제의 재발명을 포함하여 학습자 자신의 결과를 얻게하고 다섯째, 장기적인 학습과정에서 밝혀지게 될 아이디어인 학습요소를 조직할 것을 주장한다(1991, pp. 56-57, 민세영, 2002, p.62). 수직적 수학화를 위한 도구와 수단에는 다양한 표현이 포함될 수 있으며 이 부분에서 Dienes의 다양성의 원리가 적용될 수 있다.

Dienes(1971)의 다양성의 원리는 수학을 이미 완성된 기성수학 즉, 수학의 구조로 보고 전개된 이론이며, Freudenthal의 수학화 이론은 수학을 활동 중의 수학 즉, 실행수학으로 파악하고 전개된 이론이라는 점에서 두 이론은 출발점이 다르다. Dienes는 수학적 개념을 수학적 구조를 의미하는 것으로 생각하고 순수수학적 개념, 기호적 개념, 응용된 개념으로 구분한다(강완 · 백석윤, 1998). 그는 수학적 개념은 본질적으로 추상적이며 추상적 개념은 구체적인 경험과 직관에 기초하기 때문에 수학학습은 수학실험실 활동, 조작 가능한 구체물이나 수학적인 게임을 통해 이루어져야 한다고 주장하였다. 반면, 프로이덴탈은 이러한 딘즈의 이론에 따른 구체화를 통한 개념 형성 지도, '새수학'의 EIS 방법론을 '반교수학적 전도'라고 비판하고 있다.

'반교수학적 전도'란 수학을 만들어가는 과정이 중요하며 결과로서의 기성수학을 가르치려는 것은 학생들의 수학적 사고의 함양과 응용능력의 향상을 저해하며 본말이 전도된 것이라는 것이다. '새수학'처럼 수학자가 생각하는 추상적인 개념을 구체화를 통해 곧바로 개념형성을 시도하려는 것은 반교수학적 전도라 할 수 있다. 프로이덴탈의 이러한 비판은 의미가 있다. 이차방정식의 근의 공식을 유도하는 과정이나 그 의미에 대한 이해 없이 공식을 암기하여 적용하거나, 한두 가지 예를 제시한 후 곧바로 개념을 설명하는 전통적인 수업 방법은 이러한 의미에서 반교수학적 전도현상이라 할 수 있다. 새수학이 개념을 이해하면 응용을 할 수 있다는 예컨대 일반적인 전이이론을 전제로 한 것인데 반해 프로이덴탈은 응용에서 개념으로 다시 개념에서 응용으로의 과정을 강조한 것이라 할 수 있다.

이러한 딘즈 이론에 대한 프로이덴탈의 비판은 7차 수학과 교육과정의 수학적 힘의 신장이라는 목표를 달성하기 위한 측면에서 볼 때 의미가 있다. 완성된 수학을 직접 가르치는 것으로는 수학적 힘을 신장하기 어렵기 때문이다. 수학적 힘은 문제 상황을 해결하는 과정에서 수학 개념을 구성하고 이해할 때 신장될 수 있으며, 그 결과 수학의 응용능력이 향상된다. 이러한 의미에서 프로이덴탈의 수학화 교수 · 학습론의 가정을 받아들이는 것이 타당하다. 그러나 프로이덴탈의 이론이 갖는 현실적인 문제는 직관적인 탐구를 통해 수학적 개념을 추출하는 과정과 이것을 형식화 · 추상화하는 과정은 프로이덴탈이 주장하는 심상(mental object)의 구성과 반성적 사고의 중요성을 인정하더라도 매우 어려운 과정이라는데 있다. 현실적인 문제를 해결한다 하더라도 새로운 수학적 개념으로 수준 상승을 일으키기가 쉽지 않다. 따라서 이 두 과정에 대한 구체적이고 효과적인 방법이 개발될 필요가 있다. 딘즈의 다양성의 원리와 개념학습 이론에서 이 두 과정에 대한 시사점을 찾을 수 있다.

수평적 수학화 과정은 현실적인 문제 상황에서 비본질적인 요소들을 제거하고 본질인 개념

을 추출하는 과정이다. 이 과정에서 딘즈의 다양성의 원리를 접목시킬 수 있다. 딘즈(1971)는 수학적 다양성의 원리와 지각적 다양성의 원리를 주장하였다. 수학적 다양성의 원리는 수학의 일반화가 용이하도록 수학의 내용과 관련된 변수를 고정시키고, 관련 없는 변수는 다양하게 변화시키는 경험이 제공되어야 한다는 원리이다. 즉, 만일 어떤 수학적 개념이 몇 개의 변수와 관련이 있다면 그 개념을 학습자가 효과적으로 이해하기 위해 이들 변수의 다양화가 중요한 선행요건이 된다는 것이다. 예를 들어, 학생들에게 함수 개념을 지도할 때, 함수의 형태는 함수와 직접 관련되지 않은 변수이므로, 정비례, 반비례, 일차함수, 이차함수 등 다양한 형태의 함수들을 제시하는 것이 함수 개념의 구성에 도움이 된다. 수평적 수학화에서 현상을 정리하는 수단인 본질을 추출하기 위해 수학적으로 다양한 현실적인 맥락을 제공할 필요가 있다. 개념을 추출한다는 것은 다양한 맥락의 공통점을 추출하는 말과 동의어로 해석할 수 있다.

지각적 다양성 원리는 수학적 개념은 추상적인 경우가 많기 때문에, 이들 개념을 지도하기 위해서는 지각적으로는 다르지만 구조적으로 동형인 다양한 형태의 구체물을 활용해서 지도해야 된다는 원리이다. 다양한 형태의 구체물은 다양한 표현 수단을 포함한다. 예를 들어, 대응표, 그래프, 식, 함수기계, 화살표 기호 등의 다양한 표현을 활용할 때 함수 개념의 추상화가 용이해진다. 한 문제에 대해 서로 다른 표상의 사용은 학생들이 문제와 해를 해석하는 다른 관점이나 렌즈를 제공한다는 점에서 중요하다. 학생들이 수학적 지식에 대한 위력을 발휘하기 위해서는 주어진 문제 상황에 대해 다양한 방법으로 접근할 수 있는 유통성이 있어야 하며, 서로 다른 관점이나 표상 사이의 관계성을 인식할 수 있어야 한다(NCTM, 1989, p. 209). 지각적 다양성의 원리는 수평적 수학화 과정이나 수직적 수학화 과정 모두에서 유용하게 작용한다. 다양한 맥락을 해결하는 과정에서 다양한 표현이나 구체물을 이용할 수 있고 이를 관찰하여 공통점(개념)을 추출하는 것이 효과적이다.

수직적 수학화 과정은 추출된 개념을 기술하고 정의하는 형식화, 추상화하는 과정이다. 수직적 수학화 과정은 수평적 수학화 과정에 대한 의사소통과 반성적 사고를 통해 이루어진다. 그러나 형식화, 추상화 과정은 여전히 쉽지 않은 과정으로, 브루너의 EIS 이론이나 딘즈의 개념형성 단계에서 공통점 탐색 이후의 표현, 상징화, 형식화 단계를 거치는 것을 고려해 볼 수 있다. 수평적 수학화 과정에서 제시된 다양한 상황에 대한 다양한 표현들에 대한 의사소통과 반성적 사고를 통해 수직적 수학화가 이루어질 수 있다. 지금까지의 논의를 정리하면 [그림Ⅱ-1]의 수업에서의 수학화 과정은 다음과 같이 구체화될 수 있다.

첫째, 학생들에게 다양한 현실적인 맥락을 제공하고 다양한 표현활동을 통해 수평적 수학화를 유도한다. 여기서는 다양한 문제의 수학적 측면을 직관적으로 탐구하여 공통점 또는 규칙성을 찾아내는 활동을 한다.

둘째, 추출된 수학적 개념을 다양한 표현을 통해 설명하고 개념의 정의를 명확히 한다.

셋째, 재발명된 개념을 새로운 문제에 적용함으로써 개념을 강화하고 일반화한다.

넷째, 수학화의 전과정에서 수학화 활동에 대한 상호작용과 반성적 사고가 필수적으로 요구된다.

De Lange와 Verhage가 제시하는 수학화과정에서 다양한 맥락과 다양한 표현을 강조하였으며 두 번째 단계의 상호작용과 반성적 사고는

수학화 전과정에서 중요한 역할을 한다는 의미에서 네 번째 단계로 바꾸었다. 전체적인 의미는 프로이덴탈의 수학화 과정과 다르지 않지만 딘즈의 다양성의 원리를 적용하여 구체적으로 묘사하였다는 점에서 De Lange와 Verhage가 제시하는 수학화 과정과 차이가 있다. 수학적 다양성의 원리를 반영하여 다양한 현실적인 맥락을 강조하였고 지각적 다양성의 원리를 강조하여 다양한 표현활동을 강조하였다.

4. 수학화 교수 · 학습 단계

앞 절에서 논의한 새로운 수학화 과정을 토대로 수학화 교수 · 학습 단계를 '문제제기→ 직관적 탐구→ 개념추출 및 반성→ 추상화와 형식화→ 정리 및 발전'으로 구분할 수 있다(조완영 외, 2005).

첫째, '문제제기' 단계에서 학생들은 제시된 다양한 맥락의 문제를 보고 이해하며 문제 사이의 관련성을 찾아본다. 수학적으로 다양한 맥락의 문제를 포함하고 지각적으로 다양한 표현을 요구하는 문제를 제공하는 것이 중요하다. 다양한 맥락은 수학내적 맥락과 일상적인 상황, 타교과 상황을 포함하는 수학외적 맥락 모두를 포함한다. 시뮬레이션, 게임, 실험장면을 담은 동영상 자료 등 다양한 방법으로 문제를 제시하는 것이 효과적이다.

둘째, '직관적 탐구' 단계에서 문제를 분석하고 직관적으로 탐구한다. 문제의 수학적 측면을 알아내고 규칙성을 발견하며 그 결과를 다양하게 표현하는 활동이 이루어진다. 다양한 맥락의 문제들을 하나의 표현 방법을 기준으로 비교해 보기도 하고, 같은 문제의 다양한 표현 사이를 비교하기도 한다. 직관적 탐구에서는 가상의 실험과 가상의 구체물이나 대화형 시뮬레이션을 이용한 조작활동을 적극적으로 활용할 필요가 있다.

셋째, '개념 추출 및 반성' 단계에서는 '직관적 탐구' 단계의 결과를 이용하여 추출한 공통성을 비형식적, 형식적으로 표현하고 그 의미를 이해한다. 직관적 탐구 결과 도출된 공통성 사이의 논리적 관계를 조사하고 반성하여 관련 수학적 개념의 핵심을 추출한다. 다양한 표현 사이의 번역활동을 강조할 필요가 있다.

넷째, '추상화와 형식화' 단계에서 추출된 핵심 공통성을 형식적이고 수학적인 기호로 표현하고 개념을 정의한다. 앞 단계의 다양한 상황, 조작, 실험활동을 통해 직관적으로 형성된 개념이미지를 형식적인 개념정의와 연결시킨다. 수학화형 콘텐츠에서 가장 어려운 부분이 추상화와 형식화 단계이다. 개념의 공통성과 규칙성에 대한 탐색활동 결과를 다양한 표현을 통해 비교해 보고 상호작용을 통한 반성의 과정을 거치는 것이 중요하다. 기호적이고 형식적인 표현이 가능해야 하며 기존의 다른 수학적 개념과의 관계 등도 중요한 학습내용이다.

다섯째, '정리 및 발전' 단계에서는 구성된 수학적 개념을 이용하여 새로운 문제를 해결하고 다른 개념과의 관계 등을 조사하여 개념을 강화하고 일반화하는 활동이 이루어진다. 형식화, 추상화된 수학적 개념을 가지고 처음의 문제 상황을 재해석하는 활동도 이 단계에서 이루어진다. 이 단계가 가장 어려우며 개념을 형식화한 후에는 어느 정도의 연습활동이 요구된다.

각 단계는 선형적으로 진행되는 것이 아니라 각 단계 사이에 상호작용이 가능하다. 예를 들어 추상화와 형식화 단계에서 전단계인 개념추출 및 반성 단계로 돌아갈 수도 있으며 학생들의 수준에 따라 두 단계가 동시에 이루어질 수도 있다.

III. 수학II 미분영역의 교수 · 학습 자료 개발

본 장에서는 이론적 배경에서 제시한 수정된 수학화 과정에 따라 수학II 미분 영역의 교과서를 분석하고 이를 토대로 미분계수의 수학화 교수 · 학습 자료를 개발하였다. 또한 개발된 자료를 이용하여 수학화 교수 · 학습 단계에 따라 수업 전략을 제시하였다.

1. 수학II 미적분 영역의 교과서 분석

7차 수학과 교육과정 고등학교 수학II 교과서를 두 가지 관점 즉, 미분영역에서 활용된 상황 문제는 어떠한가와 다양한 표현을 활용하였는가의 관점에서 분석한다. 9종의 교과서를 대상으로 수학II 교과서의 미분개념의 도입 부분을 중심으로 분석하였다. 교과서는 A에서 I로 구분하였다.

수학 II의 내용에는 크게 대수영역, 해석영역, 기하영역 세 영역으로 구분되며 해석영역에서 함수의 극한과 연속성, 다항함수의 미분법과 적분법이 포함되어 있다(<표III-1>).

7차 수학과 교육과정(이하 7차 교육과정)에서 미적분 교육의 목적을 다음과 같이 제시하고 있다(교육부, 1998).

여러 가지 함수의 극한의 개념을 이해하고 미분법과 적분법의 개념을 이해하여 실생활에 관한 여러 가지 문제를 수학적으로 해결하는 능력과 태도를 기른다.

가. 여러 가지 함수의 극한에 관한 성질을 이해한다.
나. 여러 가지 함수의 도함수를 구할 수 있고 이를 활용할 수 있다.
다. 여러 가지 함수의 적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
라. 미분과 적분을 활용하여 실생활에 관련된 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

미적분 지도의 목적을 보면 극한 개념을 바탕으로 미분법과 적분법의 개념을 먼저 배운 후; 이를 응용할 것을 강조하고 있다. 이러한 목적에 따라 현재의 미적분 교육은 핵심개념을 이해하지 못하고 기계적으로 미분하고 적분하는 형식주의로 흐르는 경향이 있다. 즉, 미적분

<표III-1> 수학 II 다항식의 미분법의 내용

구 분	세부적인 내용
다항함수의 미분법	- 미분계수의 뜻을 알고 그 값을 구하고, 미분계수의 기하학적 의미를 이해하고, 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다.
도함수	- 함수 $y=x^n$(n은 양의 정수)의 도함수를 구할 수 있고, 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.
도함수의 활용	- 접선의 방정식을 구할 수 있고, 함수의 증가와 감소와 극대와 극소를 판정할 수 있고, 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있고, 방정식과 부등식에 활용할 수 있다. - 속도와 가속도에 관한 문제에 활용할 수 있다.

학과 미적분학 방법론의 성장을 위한 토양이 되어 온 미적분학 발생의 근원적인 문제들을 상대적으로 소홀히 다루고 형식적인 미분법과 적분법을 중심으로 교사가 설명해 주는 이론들을 단지 수용하고 있는 경향이 강한 것이다(박문환 · 민세영, 2002).

이러한 경향은 교과서의 구성과 관계가 있다. 고등학교 수학Ⅱ 교과서의 미분영역에 관한 교과서 분석결과는 다음과 같다.

첫째, 미분계수를 정의하기 전에 도입한 탐구활동에서 나타난 맥락문제는 <표Ⅲ-2>와 같다(유제훈, 2004). 6종의 교과서가 미분 개념의 역사적 근원 문제 중의 하나인 속도문제(갈릴레이의 자유낙하)를 탐구활동으로 제시하였으며 시간에 따른 방안의 온도변화, 초파리의 개체수의 변화를 맥락으로 제공한 교과서가 각 1종이었다. 현실적인 맥락 문제를 제공하지 않은 교과서도 1종이 있었다. 미분개념의 역사적 근원문제인 속도문제와 접선문제를 동시에 다룬 교과서는 없었다. 특히 두 가지 이상의 다른 맥락문제를 제시한 교과서도 없었다. 대부분의 교과서가 미분계수의 기하학적인 의미라는 차원에서 미분계수를 정의한 후에야 접선문제를 다루고 있었다. 이러한 문제는 교과서 구성상의 여러 가지 제약조건을 고려하더라도 개선될 필요가 있다. 미분계수 개념을 도입하기 위한 다양한 맥락, 적어도 두 가지 이상의 맥락문제를 탐구활동으로 제시해야 한다.

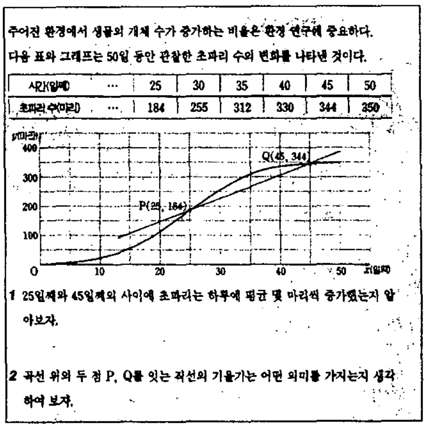
맥락문제를 해결할 때 문제 자체의 의미 즉 평균속도와 순간속도의 의미를 탐구하는 것이 중요한 데 순간속도에 대한 언급이 없이 평균속도, 평균변화율을 다룬 후 평균변화율의 극한으로서 미분계수를 정의한 교과서도 있었다. 평균속도의 극한으로 순간속도를 수학적으로 정의하려고 시도한 교과서는 거의 없었다.

둘째, 미분계수를 정의하기 위한 맥락문제로 제시된 탐구활동에서 나타난 표현을 분석한 결과 미분계수의 대표적인 세 가지 표현 즉, 수

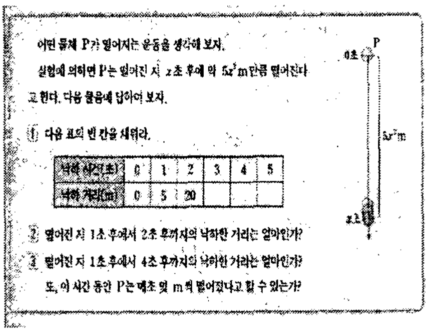
<표Ⅲ-2> 수학Ⅱ 미분계수의 도입과 활용에서 나타나는 맥락 문제

구분	미분계수	도함수의 활용
A	- 자유 낙하하는 물체의 속도	- 해머가 날아간 방향은? - 크로스컨트리 경기 - 바이오리듬 그래프 - 영화관의 최대수익
B		- 산의 높이 비교 - 리본이 그리는 곡선
C	- 자유 낙하하는 물체의 속도	- 문제풀이
D	- 자유 낙하하는 물체의 속도	- 문제풀이
E	- 자유 낙하하는 물체의 속도	- 진입로 간선도로의 교차 - 시간에 따른 기온의 변화 - 일년동안의 석유 생산량
F	- 자유 낙하하는 물체의 속도	- 문제풀이
G	- 방안의 온도 변화	- 온난화에 따른 기온변화
H	- 초파리 개체 수 증가 비율	- 이윤이 최대일 조건 - 스키 타기
I	- 속도거리 문제	- 식물의 개체 수

치적 표현, 그래프, 식을 동시에 요구한 교과서는 없었다. 평균변화율의 의미를 그래프 상에서의 기울기와 연결시키려는 시도([그림Ⅲ-1])나 상황을 표와 식을 이용하여 탐구를 유도하려는 시도([그림Ⅲ-2])가 일반적이었다.



[그림Ⅲ-1] H 교과서의 탐구활동 문제

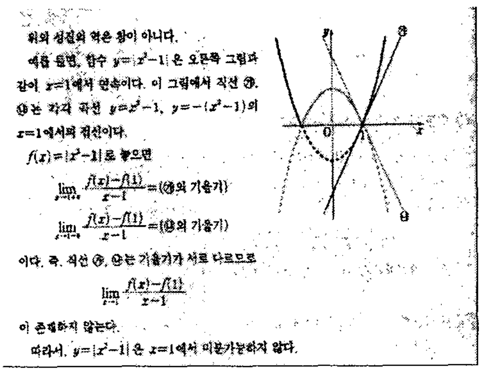


[그림Ⅲ-2] 자유낙하 상황을 이용한 탐구활동 문제

셋째, 형식적 고찰과 연역적 전개의 위험성이 내재되어 있는 교과서가 많았다. 이러한 위험성은 다양한 맥락문제를 해결한 결과로서 미분계수를 수학화하려는 노력이 부족한데서 드러난다. 예를 들어, 미분가능성과 연속성 사이의 관계에서 대부분의 교과서가 다양한 예에 대한 탐구없이 증명, 정리화한 후에 예제를 다루고 있었다. 연속이면서 미분가능한 함수와 연속이지만 미분불가능한 함수의 예를 그래프, 식을 통해 탐구한 후 학생들이 그 관계를 조직화하는 활동을 찾아보기 어려웠다. 미분가능성과 연속성의 관계를 대수적인 식은 물론 그래프 상에서의 접선과 연결시켜 설명하려고 시도한 교과서는 2종에 불과했다(<표Ⅲ-2>, [그림Ⅲ-3]).

<표Ⅲ-3> 연속과 미분가능성 사이의 관계

구 분	대수적 설명	기하적 설명
예를 들어 설명한 교과서	A, B, C, D, G	E
그래프를 활용한 교과서	F, H	I



[그림Ⅲ-3] 접선을 이용한 설명

교과서 분석결과 Freudenthal의 수학화라는 관점에서 볼 때 고등학교 수학Ⅱ 미분영역의 교과서 구성은 탐구활동의 확대 도입 등에 대한 노력에도 불구하고 다음 두 가지 이유에서 수학화 활동에 적절한 교과서 구성이라고 보기 어려웠다. 첫째, 맥락문제가 대부분 한 가지만 제시되어 있었다. 둘째, 다양한 표현을 활용하여 미분계수의 수학화를 지원하려는 교과서가 거의 없었다.

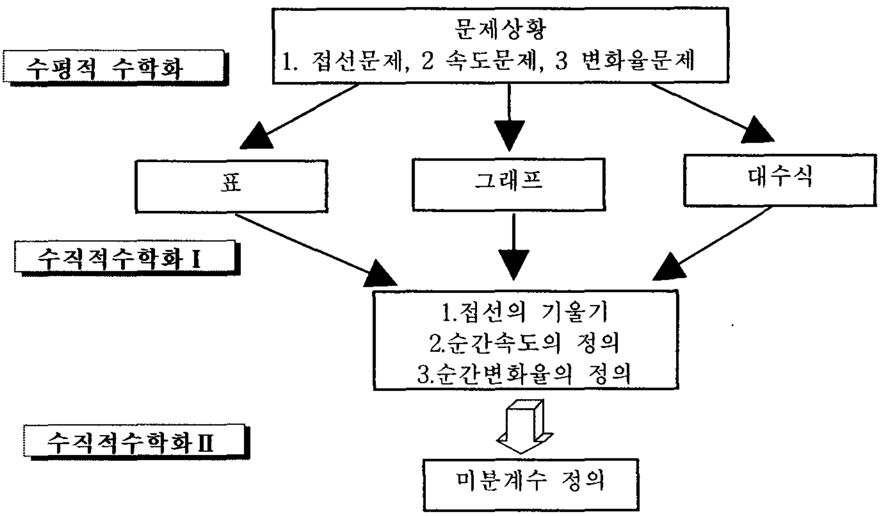
2. 자료개발의 방향

수학Ⅱ 미적분 영역의 교과서 분석과 프로이덴탈의 수학화 과정과 딘즈의 다양성의 원리를 적용한 고등학교 수Ⅱ미적분 영역의 교수·학습 자료 개발 방향을 다음과 같이 정리할 수 있다.

첫째, 학생에게 현실적인 맥락 문제를 다양하게 제시한다. 학생 주변의 다양한 현실 상황을 바탕으로 한 과제를 통해 학생들이 스스로 학습 내용을 재발명 할 기회를 제공하도록 한다. 예를 들어, 미적분 개념의 역사발생적 근원 문제인 접선문제, 속도문제를 비롯하여 산의 능선이나 온도의 변화 등 실생활의 구체적인 상황을 제시하여 미분계수의 의미를 충분히 이해할 수 있도록 한다. 미분가능성과 연속성 사이의 관계에서는 학습 결과로 학생들에게 현실적인 맥락이 된 미분계수의 그래프 상의 의미와 대수적 식을 다양하게 제시하여 그 관계를 조직화할 수 있도록 한다.

둘째, 현실적인 문제상황을 해결할 때 다양한 표현을 이용하고 학생의 능동적인 탐구를 유발할 수 있도록 하는 과제를 개발한다. 다양한 표현 사이를 연결하고 비교, 번역할 수 있는 활동 과제를 개발하는 것이 중요하다. 수학의 탐구적·실험적 자세는 수학의 발명·발견 과정에서 매우 중요다. 학생들은 스스로 수학적 세계를 탐구할 때, 자신의 수학적 능력을 더 강화시킬 수 있다. 예를 들어, 연속성과 미분가능성 사이의 관계를 연역적으로 설명하는 것이 아니라 다양한 예를 통해 학생들이 관계를 재발명하고 이를 증명할 수 있도록 한다.

셋째, 미적분 개념이 다른 여러 분야에 응용될 수 있음을 인식할 수 있는 과제를 제시한다. 미분계수의 수학화 이전 또는 이후의 활동 과제로 순간속도와 접선 뿐만 아니라 경제학 문제, 화학의 반응률, 생물의 개체 수의 변화율, 온도변화 등 다양한 상황의 응용문제를 제공한다. 미적분의 유용성을 인식하고 수학에 흥미를 느낄 수 있도록 하는데 중요하다.



[그림Ⅲ-4] 미분계수의 수학화 과정

넷째, 미적분 개념 자체의 어려움을 반영하여 수학적 시각화를 도울 수 있는 과제를 개발한다. 그래픽 계산기 등 탐구도구를 이용하여 시각화 자료의 역동성을 관찰할 수 있도록 하는 것이 중요하다. 교과서에 제시된 것처럼 두 점이 서로 가까워질 때 그 할선의 기울기가 접선의 기울기로 가까이 간다는 사실을 그림만 가지고 이해하는 것이 아니라, 그래픽 계산기를 이용해서 실제로 여러 개의 할선의 기울기를 구하여 보고 그래프를 그려봄으로써 할선이 점점 접선과 가까이 간다는 사실을 시각적으로 확인하고 경험할 수 있도록 한다. 기호로 된 수학적 지식을 형식 논리적으로 지도하는 방법과는 달리 그래픽 계산기의 확대 · 축소(zoom) 기능을 비롯한 다양한 기능을 최대 활용하여 역동적인 시각화를 통해 미적분에 대한 학생들의 이해를 보다 쉽고 재미있게 하도록 한다.

3. 미분계수의 수학화 자료개발의 실제

본 연구에서는 프로이덴탈의 수학화 과정과 딘즈의 다양성 이론를 토대로 고등학교 수학II의 미적분 영역의 수학화 교수 · 학습 자료를 개발하였다. 미분계수의 수학화에 관한 자료를 중심으로 개발하였다. 현실적인 맥락문제의 제공과 다양한 표현을 통한 수평적 수학화와 수직적 수학화, 그리고 응용의 수학화에 관한 자료의 예를 부록에 제시하였다. 수직적 수학화 직후의 형식화와 연습을 위한 자료는 대부분의 교과서에서 잘 예시하고 있기 때문에 이에 대한 자료는 개발하지 않았다.

미분계수의 경우 현실적인 맥락문제로 접선문제, 속도문제, 변화율 문제를 제시하였다. 각각의 경우 접선의 기울기, 순간속도(순간변화율) 개념의 수학화가 이루어진 후 이를 토대로 미분계수의 수학화가 이루어진다([그림III-4]. 각 수학화 과정에서 미분개념과 관련된 다양한 표현 활동 즉, 그래프, 수치적, 대수적 표현을 모두 활용하도록 하였다(<부록> 참조). 미분계수를 정의하기 전에 접선의 기울기와 순간속도를 정의하는 활동을 제시하였으며 각 활동에서 다양한 표현과 표현사이의 번역을 요구하였다. 기타의 변화율 문제는 본 연구에는 포함시키지 않았다. 할선의 극한으로 접선을 정의하고 평균속도의 극한으로 순간속도를 정의한 후 공통점을 찾아 평균변화율의 극한으로서의 미분계수 또는 순간변화율을 정의하도록 하였다.

본 연구에서 제시한 수학화 자료가 최선이라는 의미는 아니며 다양한 맥락문제와 다양한 표현을 활용한 미분계수의 수학화 자료 구성 방식을 제안하였다는 데 본 논문의 의미가 있다.

IV. 논의 및 결론

본 논문은 프로이덴탈의 수학화 교수 · 학습론과 딘즈의 개념학습의 다양성 원리를 바탕으로 수학화 활동에 기초한 미적분 교수 · 학습에 관한 연구의 일부이다. 다양하게 응용되는 미적분 개념의 중요성을 인식하고 수학화의 관점에서 미적분 교수 · 학습의 문제점을 해결하고자 하였다. 본 글에서는 자료개발의 예를 제시하였다.

미분과 적분은 수학뿐만 아니라 자연과학, 공학 그리고 사회과학 분야에서도 널리 응용되는 중요한 개념으로 고등학교와 대학 교육과정에서 핵심적인 위치를 차지하고 있다. 그러나, 최근에 미적분 개념의 의미를 이해하지 못한 채 알고리즘 중심의 미적분 계산교육에 대한 문제점이 계속 제기되고 있다. 이러한 미적분 교육의 위기는 인식론적인 문제와 교수학적 문제로 구분할 수 있으며 본 연구는 프로이덴탈

의 수학화 교수 · 학습론과 딘즈의 개념학습의 다양성 원리를 바탕으로 수학화 활동에 기초한 미적분 교수 · 학습 방법이 교수학적인 문제로 야기되는 미적분 교육의 위기를 해결할 수 있다는 가정하에 이루어졌다.

본 연구의 주요 내용은 첫째, 고등학교 수학 II의 미적분 영역의 교과서 분석을 통해 문제점을 도출하며, 이를 토대로 둘째, 수정된 수학화 과정에 충실한 미적분 교수 · 학습 자료를 개발하고 개발된 자료를 이용한 수학화 교수학습 과정을 구성하는 것으로 연구 결과는 다음과 같다.

1. 고등학교 수학 II 미적분 영역의 교과서 분석 결과

고등학교 수학II 교과서의 미분영역에 관한 교과서 분석결과는 다음과 같다.

첫째, 미분계수를 정의하기 전에 도입한 탐구활동에서 미분 개념의 역사적 근원 문제인 접선문제와 속도문제를 동시에 제공한 교과서는 없었다.

둘째, 다양한 표현을 이용하여 개념 추출을 유도하려는 노력이 나타났지만 미분계수의 대표적인 세 가지 표현 즉, 수치적 표현, 그래프, 식을 동시에 요구한 교과서는 없었다.

셋째, 성급한 형식화로 인한 형식적 고착의 위험성이 내재되어 있으며 연역적 전개를 시도한 교과서가 많았다. 형식적 고착의 위험성은 다양한 맥락문제를 해결한 결과로서 미분계수를 수학화하기 위한 노력이 부족한데서 드러난다.

2. 교수 · 학습 자료 및 방법 개발

교수 · 학습 자료는 미분 개념을 중심으로 개발하였다. 미분계수의 경우 현실적인 맥락문제로 접선문제, 속도문제, 변화율 문제를 제시하였으며, 각각의 경우 접선의 기울기, 순간속도(순간변화율) 개념의 수학화와 이를 토대로 미분계수의 수학화가 이루어진다(<그림III-4>). 각 수학화 과정에서 미분개념과 관련된 다양한 표현 활동 즉, 그래프, 수치적, 대수적 표현을 모두 활용하도록 하였다. 미분의 응용의 수학화 과제는 일반적으로 교과서에 제시되어 있지 않은 경제학 문제와 과학 문제들을 중심으로 개발하였다.

프로이덴탈의 수학화 교수 · 학습론을 토대로 개발된 자료를 활용한 교수 · 학습 과정을 설계할 때 다음 세 가지를 가정할 수 있다.

첫째, 프로이덴탈의 수학관은 결과적 지식체계로서의 기성수학보다 수학화 활동 과정으로서의 실행수학을 선호한다. 이러한 프로이덴탈의 입장은 수학은 절대적으로 확실하며 객관적으로 존재하는 완전한 지식체계이며 상기, 곧 발견을 통해 알게 된다는 전통적인 플라톤적인 수학관과 다르다.

둘째, 프로이덴탈의 수학화 이론에 근거한 수학 교수 · 학습관은 문제해결을 통한 수학적 지식의 수학화활동을 강조한다. 프로이덴탈이 주장하는 수학화 활동에는 형식화, 국소적 조직화, 공리화는 물론 관찰, 실험, 귀납, 유추, 시행착오, 추측, 일반화, 도식화, 추상화, 기호화, 정의하기, 알고리즘화, 패턴화, 구조화, 추론, 분석, 증명, 반성적 사고, 관점의 전환, 재구조화, 구체화, 모델링 등 모든 수학적 사고 활동이 포함된다(우정호, 2000). 프로이덴탈의 수학화 과정에서 중요한 요소가 심상을 구성하고 심상을 의식적으로 개념화하는 것이며 이 과정에서의 반성적 사고이다.

셋째, 프로이덴탈의 수학화 교수 · 학습 방법을 지속적으로 경험한 학생이라고 가정하면 학

생들은 자신들에게 현실적인 맥락문제를 능동적으로 해결하고 자신들의 수학적 활동을 반성하여 수학적 개념을 정의하는 활동을 선호한다고 생각할 수 있다.

앞으로 다음 두 가지에 보다 많은 관심을 기울일 필요가 있다.

첫째, 프로이덴탈의 수학화 이론과 딘즈의 다양성 이론 사이의 변증법적 관계에 대한 보다 분석적인 이론연구가 요구된다.

둘째, 본 글에서 개발된 또는 본 글에서 제시된 방향에 따라 자료를 개발한 후 이를 이용한 교수실험이 필요하다. 교수실험의 목적은 두 가지 측면에서 생각할 수 있다. 하나는 수업 후에 학생들이 미적분에 대한 개념적 이해에서의 변화가 어떻게 일어나는지를 알아보는 것이고 다른 하나는 본 연구에서 개발된 자료와 수업 방법을 수정하는 것이다. 실제 교수실험에 많은 관심을 가져야 할 것이다.

참고문헌

강완 · 백석윤(2002). **초등수학교육론**. 서울: 동명사.

교육부(1998). **수학과 교육과정**. 서울: 대한교과서주식회사.

김용성 (2000). **문제상황을 기초로 한 수학화 경험이 수학적 신념과 문제해결력에 미치는 효과**. 석사학위논문, 한국교원대학교 대학원.

김정희 · 조완영(2004). 고등학교 학생들의 미분개념의 이해 및 오류유형 분석. **수학교육논총, 26,** 489-508. 대한수학교육학회.

김정희(2005). **고등학생들의 미분개념의 이해 및 오류유형 분석**. 충북대학교 교육대학원 석사학위논문.

박두일 외(2002). **고등학교 수학 II**. 서울: 교학사.

박문환 · 민세영(2002). 역사발생적 관점에서 본 미적분 지도. **학교수학 4(1)**, 49-62. 대한수학교육학회.

민세영(2002). **역사발생적 수학 학습-지도 원리에 관한 연구**. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

_______(1997). **역사발생적 원리에 다른 중등학교 수학교재 구성에 관한 연구**. 서울대학교 석사학위논문.

우정호(2000). **수학 학습-지도 원리와 방법.** 서울대학교출판부.

_______(1998). **학교수학의 교육적 기초.** 서울대학교출판부.

유제훈(2004). **고등학교 II 미분영역의 교과서 분석.** 충북대학교대학원 석사학위 논문

정영옥(1997). **Freudenthal의 수학화 학습 지도론 연구**. 박사학위논문, 서울대학교 대학원.

조완영(2002). **수학수업 설계모델과 교사의 역할에 관한 연구.** 학습자중심교과교육연구 제2호.

______(2004). 고등학교 미적분에서의 수학화 교수-학습에 관한 연구. **수학교육학논총, 26**, 433-455. 대한수학교육학회.

조완영 · 강신천 · 김남균 · 김남규 · 김정희 · 정보나 · 마은경 · 장상현(2006). **사이버가정학습 학습주제별 콘텐츠 유형 적용 방안 연구-수학과- 연구보고 CR 2006-3.** 한국교육학술정보원.

한인기(2003). **교사를 위한 수학사.** 서울: 교우사.

Artigue, M. (1991). Analysis. In D. Tall (Ed.) *Advanced mathematical thinking,* (167- 198). Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Boyer, C. B. & Merzbach, U. C. (2000). **수학**

의 역사 · 상. (양영오 · 조윤동, 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1989년 출판).

Courant, R. & Robbins, H. (1996). *What is mathematics?* London: Oxford University Press.

de Lange, J. (1987). *Mathematics-insight and meaning.* Utrecht: OW & DC.

de Lange, J., & Verhage, H. B. (1987). Math A and achievement testing. *Proceedings of the 11th International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* 3, 243-248.

Dienes, Z. P. (1967). *Buildings up mathematics.* London: Hutchinson Educational Ltd.

__________(1971). An example of the passage from the concrete to the manipulation of formal systems. *Educational Studies in Mathematics 3.* Dordrecht: D. Riedel Publishing Co.

Fredenthal, H.(1973). *Mathematics as a educational task.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Co.

________(1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht : D. Reidel Publishing Company

________(1991). *Revisiting Mathematics Education,* Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Kaput, J. (1994). Democratizing acess to calculus: New routes to old roots. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving,* pp. 77-157. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

NCTM (1992). **수학교육과정과 평가의 새로운 방향.** (구광조 · 오병승 · 류희찬, 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1989년 출판).

Orton, A. (1980). *A cross-sectional study of the understanding of elementary caclulus in adolescents and young adults.* Ph. D. Thesis. Leeds University, U.K.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistemologicues realtifs a la notion de limite. *Recheres en Didactique des Mathematiques, 6*(1).

Simon, M. (1997). Developing new models of mathematics teaching: an imperative for research on mathematics teacher development. In E. Fennema & B. S. Nelson (Eds.), *Mathematics teachers in transition* (pp. 55-86). NJ: Lawernce Erlbaum.

Steen, L. A. (1987). Calculus for a new century: a pump, not a filter. *Mathematical Association of America.*

Stewart, J. (2001). *Calculus.* Albert Complex: Brooks/Cole. 수학교재편찬위원회(역) (2002). 미분적분학. 서울: 청문각.

Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking.* Kluwer Academic Publishers. 류희찬 · 조완영 · 김인수(역) (2003). 고등수학적 사고. 서울: 경문사.

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: a synthesis of the reacher. In D. A. Grouws(Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning,* pp. 127-164. New York: Macmillan Publishing Company.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics education-The Wiscobas project.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

A Study on Mathematizing Teaching and Learning in Highschool Calculus

Cho, Wan Young (Chungbuk National University)

Many studies indicate the emerging crisis of education of calculus even though the emphasis of calculus have been widely recognized. In our classrooms, the education of calculus also has been faced with its bounds. Most instructions of calculus is too much emphasis on the algebraic approach, thus students solve mathematical problems without truly understanding the underlying concept.

The purpose of this study is to develop mathematization teaching and learning materials and methods in caculus based on the mathematization teaching and learning theories by Freudenthal and the variability principles of conceptual learning by Dienes,

In order to this purpose, first, we analyzed the high school mathematics II textbook of 7th curriculum in Korea. Second, we developed mathematization teaching and learning materials and methods in highschool calculus.

Consequently, the following conclusions have been drawn:

we have reorganized and reconstructed the context problem in calculus based on concepts of tangent line and instantaneous rate of change.

* key words : mathematising teaching and learning methods(수학화 교수학습 방법)
variability principles of conceptual learning(개념학습의 다양성 원리)
highschool calculus(고등학교 미적분학)

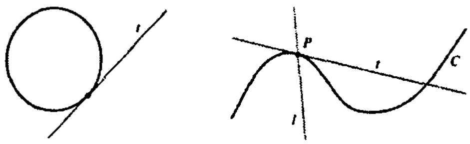
논문접수 : 2006. 9. 29
심사완료 : 2006. 10. 31

<부록> 미적분 영역의 수학화 과제

1. 접선이란 무엇인가?

생각열기

1. 다음 그림 (a)는 원에 그은 접선을 나타낸 것이다. 그림 (b)는 곡선 C 상의 한 점 P에서 그은 두 직선 l과 t를 나타낸 것이다. 원에서의 접선의 정의를 말해 보고 이 정의가 일반적인 곡선에서의 접선의 정의를 적절한지를 알아보자.



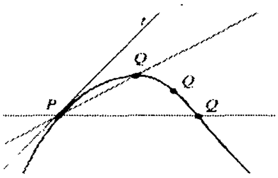
(a) (b)

(1) l과 t중 어느 직선이 접선인가? 그 이유는?

(2) (1)에서의 접선인 이유와 원에서의 접선의 정의를 비교하여라.

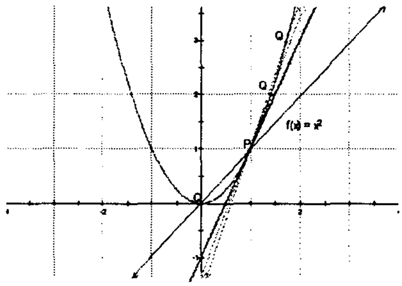
활동1: 할선과 접선

생각해 보기에서 원에서의 접선의 정의가 일반적인 곡선에서의 접선의 정의로 적합하지 않음을 알아 보았다. 다음 그림을 보고 곡선 위의 한 점 P에서의 접선이 무엇을 의미하는지를 토론해 보자.(그래픽 계산기를 이용하여 직접 그려보거나 점 Q의 역동성을 보여줄 수 있는 멀티미디어 자료를 활용하면 효과적임)



1. 할선의 기울기를 이용하여 접선의 기울기를 구할 수 있다. 여러 가지 방법으로 포물선 $y=x^2$ 위의 점 (1, 1)에서의 접선의 방정식을 구해보자.

(1) 구하는 접선의 기울기를 알면 접선의 방정식을 구할 수 있다. 다음 그림을 보고 접선의 기울기를 구하는 방법을 설명하여라.



(2) 위 그림에서처럼 포물선 $y=x^2$위의 점 $P(1,1)$ 근방에 있는 점 $Q(t,t^2)$을 잡았다고 하자. 다음 표와 같이 $P\neq Q$이도록 $t(t\neq 1)$의 값을 잡았을 때, 할선 PQ의 기울기 m_{PQ}를 구하고 이것을 이용하여 접선의 기울기 m을 추측하고 $\lim_{t\to 1}\frac{t^2-1}{t-1}$의 극한값과 비교하여라.

t	m_{PQ}	t	m_{PQ}
2	3	0	1
1.5		0.5	
1.1		0.9	
1.01		0.99	
1.001		0.999	

(3) 포물선 $y=x^2$ 위의 점 (1, 1)에서의 접선의 방정식을 구하여라.

(4) 점 $P(2,4)$와 $Q(2+\Delta x, (2+\Delta x)^2)$에 대하여 할선 PQ의 기울기를 구하고 이를

이용하여 $y=x^2$위의 점 (1, 1)에서의 접선의 방정식을 구해 보아라.

2. 다음 물음에 답하여라.

(1) 점 $P(1,1)$은 곡선 $y=\frac{1}{x}$위의 점이다.

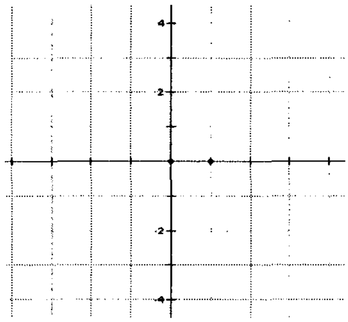
① $Q(t,\frac{1}{t})$일 때 t의 값에 따라 할선 PQ의 기울기 m_{PQ}가 달라진다. 다음 표를 완성하여라.

t	m_{PQ}	t	m_{PQ}
2			
1.1		0.9	
1.01		0.99	
1.001		0.999	

② ①의 결과를 이용하여 곡선 위의 점 $P(1,1)$에서 접선의 기울기 값을 추측하여라.

③ ②의 기울기를 이용하여 점 $P(1,1)$에서 접선의 방정식을 구하여라.

④ $y=\frac{1}{x}$과 ③에서 구한 접선의 그래프를 그려라.



3. 1000갤런(gallon)의 물이 들어 있는 탱크에서 30분 동안 탱크의 아래에 있는 꼭지를 통해 바닥 아래로 흘러 나간다고 한다. 다음 표와 그래프는 t분 후 탱크에 남아있는 물의 부피 V를 나타낸 것이다. 다음 자료는 조사에 의한 자료로 $t-V$ 사이의 관계에 대한 함수식을 구하기 어려우며, 매시간 남아있는 물의 양을 조사하는 것도 현실적으로 불가능하다. 그렇지만 이러한 경험적인 자료를 해석하는 데 수학이 유용하게 이용될 수 있다.

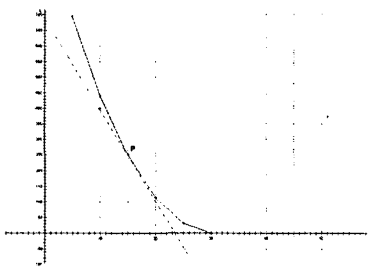
아래 물음에 답하여라.

시간(t)(분)	5	10	15	20	25	30
남은 물(V)(갤런)	694	444	250	111	28	0

(1) 점 $P(15, 250)$에 대하여 그래프 위의 점 Q가 $Q(10,444)$, $Q(20,111)$일 때 할선 PQ의 기울기를 구하고 그 의미를 설명하여라.

(2) (1)의 결과를 이용하여 점 P에서의 접선의 기울기의 근사값을 구하고 그 물리적인 의미를 설명하여라.

(3) (2)에서 구한 접선의 기울기를 이용하여 접선의 방정식을 구하여라.



활동2: 접선의 정의

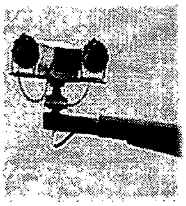
4. 1-4의 활동 결과를 토대로 $y=f(x)$위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선을 정의하고 표, 그래

프, 식을 이용하여 설명하여라.

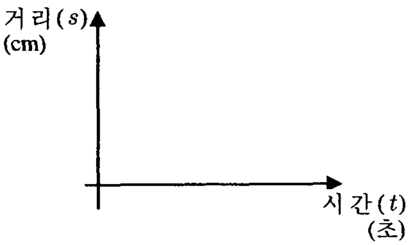
2. 순간속도란 무엇인가?

생각열기

다음 그림은 고속도로 등에서 쉽게 볼 수 있는 무인단속카메라의 모습이다. 자동차의 과속을 단속할 때 일반적으로 무인단속카메라와 이동카메라(스피드건speed gun)를 이용하며, 무인단속카메라는 이동카메라와 달리 고정되어 있다. 이로 인해 두 카메라의 속도 측정 방법은 서로 다르다. 자동차의 속도를 측정하는 방법의 차이는?

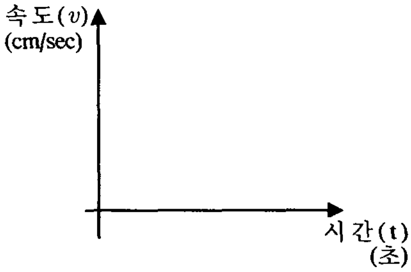


1. 다음 그림은 일정한 방향으로 운동을 하는 장난감 기차를 0.1초 간격으로 찍은 다중 섬광 사진이다. 다음 좌표평면에 그래프를 그려보아라.



(1) 위치-시간 사이의 관계식과 각 구간의 평균속도를 구하여라.

(2) 시간-속도 사이의 관계를 식으로 나타내고 그래프를 그려라. 어떤 운동인가?



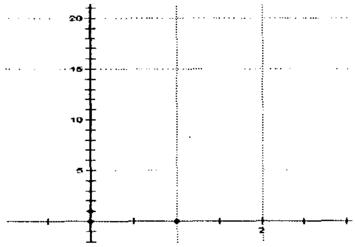
(3) 기차가 찍힌 각 구간의 평균가속도는 각각 얼마인가?

활동1: 자유낙하 운동

1. 4세기 전 갈릴레오는 자유낙하에 의한 물체의 낙하거리는 떨어지는 시간의 제곱에 비례한다는 사실을 발견하였다. 이 때, 공기저항은 무시하며 비례상수는 중력가속도 g이다. 만약 t초 후의 낙하거리를 $s(t)$라 하면 갈릴레오의 법칙은 $s(t)=\frac{1}{2}gt^2$(g는 중력가속도로 $g=9.8m/sec^2$라 하자)으로 나타낼 수 있다.

서울 여의도에 있는 63빌딩 옥상에서 농구공을 떨어뜨린다고 할 때 다음 물음에 답하여라.

(1) 공이 떨어질 때, 시간에 따른 낙하거리를 구하는 식을 쓰고, 그래프를 그려라. 5초에서 6초 사이의 평균속도를 구하여라.



(2) 다음 각 구간에서의 평균속도를 구한 후, $t=5$에서의 순간속도를 추측하여라.

시간구간	평균속도(m/s)
$5 \leqq t \leqq 5.1$	
$5 \leqq t \leqq 5.05$	
$5 \leqq t \leqq 5.01$	
$5 \leqq t \leqq 5.001$	

(3) 시간-거리 함수를 나타내는 식은 $s(t) = \frac{1}{2}gt^2 = 4.9t^2$이다. 5초 후의 속도를 구할 때 한 순간($t=5$)을 다루어야 하는데 순간을 나타내는 시간 구간이 없다는 어려움이 있다. 그러나, 시간이 Δt 만큼 흐르는 동안 이동한 거리를 이용한 평균속도를 이용하여 구할 수 있다.

① 구간 $5 \leqq t \leqq 5+\Delta t$에서의 평균속도를 식으로 나타내고 그 식을 이용하여 $t=5$에서의 순간속도를 구하는 방법을 설명하여라.

② ①의 결과를 이용하여 $t=5$에서의 순간속도를 구해보고 (2)의 추측과 비교하여라.

(4) 다음은 $s=4.9t^2$의 그래프를 $t=5$ 근방에서 확대한 것이다. $5 \leqq t \leqq 5+\Delta t$에서의 평균속도와 $t=5$에서의 순간속도의 의미를 그래프를 이용하여 설명하여라.

활동2: 접선의 정의

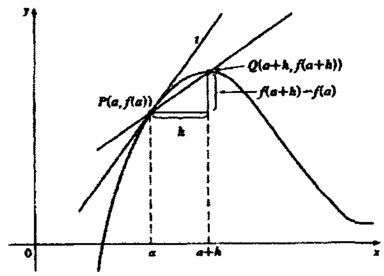
2. 활동1의 결과를 토대로 시간에 대한 거리의 함수 $s=f(t)$에서 시각 $t=c$에서의 순간속도를 정의하고 표, 그래프, 식을 이용하여 설명하여라.

3. 미분계수란 무엇인가?

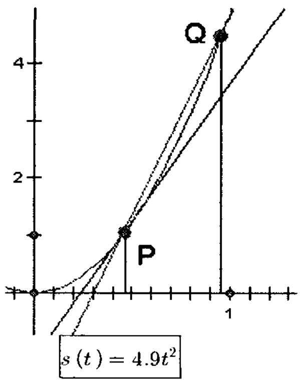
생각열기

1. 접선의 기울기는 할선의 기울기의 극한으로, 순간속도는 평균속도의 극한으로 정의하였다. 아래 물음에 답하여라.

(1) 다음은 $y=f(x)$의 그래프이다. $P(a, f(a))$와 $Q(a+h, f(a+h))$일 때 할선 PQ의 기울기와 점 $P(a, f(a))$에서 그은 접선 t의 기울기를 구하여라.



(2) 정지된 상태에 있던 물체가 자유낙하를 시작하여 t초 동안 떨어진 거리를 sm라고 하면 갈릴레오 법칙에 따라 $s(t)=4.9t^2$인 관계가 성립한다. 물체가 낙하하기 시작한 후 a초에서 $a+h$사이의 평균속도와 a초가 지난 순간의 속도를 구하여라.



(3) (1)과 (2)의 차이점과 식, 그래프에서의 공통점을 설명하여라.

활동1: 미분계수의 정의와 의미

1. 접선의 기울기와 순간속도는 수학적 개념 미분계수의 다른 표현이다. 함수 $y=f(x)$에 대하여 $x=a$에서의 순간변화율 또는 미분계수를 정의하여라.
2. 함수 $f(x)=x^2-3x$에 대하여 다음을 구하여라.

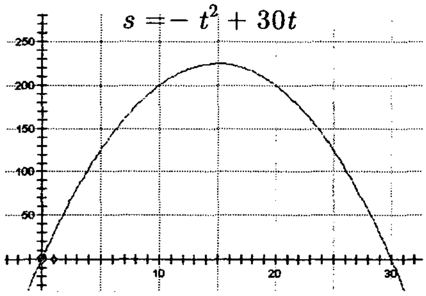
(1) $f'(0)$

(2) $x=1$에서의 미분계수

(3) $(2,-2)$에서의 접선의 기울기

3. 시간 t초와 레일의 길이 s m에 대하여 어떤 놀이 공원의 청룡열차는 다음의 관계에 따라 움직인다고 한다. 아래 물음에 답하여라.

$$s=-t^2+30t$$



(1) 5초 후의 청룡열차의 순간 속도를 구하여라.

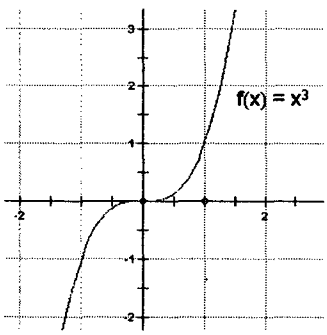
(2) $s=-t^2+30t$는 포물선으로 그래프는 위와 같다. 곡선 위의 점 $(15,220)$에서의 접선의 기울기를 구하고 접선의 기울기의 물리적인 의미를 설명하여라.

(3) 그래프를 보고 속도가 +인 구간과 −인 구간을 구하고 그 이유와 의미를 설명하여라.

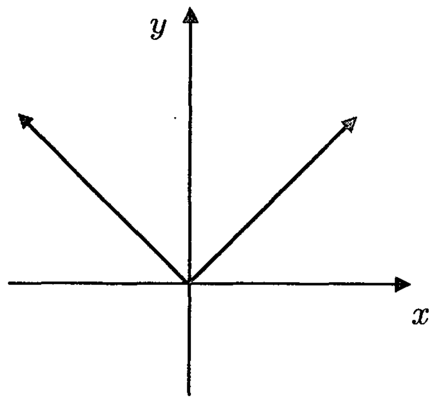
(4) 청룡열차의 운동에 대하여 설명하여라.

활동2: 미분가능성이란?

1. 다음은 ① $f(x)=x^3$과 ② $f(x)=|x|$의 그래프이다. 아래 물음에 답하여라.



① $f(x)=x^3$의 그래프



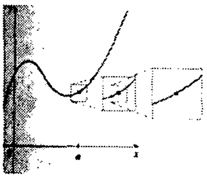
② $f(x)=|x|$의 그래프

(1) $x=0$에서의 접선을 그려라. 접선을 그릴 수 있는가? 이유를 설명하여라.

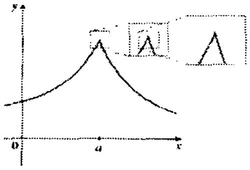
(2) 미분계수의 정의를 이용하여 $x=0$에서의 접선의 기울기를 구하여라.

(3) 미분계수가 존재하는지의 여부를 판단하고 그 이유를 설명하여라.

2. 다음 그림은 두 함수의 $x = a$ 근방을 컴퓨터의 줌기능을 이용하여 확대한 그림이다. 미분가능성을 조사하고 그 이유를 설명하여라.



①



②