한국초등수학교육학회지 *10*(2), 171-194. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea* *10*(2), 171-194.

초등학교 5학년 수학 영재 학생의 확산적 산출물의 분석 및 평가에 관한 연구

임 문 규[1)]

보다 효과적인 초등 수학 영재교육을 위해서는 이에 관한 실제적인 학습·지도에 관한 다양한 연구의 집적이 필요하다. 이 연구는 초등 수학 영재교육을 위한 다양하고 확산적인 사고활동을 통해 창조성 육성의 학습·지도에 초점을 두었다. 초등학교 5학년 수학 영재 학생들에게 <다양한 계산식 만들기>와 <두 수 사이의 관련성 찾기>를 적용하여, 학생들의 산출물을 세밀하게 분석하고 평가하는 방법을 모색하였다. 초등학교 5학년 수학 영재 학생들은 다양하고 많은 계산식을 만들었으며, 두 수 사이의 관련성 또한 다량으로 발견하였다. 이러한 실천적인 연구의 집적을 통하여, 초등학교 수학 영재 학생들의 학습·지도와 평가 방법 및 교재 개발 등 영재교육 발전에 기여할 수 있을 것으로 생각한다.

[주제어] 초등 수학 영재 학생, 초등 수학 영재교육, 학생의 산출물, 다양하고 확산적 사고, 창조성, 분석 및 평가

Ⅰ. 서 론

21세기에 들어서면서 우리나라는 국가적으로 영재교육진흥법을 발효시켜 영재교육이 국가 및 국민적 관심사로 확산되고 있다. 초등 수학 영재 교육에 관한 연구는 국내·외적으로 많은 연구의 집적이 요구되며, 특히 초등학생을 위한 수학 영재교육은 보편적인 수학교육이 아닌 하나의 특수교육 영역이므로 지속적인 연구의 집적이 필요하다. 이제까지 수학 영재교육에 관한 연구는 주로 영재 학생들의 선발에 관하여, 학생들의 정의적 특성이나 태도에 관한 조사 및 분석이 하나의 큰 지류였다. 초등학생의 수학 영재 교육을 위한 실제적인 학습·지도와 직접 관련되는 자료 및 내용은 부족한 편이므로, 개발·연구가 긴요한 상황이라고 생각된다.

본 연구자는 수학교육 연구에 전념하기 시작한 1980년대 중반부터, 수학교육을 통한 창조성 육성에 대하여 관심을 두고 연구를 하였다. 1980년대의 수학교육은 '문제해결력' 향상을 중심으로 교육과 연구의 초점이 두어지고 강조된 시기이다. 수학교육에서 '문제해결 학습·지도' 에 관한 연구가 강조되면서, 문제를 해결하기 위해서는 먼저 '문제' 가 있어야 하므로, 동전의 양면과 같은 수학 '문제 만들기' <問題設定(일본), problem posing> 학습·지도도 함께 강조되어야 한다는 사실에 공감하고 이 연구를 시작하였다(임문규, 1989, a, b 참조).

수학교육을 통한 창조성 육성은, 수학 문제해결을 통해서도 가능하지만, 본 연구자가

---

1) 공주교육대학교 수학교육과

'수학 문제 만들기 학습·지도' 의 연구를 강조하는 가장 큰 이유는, 문제 만들기를 하면서 문제해결 학습이 동시에 이루어질 수 있다는 것이다. 특히, 수학 문제 만들기 학습·지도는 문제해결 학습 이상으로 다양하고 확산적이며 발전적인 사고활동이 지속된다는 점이다. 인간의 창조성은 이러한 다양하고 확산적이며 발전적인 사고활동을 통해 생산될 수 있다고 기대되기 때문이다. 초등학교 수학 영재 학생의 지도 또한 본 연구자의 관심 영역인 창조성 육성을 위한 확산적 사고활동을 강조하는 학습·지도와 일치한다고 생각한다.

이 연구에서는 Ⅱ장에서 초등 수학 영재 학생의 특징 및 지도 방법에 관하여 언급한다. Ⅲ장에서는 초등학교 5학년 수학 영재 학생들에게 다양하고 확산적인 사고활동의 지도 사례인 <[4 4 4 4=0]에 대한 다양한 식 만들기>에 대한 학생들의 산출물을 분석·평가한다. 또한 영재 학생들의 다양한 발견 및 관련지우기를 알아보기 위한 [16과 36 사이의 관련성]과제에 대한 학생들의 산출물을 분석하였다. 끝으로, 이 연구를 통하여 알게 된 결과 및 시사점에 관하여 언급하였다.

Ⅱ. 초등 수학 영재 학생의 특징 및 지도 방법에 관하여

본 연구자가 2001년부터 초등학교 5, 6학년의 수학 영재 학생을 지도하면서, 초등 영재 학생의 큰 특징 중의 하나로 느낀 것은 강의와 설명만으로는 학생들의 관심이 흩어지기 쉽고 집중력이 떨어진다는 것이다. 또한, 단순한 기성의 수학 문제를 제공하면, 수학 영재 학생들은 해결 속도가 빠르기 때문에 금방 문제를 해결 하고나서 수업이 산만해진다. 이러한 문제점을 해결하기 위해서는 가능한 한 강의와 설명하는 시간을 줄이고, 학생 스스로 생각하게 하는 과제를 제공하면 큰 집중력을 보이고 그 과제의 해결에 몰입하게 된다는 사실을 확인하였다.

이러한 초등 수학 영재 학생들의 영재성을 계속적으로 육성하고, 수업에 대한 집중력을 지속시키기 위해서는 과제의 개발이 무엇보다 중요하다. 초등 수학 영재 학생의 학습·지도를 위한 과제는 다양한 영역과 방법이 있겠지만, 본 연구자는 특히, 영재 학생들의 창조성 육성에 초점을 두고, 창조성 육성의 방법으로 다양하고 확산적인 사고활동을 촉진할 수 있는 과제개발 및 적용에 중점을 두고 있다.

이하에서는 초등 수학 영재 학생의 다양하고 확산적인 사고활동의 촉진을 위해 적절하다고 생각되는 학습·지도 방법 및 과제개발에 대하여, 문제해결 및 문제 만들기 학습·지도의 두 가지 측면에서 몇 가지를 제시하기로 하였다.

1. 문제해결 학습·지도

가. 오픈엔드 어프로치에 의한 방법

<오픈엔드 어프로치>의 학습·지도를 위한 방법은 아래와 같이 여러 가지를 들 수 있다.

(1) 답이 단 한 개가 아닌 다양한 답이 나올 수 있는 과제

(2) 해결 방법이 다양한 과제

이것은 답을 구하는 것보다도 그 답에 도달하는 다양한 방법을 요구하는 것이다.

나. 비정형적 문제 상황에 의한 방법

(1) 완벽하게 완성된 문제가 아닌 물음이 없는 상황만 제시

이것은 문제 상황에서 문제를 자유롭게 재구성하여, 즉 문제를 만들어서 해결하는 것이다.

(2) 문제해결을 위해서는 조건이나 속성이 과부족한 문제 제시

조건이나 속성을 다시 조정하여 문제를 정형화하여 문제해결을 하는 방법이다.

2. 문제 만들기 학습·지도

문제 만들기 교수·학습의 방법으로는 여러 가지를 생각할 수 있겠지만, 이제까지 학생에게 문제를 만들게 하는 구체적인 방법을 정리하면 다음과 같은 것들이 많이 사용되고 있다.

가. 實 세계적 상황으로부터 즉 "미수학적인 세계로부터"의 문제 만들기

實 세계적인 현실 상황으로부터의 문제 만들기 교수·학습은 수학자가 실제로 수학을 만들어 내는 것과 같이 수학적 활동을 학생들에게 행하게 할 수 있으므로 가장 적절한 교수·학습의 모형으로 생각된다. 물론 현실 상황이라도 될 수 있는 대로 수학의 내용을 풍부하게 많이 포함하고 있으며 교과서 단원에 맞는 상황을 설정하는 것이 중요하다. 초등학교에서 실제의 수업에서 적용할 수 있는 현실 상황으로는 다음과 같은 것을 생각할 수 있다.

(1) 임의의 상황으로부터의 문제 만들기

(가) 일상생활의 일과 : 가정생활, 학교생활, 시장보기, 통학, 행사 등 …

(나) 놀이 게임 : 술래잡기, 줄넘기, 귀신놀이, …

(2) 특정한 대상과 소재로부터의 문제 만들기

(가) 뉴스의 내용 : 신문이라든지 잡지, TV 등의 내용, …

(나) 수학자 및 과학자의 전기, 역사적 사실, …

(다) 서적, 교과서, 참고서, …

(라) 타 교과의 내용 : 자연, 사회, 국어, 실과, 체육, 음악, 미술, …

(마) 그림모형 : 여러 가지 그림과 모형, …

(바) 옛날이야기, 전설, 만담, …

(3) 현실 및 주변으로부터의 문제 만들기

(가) 현존의 사물, 학교, 가족, 교통기관, 도로, …

나. 수학적인 세계로부터의 문제 만들기

(1) 수학문제 이외의 내용으로부터의 문제 만들기

實 세계적인 상황으로부터 문제 만들기가 힘들 경우에는 수학의 내용 중에서도 기성의 문제를 그대로 제시하지 않고 다음과 같은 것들로부터도 문제 또는 상황을 설정할 수 있을 것이다.

(가) 수학적 용어 : 길이, 넓이, 무게, 체적, 단위, 삼각형, 곱셈, 배수, 분수, 부등식, 함수, 보다 크다, …
(나) 숫자와 문자 : 7, 10, 3000, x, y, a, b, S, …
(다) 도형과 문자 : 삼각형, 평행사변형, 원추의 모형, 구의 모형, …
(라) 그래프 : 함수의 그래프, 통계의 그래프, …
(마) 식 : 공식, 방정식, 부등식, …
(바) 데이터 자료 : 여러 가지 통계 데이터, 학급의 신장, 인구의 통계, …
(사) 부호 및 기호 : +, −, ×, ÷, =, %, …
(아) 교과서의 문제 상황
(자) 교구 : 삼각자, 직선자, 분도기, …

(2) 수학 문제로부터의 문제 만들기
(가) 일반적인 수학 교과서의 문제를 제시할 경우(발전적 취급)
(나) 조건이 과부족한 수학 문제를 설정

(임문규 외 2인, 2001)

본 연구자는 위와 같은 선행 연구를 바탕으로, 초등 수학 영재 학생들에게 다양하고 확산적이며 발전적인 사고를 길러주기 위해 문제해결 및 문제 만들기 학습·지도 방법을 실행하고 있다. 이러한 수학의 학습지도 방법을 통하여 학생들의 창의성과 함께 창조성의 개발과 육성이 함께 이루어질 수 있을 것으로 생각된다.

Ⅲ장에서는 초등학교 5학년 수학 영재 학생을 대상으로 확산적 사고활동의 산물에 대한 실제적인 분석과 창조성의 관점에서의 평가의 실 예를 제시하기로 한다.

Ⅲ. 초등 수학 영재 학생의 확산적 산출물의 분석 및 평가의 실제

본 연구자는 선행 연구「임문규(1989, No.1), 數學教育における問題解決學習の研究－創造性育成の觀點から－(수학교육에서 문제해결 학습의 연구－창조성 육성의 관점에서－)」에서, 수학교육을 통한 창조성 육성의 방법에 관하여 연구한 바 있다. 수학 영재 학생을 지도해 오면서, 본 연구자는 Ⅱ장에서 논한 문제해결 및 문제 만들기 학습·지도 방법을 실천하고, 영재 학생들의 다양하고 확산적인 사고활동의 촉진을 위한 교재 및 지도방법에 대한 개발·연구에 관심을 집중하고 있다.

이 장에서는 본 연구자가 초등학교 5학년 수학 영재 학생을 실제로 지도하고, 영재 학생들의 산출물을 분석·평가한 실제 사례를 제시한다.

1. 다양한 계산식 만들기

본 연구자가 2001년도에 초등학교 수학 영재교육을 처음 시작하면서, 다양하며 확산적 사고활동을 촉진할 수 있는 적절한 과제를 탐색하였다. 그 중에, 우리나라의 수학교육 현장에서도 현재 적용되고 있는 문제라고 생각되는, 平林一榮의 「算數·數學教育のシチュエーション(산수·수학교육의 상황)」에 있는 <그림 1>을 발견하였다(平林一榮, 1975).

아직 수학적 지식의 양이 그렇게 많지 않은 초등학교 5학년에게는 흥미 또한 유발할 수

있는 과제로 생각하여, <그림 1>의 과제를 5학년 수학 영재 학생에게 적용하였다.

2001학년도 수학 영재 기초반
( )초등학교 5학년 (남, 여) 이름

1. 계산 문제(다양한 기호 사용)
<문제> 다음과 같이 4를 4개 사용하여 0에서 10까지의 수가 나오는 식을 만들어 봅시다.
[+, −, ×, ÷, ( ) 등을 사용하여]

4 4 4 4 = 0
4 4 4 4 = 1
4 4 4 4 = 2
4 4 4 4 = 3
4 4 4 4 = 4
4 4 4 4 = 5
4 4 4 4 = 6
4 4 4 4 = 7
4 4 4 4 = 8
4 4 4 4 = 9
4 4 4 4 = 10

<그림 1> 계산식 만들기

<그림 1>의 문제는 하나의 문제 상황에서 계산 결과가 0에서 10까지 11가지의 다양한 답이 나오는 문제이다. 이 문제의 좋은 점은 초등학교 3, 4학년 이상의 학생 수준에서도 적용가능하며, 초등학생들에게 호기심과 흥미를 유발시킬 수 있다는 것이다. 실제로 학생들은 재미있게 식을 만드는데 몰입하였다. 학생들이 만든 식을 분석한 결과, 예를 들어 하나의 식 [4 4 4 4 = 0]을 만드는데 있어서도 몇 가지의 다양한 방법이 있음을 확인하게 되었다.

이것에 기초하여, 그 다음에는 <그림 1>의 11개의 문항을 각각 분리하여, <그림 2>와 같이 하나의 문항에 대하여 A4용지 11장을 만들어 각각에 대한 다양한 식을 만들도록 재구성하여 제시하였다.

2003 학년도 수학 영재 기초반(수학) 과제
( )초등학교 5학년 (남, 여) 이름

<문제1> +, −, ×, ÷, ( )를 사용하여 4 4 4 4 = 0 이 되는 계산식을 다양하게 만들어 봅시다.

<그림 2> 다양한 계산식 만들기

이 과제의 목적은 영재 학생들은 각각의 문항에 대하여 어느 정도의 많은 다양한 식을 만들 수 있는가를 알아보기 위한 것이므로, 식 만드는 시간은 제한하지 않았다.

학생들은 장시간에 걸쳐 몰입하였으며, 11개 항목의 각각에 다양하고 많은 식을 만들었다.

가. 11개 문항에 대한 영재 학생들이 만든 식의 전체적인 분석

(1) 만든 식의 전체 개수 와 정답의 백분율 및 평균 개수

학생들이 만든 식의 전체를 [정답], [식은 옳고 지시를 안 따른 것], [오답]의 3가지로 분류하여 분석한 개수와 각 분류에 관한 백분율 및 정답의 평균 개수는 아래 [표 1]과 같다.

[표 1] 만든 식의 전체 개수 및 정답의 평균 개수 <N=14, ( ) 안은 백분율>

문항 \ 분석분류	정답의 개수 및 평균	식은 옳고 지시 안 따름	오답의 개수	총 개수	총 개수의 순위
4 4 4 4 = 0	151(91.52):10.8	2(1.21)	12(7.27)	165	1
4 4 4 4 = 1	114(93.39): 8.1	2(1.65)	6(4.96)	122	2
4 4 4 4 = 2	32(78.05): 2.3	1(2.44)	8(19.51)	41	4
4 4 4 4 = 3	22(84.62): 1.6	0(0.00)	4(15.38)	26	7
4 4 4 4 = 4	24(75.00): 1.7	0(0.00)	8(25.00)	32	5
4 4 4 4 = 5	15(75.00): 1.1	0(0.00)	5(25.00)	20	9
4 4 4 4 = 6	15(62.50): 1.1	1(4.17)	8(33.33)	24	8
4 4 4 4 = 7	17(89.47): 1.2	2(10.53)	0(0.00)	19	10
4 4 4 4 = 8	74(98.67): 5.3	0(0.00)	1(1.33)	75	3
4 4 4 4 = 9	28(96.55): 2.0	0(0.00)	1(3.45)	29	6
4 4 4 4 = 10	0(0.00) : 0.0	3(60.00)	2(40.00)	5	11
총 개수	492(88.17): 3.2	11(1.97)	55(9.86)	558	

위의 [표 1]에서 나타난 것과 같이, [4 4 4 4=0]에 대한 식의 총 개수 165개, 정답의 개수 151개로 평균 10.8개로 가장 많은 식을 만들었다. 그 다음으로 [4 4 4 4=1]에 대해서는 만든 식의 총 수가 122개, 정답 수 114개, 세 번째로 만든 식의 개수가 많은 것이 [4 4 4 4=8]에 대한 것으로, 각각 75개, 74개였다.

위의 사실로부터 [4 4 4 4=]에 대해 0에서 10까지 되는 식을 만드는 과제는 0, 1, 8이 되는 식을 가장 많이 다양하게 만들 수 있음을 알 수 있다. 특히 [4 4 4 4=10]에 대한 식의 정답은 $(44-4)\div4$ 단 하나인데, 2001년도의 조사에서는 정답자가 있었지만, 2003년도 조사에서는 정답자가 나오지 않았다.

(2) 학생들이 11개 각 항목에 대한 만든 가짓수

이 과제는 학생들이 어느 정도의 다양한 많은 식을 만들 수 있는 가를 알아보는 것이 목적이므로, 하나의 식에 대해 얼마나 다른 다양한 식을 만들 수 있는가를 조사하였다. 같은 개념일지라도 연산의 순서가 다르거나 괄호의 사용 유무를 포함한 전체적인 다양성을 조사한 것이 아래 [표 2]이다. 이러한 식의 분류의 실제는 뒤의 [4 4 4 4=0]에 대한 분석인 [표 3]에 제시한다.

위의 [표 1]과 마찬가지로 [정답], [식은 옳고 지시를 안 따른 것], [오답]의 3가지 항

목의 개수를 조사한 것이다.

[표 2] 만든 식의 종류의 수 및 식의 개수 <N=14, ( ) 안은 전체 개수>

문항 \ 분석분류	정답 식의 종류 수 (식의 개수)	식은 옳고 지시 안 따른 종류 수(개수)	오답의 종류 수 (개수)
4 4 4 4 = 0	53(151)	2(2)	11(12)
4 4 4 4 = 1	45(113)	2(2)	5(6)
4 4 4 4 = 2	9(32)	1(1)	8(8)
4 4 4 4 = 3	4(22)	0(0)	4(4)
4 4 4 4 = 4	9(24)	0(0)	6(8)
4 4 4 4 = 5	5(15)	0(0)	4(5)
4 4 4 4 = 6	6(15)	1(1)	7(8)
4 4 4 4 = 7	9(17)	2(2)	0(0)
4 4 4 4 = 8	25(74)	0(0)	1(1)
4 4 4 4 = 9	9(28)	0(0)	1(1)
4 4 4 4 = 10	0(0)	3(3)	1(1)
총 종류 수	174(491)	11(11)	48(55)

[표 2]에서 나타난 것을 보면, [표 1]과 같이 학생들이 만든 식의 종류의 가짓수가 많은 순서도 [4 4 4 4=0]이 53종류로 가장 많고, 그 다음으로 [4 4 4 4=1]의 45종류, [4 4 4 4=8]에서 25종류의 순으로 만들고 있음을 알 수 있다. 이것으로부터 하나의 계산식을 만드는 데에 있어서도 얼마나 많은 다양한 구성과 표현이 내재되어 있는가를 알 수 있었으며 수학이 내재하는 다양성 및 영재 학생들의 확산적 사고 활동을 확인할 수 있었다.

[4 4 4 4=0], [4 4 4 4=1], [4 4 4 4=2], …,[4 4 4 4=10]의 11개의 식에 대해서, **[정답]**, **[식은 옳고 지시를 안 따른 것]**, **[오답]**에 관하여 모두 분석하였지만, 이하에서는 [4 4 4 4=0]에 대하여 좀 더 상세히 분석하고, 창조성의 관점에서 평가 방법에 대하여 논하기로 한다.

나. [4 4 4 4=0]에 대해 초등학교 5학년이 만든 식에 대한 상세한 분석

(1) [4 4 4 4=0]에 대해 만든 식의 분석 방법의 실제

초등학교 5학년이 만든 식의 전체를 분석한 결과, 학생들이 만든 식의 총 개수는 165개였는데, 올바른 식은 151개였고 식은 옳지만 지시에 따르지 않은 것이 2개, 틀린 것이 12개였다.

㈎ [4 4 4 4=0]이 되는 [정답]의 분석

먼저, [4 4 4 4=0]이 되는 식을 만드는데 있어서 초등학교 5학년 영재 학생 14명이 만든 식의 **[정답]**의 종류의 총 가짓수는 53종류였다. 이것을 빈도수가 많은 순으로 분석한 것이 아래 [표 3]이다.

[표 3] [정답]에 대한 빈도수에 따른 분석 <N=14>

번호	[정답] 식 ＼ 학생 명	호	엽	준	인	현	홍	지	재	운	수	혜	관	규	석	개수
1	4×4÷4−4	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	13
2	4−4+4−4	1	1	1	1	1	1			1	1			1	1	10
3	4−4−4+4	1	1	1	1		1	1	1	1				1	1	10
4	4+4−4−4			1	1	1	1	1	1	1			1	1	1	10
5	4÷4×4−4	1	1	1		1	1	1		1		1		1	1	10
6	(4+4)−(4+4)		1	1	1			1	1	1	1				1	8
7	(4−4)×4×4		1		1	1			1	1			1		1	7
8	4×4−4×4			1				1		1	1			1		5
9	4÷4−4÷4			1		1		1			1			1		5
10	(4−4)×(4−4)			1			1	1	1						1	5
11	4−4×4÷4	1	1			1								1		4
12	(4÷4)−(4÷4)		1						1	1					1	4
13	(4−4)+(4−4)		1					1	1							3
14	(4×4)−(4×4)		1						1						1	3
15	(4−4)×(4÷4)			1			1					1				3
16	4×(4−4)×4					1				1					1	3
17	(4−4)÷4×4						1					1	1			3
18	(4−4)−(4−4)							1							1	2
19	(4−4)×(4+4)			1			1									2
20	(4−4)×4÷4											1			1	2
21	(4−4)×(4×4)			1			1									2
22	4×(4÷4)−4		1										1			2
23	(4+4−4)−4	1									1					2
24	4−4÷4×4					1								1		2
25	*−4+4+4−4*						*1*			*1*						*2*
26	4−(4+4−4)							1					1			2
27	4−(4−4)−4														1	1
28	(4−4)−4+4														1	1
29	4+(4−4)−4														1	1
30	(4+4)×(4−4)														1	1
31	4÷4×(4−4)	1														1
32	(4÷4×4)−4	1														1
33	(4×4÷4)−4	1														1
34	4÷(4÷4)−4		1													1
35	4−(4×4÷4)			1												1
36	44×(4−4)						1									1
37	4−4×(4÷4)											1				1
38	4×(4−4)÷4											1				1
39	(4×4)×(4−4)														1	1
40	(4÷4)×(4−4)														1	1
41	44−44												1			1
42	*−4−4+4+4*									*1*						*1*
43	*−4+4−4+4*									*1*						*1*
44	*(−4−4)+(4+4)*								*1*							*1*
45	*(−4)+(−4)+(4+4)*												*1*			*1*
46	*(−4+4)×4×4*									*1*						*1*
47	*(−4+4)×(4÷4)*									*1*						*1*
48	*(−4+4)×(4−4)*									*1*						*1*
49	*(−4+4)×(4+4)*									*1*						*1*
50	*(−4+4)×(−4+4)*										*1*					*1*
51	*(−4×4)+(4×4)*								*1*							*1*
52	*(−4)+4×4÷4*												*1*			*1*
53	*(−4)×(−4)−(4×4)*												*1*			*1*
	정답 개수	9	12	13	6	9	11	11	11	17	7	7	10	9	19	151

[표 3]은 개념은 같지만 계산의 순서가 다른 것도 모두 다른 종류로 생각하고 분석한

것이다. 이렇게 학생들이 만든 자료를 분석의 초기 단계에서는 가능한 한 빠뜨리지 않고 그대로 살려 전체 자료를 분석하였다.

위의 분석을 보더라도, 영재 학생들은 [정답]을 6종류 이상, 가장 많이 만든 학생은 19종류의 식을 만들 수 있고, 평균 10.8개의 식을 만들었음을 알 수 있다. 5학년 수학 영재 학생들은 [4×4÷4−4=0]이라는 식을 가장 많이 만들었는데, 1명을 제외한 13명 모두가 만들었다. 영재 학생들이 만든 문제 전체를 좀 더 체계적으로, 사용한 [계산기호의 수]와 [기호의 종류 및 횟수], [괄호의 사용 횟수]로 나누어 분석한 것이 아래 [표 4]이다.

[표 4] 계산기호의 수 및 종류, 괄호의 수에 관한 분석 <N=14>

계산기호의 수	기호의 종류 및 횟수	괄호 사용 횟수	실제 계산식	빈도수
1개	−: 1회	0	44−44	1
	−: 3회	1	4−(4−4)−4	1
		2	(4−4)−(4−4)	2
	소계			4
2개	+: 1회 −: 2회	0	4−4+4−4	10
			4−4−4+4	10
			4+4−4−4	10
		1	(4−4)−4+4	1
			4+(4−4)−4	1
			4−(4+4−4)	2
			(4+4−4)−4	2
		2	(4−4)+(4−4)	3
	+: 2회, −: 1회		(4+4)−(4+4)	8
	−: 1회, ×: 1회 또는 ×: 2회	0	4×4−4×4	5
		1	44×(4−4)	1
			(4−4)×4×4	7
			4×(4−4)×4	3
		2	(4−4)×(4−4)	5
			(4×4)−(4×4)	3
			(4−4)×(4×4)	2
			(4×4)×(4−4)	1
	÷: 2회, −: 1회	0	4÷4−4÷4	5
		1	4÷(4÷4)−4	1
		2	(4÷4)−(4÷4)	4
	소계			84
3개	+: 1회, −: 1회, ×: 1회	2	(4−4)×(4+4)	2
			(4+4)×(4−4)	1
	−: 1회, ×: 1회, ÷: 1회	0	4×4÷4−4	13
			4÷4×4−4	10
			4−4×4÷4	4
			4−4÷4×4	2
		1	(4−4)÷4×4	3
			(4−4)×4÷4	2
			4×(4÷4)−4	2
			4−4×(4÷4)	1
			4×(4−4)÷4	1
			4÷4×(4−4)	1
			(4÷4×4)−4	1
			(4×4÷4)−4	1
			4−(4×4÷4)	1
		2	(4−4)×(4÷4)	3
			(4÷4)×(4−4)	1
	소계			49
합계				137

단, [표 4]에서 25번과 42번~53번까지는 음수를 사용한 선행학습에 의한 것으로 판단되어 이 분석에서는 제외하였는데, 음수를 포함한 계산에 대한 선행학습을 했다고 판단되는 학생 수도 6명이나 있는 것으로 나타났다.

[표 4]와 같이 분석하면, 초등학교 5학년의 수학 영재 학생들은 몇 개의 계산 기호를 사용하며, 계산기호의 종류 및 사용 횟수와 괄호의 사용 횟수까지도 명확하게 알 수 있다. 이러한 분석을 이용하여, 만든 식의 세련성의 평가에도 적용할 수 있을 것이다. 예를 들어, 계산 기호의 수가 다양하거나 많은 식과 괄호의 사용 개수가 많은 식에 대해서 또는 역으로 계산 기호의 수가 가장 적거나 괄호를 전혀 사용하지 않은 식, 예를 들어 [44−44]나 [44×(4−4)]와 같은 식에 대해서는 세련성이나 독창성에서 높게 평가할 수 있을 것이다.

(나) [4 4 4 4=0]에 대해 **[식은 옳고 지시를 안 따른 것]**에 관한 분석

[표 5] **[식은 옳고 지시 안 따른 것]**의 분석

	식＼학생 명	재	수	개수
1	|−4−4|−(4+4)	1		1
2	4/4−4/4		1	1
	계	1	1	2

|−4−4|−(4+4)의 식을 만든 학생은 중학교 정도의 선행학습을 한 것으로 판단되며, 4/4−4/4의 식은 비록 지시는 따르지 않았지만 초등학교 5학년까지의 학습에서 생각할 수 있는 창조적인 활동이라 생각할 수 있다.

(다) [4 4 4 4=0]에 대한 **[오답]**에 관한 분석

[4 4 4 4=0]에 대해 5학년 수학 영재 학생들이 만든 오답에 대해 분석한 것은 [표 6]이다.

[표 6] **[오답]**에 관한 분석 <N=14>

	[오답] 식＼학생 명	호	엽	준	인	현	흥	지	재	운	수	혜	관	규	석	개수
㉠	4÷(4−4)×4											1	1			2
㉡	4×4÷(4−4)	1														1
㉢	(4−4)÷(4−4)														1	1
㉣	4÷4÷4−4											1				1
㉤	4−4×(4+4)					1										1
㉥	4−4÷4−4		1													1
㉦	4+4÷4−4		1													1
㉧	4+4÷4×4													1		1
㉨	−4+4×(4−4)										1					1
㉩	(4−4)(−4++4)												1			1
㉪	(4+4)+(−4+−4)												1			1
	합계	1	2			1					1	2	3	1	1	12

[표 6]에서 보는 바와 같이 모두 12개의 틀린 식이 나왔다. 이것을 좀 더 세밀하게 분

석하기로 한다.

㉠, ㉡, ㉢의 식은 괄호 ( ) 속을 먼저 계산하게 되면 분모가 0 이 되는(불능이나 부정의 형태) 것을 알지 못했거나 계산의 순서를 혼돈한 것으로 판단된다.

특히 ㉣의 [4÷4÷4−4]는 4÷(4÷4)−4로 하면 정답이 될 수 있는데, 곱셈과 나눗셈은 순서대로 계산한다는 계산의 순서를 확실하게 인지하지 못하였거나 괄호의 사용을 빠트린 오류로 생각된다.

또한 ㉦, ㉧, ㉨은 선행학습인 정수의 계산을 배우기는 하였지만, 잘못된 이해와 부적절한 부호 사용에 기인한 것으로 판단된다.

㈑ 음수(선행학습)를 사용하여 만든 식에 대한 분석

초등학교 5학년생이 이미 정수의 계산에 대한 학습도 행하여지고 있음을 알 수 있었는데, [표 3]의 번호 25와 42~53까지가 그것이며 6명의 학생이 음수를 사용하여 식을 만들고 있다. 이것을 [표 4]와 같은 항목으로 분류하면 아래 [표 7]과 같다.

[표 7] 음수를 사용하여 만든 식의 분석 <N=14>

계산기호의 수	기호의 종류 및 횟수	괄호 사용 횟수	실제 계산식	빈도수
1	+: 4회	4	(−4)+(−4)+(4+4)	1
2	+: 2회, −: 1회	0	−4+4+4−4	2
			−4−4+4+4	1
			−4+4−4+4	1
		2	(−4−4)+(4+4)	1
	+: 1회, ×: 2회	1	(−4+4)×4×4	1
	+, ×, (2)	2	(−4×4)+(4×4)	1
			(−4+4)×(−4+4)	1
			(−4+4)×(4+4)	1
	−, ×, (3)	3	(−4)×(−4)−(4×4)	1
3	×, ÷, +, (1)	1	(−4)+4×4÷4	1
	+, −, ×, (2)	2	(−4+4)×(4−4)	1
	×, ÷, +, (2)	2	(−4+4)×(4÷4)	1
합계				14

[표 7]에서 보는 바와 같이, 초등학교 5학년 학생들도 이미 선행학습을 하여, 음수를 사용한 계산을 이해하고 적용하고 있음을 알 수 있다.

다. 계산식 만들기 산출물에 대한 창조성 관점에서의 평가 방법

위와 같이 간단한 계산식 만들기에 대하여 학생들이 만든 식을 분석하면 학생들의 속성을 상당한 부분 정확하게 평가할 수 있다.

이하에서는 [표 3]과 [표 4]를 바탕으로, 학생들의 창조성의 관점에서 평가해 보기로 한다. 창조성의 평가 항목 또한 여러 가지로 적용할 수 있겠지만, 창조성 평가 중에서 대표적인 것으로 생각되는 <유창성>, <유연성>, <독창성>의 3개 항목으로 나누어 평가하기로 한다. 단, [표 3]에서 번호 25와 42~53까지는 학생들이 선행학습에 의해 음수를 사용하여 만든 식이므로 평가 대상에서 제외하였다.

(1) 유창성에 관한 평가

초등학교 5학년 영재 학생들이 [4 4 4 4=0]이 되는 식을 만드는데 [정답]의 총 개수만을 세어서 그 개수를 그대로 유창성의 점수로 하는 것이다. 이런 식으로 유창성의 점수를 주면, 아래 [표 8]과 같이 최저 6점에서 최고 19점까지 점수가 주어진다.

[표 8] 유창성의 평가 점수 <N=14>

학생	호	엽	준	인	현	홍	지	재	운	수	혜	관	규	석	평균
점수	9	12	13	6	9	10	11	9	10	6	7	7	9	19	9.79

[표 8]에서 보는 바와 같이 유창성의 평균 점수는 9.79이며, 학생 '석'이 월등하게 19점이 되므로 유창성 평가에 의한 창조성 점수가 가장 높은 것을 알 수 있다.

(2) 유연성에 관한 평가

학생들이 만든 옳은 식들을 유연성 평가의 관점에서 여러 가지로 분류할 수 있겠지만, 일단, 계산 순서의 차이와 괄호의 유무 등을 감안하여 하나의 같은 종류의 식으로 분류하였다.

본 연구자는 계산 기호가 다르거나 괄호의 사용수와 위치를 포함하여 만든 식의 개념이 다르다고 판단되는 것 등을 생각하여 식의 형태를 분류하고, 그 개수를 유연성의 점수로 하였다. [표 3]의 음수의 계산을 제외한 [정답] 식의 형태에 관하여 유연성 평가에 기준을 두고 분류한 것이 아래 [표 9]이다.

[표 9] [정답] 식의 형태에 관한 분석 <N=14>

번호	[정답] 식의 형태	개수	백분율
2, 3, 4, 23, 28	4−4+4−4[10], 4−4−4+4[10], 4+4−4−4[10], (4+4−4)−4[2], (4−4)−4+4[1]	33	24.09
1, 33, 5, 32	4×4÷4−4[13], (4×4÷4)−4[1], 4÷4×4−4[10], (4÷4×4)−4[1]	25	18.25
7, 16	(4−4)×4×4[7], 4×(4−4)×4[3]	10	7.30
9, 12	4÷4−4÷4[5], (4÷4)−(4÷4)[4]	9	6.57
6	(4+4)−(4+4)[8]	8	5.84
8, 14	4×4−4×4[5], (4×4)−(4×4)[3]	8	5.84
11, 24, 37	4−4×4÷4[4], 4−4÷4×4[2], 4−4×(4÷4)[1]	7	5.11
17, 20, 38	(4−4)÷4×4[3], (4−4)×4÷4[2], 4×(4−4)÷4[1]	6	4.38
10	(4−4)×(4−4)[5]	5	3.65
15, 31, 40	(4−4)×(4÷4)[3], 4÷4×(4−4)[1], (4÷4)×(4−4)[1]	5	3.65
13	(4−4)+(4−4)[3]	3	2.19
21, 39	(4−4)×(4×4)[2], (4×4)×(4−4)[1]	3	2.19
18	(4−4)−(4−4)[2]	2	1.46
19	(4−4)×(4+4)[2]	2	1.46
22	4×(4÷4)−4[2]	2	1.46
26	4−(4+4−4)[2]	2	1.46
27	4−(4−4)−4[1]	1	0.73
29	4+(4−4)−4[1]	1	0.73
30	(4+4)×(4−4)[1]	1	0.73
34	4÷(4÷4)−4[1]	1	0.73
35	4−(4×4÷4)[1]	1	0.73
36	44×(4−4)[1]	1	0.73
41	44−44[1]	1	0.73
	합 계	137	100.01

<단, [정답] 식의 형태 란의 [ ]의 숫자는 만든 식의 개수를 나타냄>

[표 9]를 유연성의 평가의 기준으로 하여, 구체적으로 각 학생들의 유연성의 능력에 관하여 평가하기로 한다. 예를 들어 학생 '호' 가 만든 식들을 분석하면, 아래 [표 10]과 같이 분석된다.

[표 10] 학생 '호'의 유연성의 점수화

번호	[정답]의 식	'호'	유연성
1	4×4÷4−4	1	1
33	(4×4÷4)−4	1	
5	4÷4×4−4	1	
32	(4÷4×4)−4	1	
11	4−4×4÷4	1	1
2	4−4+4−4	1	1
3	4−4−4+4	1	
23	(4+4−4)−4	1	
31	4÷4×(4−4)	1	1
	유연성 점수 합계		4

즉, [표 10]에서 보는 바와 같이, 번호 33의 식은 번호 1의 식과 순서는 똑같고 괄호 사용의 유무만 다른 것이며, 번호 5와 32의 식도 이와 마찬가지이다. 그러므로 유연성의 평가에서는 식의 번호 1, 5, 32, 33이 하나의 같은 문제로 간주된다. 단, 번호 11의 식은 번호 1의 식과 전체 계산 순서가 역으로 되었고, 번호 31의 식은 계산의 종류는 번호 1의 식과 같으나, 괄호의 개념에서 차이가 있으므로 다른 유연성의 항목으로 분류하여 점수를 부여하였다.

번호 2, 3의 식들도 계산 순서의 차이뿐이고, 번호 23은 괄호의 유무 차이로 간주하여 유연성의 평가관점에서 하나의 같은 식으로 분류하였다. 이렇게 분류하면, '호' 의 유연성의 점수는 4점이 되는 것이다.

이런 식으로 14명의 초등학교 영재 학생의 [4 4 4 4=0]이 되는 정답에 대한 유연성 평가의 득점을 부여하면, 아래의 [표 11]과 같이 된다.

[표 11] 유연성의 평가 점수 <N=14>

학생	호	엽	준	인	현	홍	지	재	운	수	혜	관	규	석	평균
점수	4	10	10	4	5	8	9	8	6	5	4	7	5	14	7.07

이상과 같이 평가하면, 최저 4점에서 14점까지의 유연성의 점수가 결정됨을 알 수 있었다.

(3) 독창성에 관한 평가

초등학교 5학년 영재 학생들이 [4 4 4 4=0]이 되는 식을 만든 것에 대하여, 독창성의 관점에서 평가할 수 있다. 독창성을 평가하는 기준은 여러 가지로 정할 수 있다. 본 연구자는 <만든 식의 빈도수에 의한 것>과 <유연성의 빈도수에 의한 것>의 두 가지 기준으로 평가의 실제를 제시하기로 한다.

(가) 만든 식의 빈도수에 의한 평가

만든 식의 빈도수에 의한 평가란, [표 3]에 나타난 만들어진 식의 빈도수에 따라 같은 식을 많은 학생이 만든 것은 낮은 배점을 주고 적은 수의 학생이 만든 것은 높은 점수를 부여하는 것이다. 예를 들어, [표 3]에서 번호 1은 가장 많은 13명의 학생이 만들었으므로 기준 점수 1점을 부여하고, 12명이 같은 식을 만들었다면 2점 등으로 점차 1점씩을 높게 주어, 1명이 유일한 단 하나의 식을 만들면 13점을 부여하는 것이다. 이런 식으로 [4 4 4 4=0]에 대해 초등학교 5학년 영재 학생들이 만든 식에 대한 독창성을 평가한 것이 [표 12]이다.

[표 12] 빈도수에 의한 독창성 평가 점수 <N=14>

학생	호	엽	준	인	현	홍	지	재	운	수	혜	관	규	석	평균
점수	74	93	98	26	62	84	81	63	60	41	65	60	57	173	74.07

위와 같은 <빈도수>에 관점에서의 독창성에 대한 평가 방법은 다양하게 설정할 수 있다고 생각되며, 위에 제시된 것은 그 중의 하나의 예로 든 것이다.

[표 13] 유창성의 점수와 만든 식의 빈도수에 의한 독창성 점수 사이의 상관계수

		유창성	독창성
유창성	Pearson 상관계수	1.000	.956
	유의확률 (양쪽)	.	.000
	N	14	14
독창성	Pearson 상관계수	.956	1.000
	유의확률 (양쪽)	.000	.
	N	14	14

[** 상관계수는 0.01 수준(양쪽)에서 유의합니다.]

[표 8]의 유창성의 점수와 [표 12]의 만든 식의 빈도수에 의한 독창성의 점수 사이의 상관계수를 조사해 본 결과, R=0.956이 되므로, 학생들이 만든 식의 빈도수에 의한 유창성의 점수를 그대로 독창성의 점수로 하더라도 큰 차이는 없다는 것을 알 수 있다.

(나) 만든 식의 유연성 빈도수에 의한 평가

전술한 유연성 빈도에 관한 평가도 독창성의 평가와 전혀 무관하지 않으며, <유연성의 평가>를 독창성의 평가에 그대로 적용할 수도 있다고 생각된다. 왜냐하면, 유연성의 평가 기준이 서로 다른 다양한 문제를 얼마나 많이 만들 수 있는가에 따라 평가하므로, 한 학생이 서로 다른 독창적인 문제를 많이 만들수록 유연성과 독창성이 동시에 높아지기 때문이다.

전술한 [표 9]와 같이, [정답] 식에 대해 같은 형태의 식으로 분류하였으므로, 이것을 이용하여 독창성을 여러 가지 관점에서 좀 더 정확하게 평가할 수 있다고 생각한다.

여기서도 [표 9]를 이용한 본 연구자 나름대로의 독창성에 관한 평가의 예를 하나 제시하기로 한다. [표 9]를 보면, 학생들이 만든 식을 같은 종류의 식으로 분류하고, 그에 따른 빈도수를 조사하였다. 그 빈도수가 33개로 가장 많이 만든 식의 번호 2, 3, 4, 23, 28

에 대해서는 기준 점수 1점을 부여하고, 빈도수가 32이면 2점, 이런 식으로 독창성의 점수를 부여하면, 1명이 유일한 단 한 개의 식을 만들었다면 33점을 받게 된다.

이것을 [4 4 4 4=0]에 대해 초등학교 5학년 영재 학생들이 만든 식에 대한 독창성의 정도를 평가해 보면, [표 14]와 같이 된다.

[표 14] 유연성 빈도수에 의한 독창성의 평가 점수 <N=14>

학생	호	엽	준	인	현	홍	지	재	운	수	혜	관	규	석	평균
점수	95	244	252	62	147	194	221	172	146	88	158	159	126	395	175.64

위의 [표 14]와 같이 계산한 독창성의 점수를 [표 11]의 유연성의 점수와의 상관계수를 조사하면, R=0.949로 나타나므로, [표 14]의 학생들에 대한 유연성의 점수를 독창성의 점수로 하더라도 큰 차이가 없음을 알 수 있다.

[표 15] 유연성의 점수와 [표 14]의 유연독창성 점수의 상관계수

		유연성	유연독창
유연성	Pearson 상관계수	1.000	.949
	유의확률 (양쪽)	.	.000
	N	14	14
유연독창	Pearson 상관계수	.949	1.000
	유의확률 (양쪽)	.000	.
	N	14	14

[** 상관계수는 0.01 수준(양쪽)에서 유의합니다.]

[표 14]와 같이 점수의 수치가 크다면 10으로 나누어 사용할 수도 있다. 이외에도, 학생들이 만든 식의 빈도수에 대해 다양한 구간을 설정하거나, [표 9]에서 백분율을 기준으로 배점하여 평가할 수도 있을 것이다.

이 이외에도 창조성의 관점에서 평가하는 방법으로 문제 만들기에서와 마찬가지로 식을 만드는데 있어서도 세련성을 평가할 수 있다. 세련성의 관점에서 평가한다면, [표 4]에서 분석한 계산기호의 수 및 종류의 다양성과 괄호의 사용 개수 등을 파악하여, 복잡하게 많이 사용한 것과 가장 적게 사용한 것 등을 세련성의 평가 관점에서 높은 점수를 부여하는 것도 하나의 평가 방법이 될 것으로 생각된다.

2. 2개의 수 사이의 다양한 관련성

평범한 2개의 수 사이의 다양한 관련성을 발견하게 하는 것도 다양하고 확산적인 사고 활동을 요구하는 문제로, 이미 교육 현장에서 많이 적용되고 있다고 생각되는데, 수학 영재교육에 실제로 적용하고 그 결과를 자세하게 분석하였다.

가. 조사의 목적

(1) 두 개의 수 사이의 관련성을 얼마나 많이 발견할 수 있는가? (관련성의 개수)

(2) 관련성 항목을 분류하고 분석한다.

나. 조사 대상 및 방법

(1) 초등학교 5학년 수학 영재 학생 13명

(2) 조사 시간은 제한을 두지 않았지만, 대략 15분 이내에 끝났음

다. 조사지

아래 <그림 3>은 초등학교 5학년 영재교육 시간에 A4용지 1장으로 제시한 것을 축약한 것이다.

2005 학년도 수학 영재 기초반(수학) 과제 (2005.11.19) (　　　　　　)초등학교 5 학년 (남, 여) 이름 <문제1> 16과 36의 두 수에서 관계되는 성질을 생각나는 대로 다양하게 많이 쓰시오.

<그림 3> 두 수 사이의 관련성 조사지

라. 결과물의 분석

(1) 발견한 종류의 총 개수 및 발견한 총 개수

초등학교 5학년 수학 영재 학생 13명이 발견한 16과 36 사이의 관련성 내용 중 올바른 것과 틀린 것으로 크게 분류하여 분석하기로 한다.

(가) 발견한 관련성이 옳은 것에 대한 분석

올바른 관련성의 내용을 가능한 한 같은 의미별로 분류하여 분석하려고 노력하였다. 전체적인 분류 및 분석표는 이하의 분석 중에 제시되므로 생략한다. 먼저 분석을 위한 분류 내용의 일부에 대한 영재 학생 개인별 발견 수를 제시한 것이 아래 [표 16]이다.

[표 16] 관련성의 분류 번호 및 내용(빈도순 임) <N=13>

번호	분 류 내 용	소	우	홍	범	승	휘	상	기	길	수	예	태	현	합계
1	4의 배수이다, 둘 다 4의 배수이다, 4의 배수다, 모두 4의 배수이다, 4로 나누어진다, 4로 나누어떨어진다.	1	1	1	1	1	1	1	1	1		1	1	1	12
2	짝수이다, 둘 다 짝수이다, 짝수다, 모두 짝수이다, 끝자리수가 짝수다.	2	1	1			1	1	1		1	1	1	1	11
3	끝자리수가 6이다, 일의 자리 숫자가 6이다, 둘 다 6으로 끝난다, 모두 6으로 끝난다, 일의 자리에 6이 들어간다.	1	1	1			1	1	1	1	1		1	1	10
4	제곱수다, 둘 다 같은 수 곱셈이 가능하다; 4×4, 6×6, 모두 어떤 수의 제곱수이다.	1		1		1		1		1	1		1		7
5	두 수를 더하면 홀수가 된다, 일의 자리와 십의 자리를 더하면 둘 다 홀수가 된다, 두 자리들의 합이 홀수다, 각 자리의 합이 홀수이다.	1				1		1		1	1	1			6
6	두 자리 수다, 둘 다 십의 자리다, 모두 두 자리 수이다, 두 자리 수이다.	1		1			1			1			1	1	6
7	5로 나누었을 때 나머지가 1이다, 5로 나누면 1이 남는다, 둘 다 5로 나누면 나머지가 1이 된다. 5의 배수에 1을 더한 수이다.		1				1		1				1	1	5

위의 [표 16]은, [16과 36 사이의 관련성]을 내용별로 분류하여 번호를 붙이고, 학생 개인별 발견한 관련성의 개수를 분석하였다. 이와 같이 분석한 결과, 올바른 관련성에 대한 항목의 총 종류의 수는 총 61개였으며, 틀린 것도 6개가 나왔다. [표 16]의 학생 '소' 는 분류 번호2에서 2개가 나왔는데, 같은 내용을 다르게 표현한 것을 나타낸다.

[표 16]과 같이 분류하여 분석한 결과, 관련성의 내용이 올바른 것에 대한 13명의 영재 학생이 발견한 관련성의 종류의 수와 만든 개수 및 평균 개수는 아래 [표 17]과 같다.

[표 17] 올바른 관련성의 종류의 개수 및 평균 개수 <N=13>

발견한 개수\학생	소	우	홍	범	승	휘	상	기	길	수	예	태	현	합계	평균
발견한 총 종류의 수	10	11	8	8	10	12	18	15	8	12	11	12	10	145	11.15
발견한 총 개수	11	11	8	8	10	13	18	16	8	12	11	13	10	149	11.46

[표 17]에서 보는 바와 같이, 총 종류의 수는 145개이고, 가장 많게는 학생 '상' 이 18종류의 두 수 사이의 관련성을 발견했으며, 가장 적게는 8종류를 발견하였다. [표 17]에서 관련성을 <발견한 총 종류의 개수>와 <발견한 총 개수>가 4개 차이가 나는 것은 앞에서 언급하였듯이 4명의 학생이 같은 내용의 것을 중복하여 관련지었기 때문이다.

(나) 틀린 것에 대한 분석

초등학교 5학년 영재 학생들이 발견한 [16과 36 사이의 관련성] 중에서 틀린 것들은 아래 [표 18]과 같다.

[표 18] 관련성이 틀린 것에 대한 분석

번호	내 용	승	휘	길	예	합계
㉠	16과 36을 최소공약수로 나누어도 제곱수다; $4=2\times2, 9=3\times3$			1		1
㉡	각 자리수를 나누면 그 수의 최소공배수가 2다.				1	1
㉢	36에서 두 수의 차를 빼면 20이 된다.	1				1
㉣	두 수의 약수 개수도 4개, 9개로 제곱수이다.	1				1
㉤	모두 108의 약수이다.		1			1
㉥	16의 약수의 개수의 제곱은 16인데 36은 그렇지 않다.	1				1
합		3	1	1	1	6

[표 18]을 자세히 분석해 보면, ㉠은 최대공약수를 「최소」공약수로 잘못 표현한 것이고, ㉡은 「각 자리수를 나누면」이라는 표현이 애매하다. 문맥상으로는 「십의 자리 수로 일의 자리 수를 나누면」으로 고치면 올바르게 된다. ㉢도 이 표현 그대로라면 36과 16의 차는 20이므로 36에서 20을 빼면 16이 되므로 틀리게 된다. 이것을 「36과 16의차는(빼면) 20이 된다」로 수정하면 올바르게 될 것이다. ㉣은 16의 약수는 1, 2, 4, 8, 16의 5개이므로 틀린 것이다. ㉤은 16은 108의 약수가 아니다. ㉥도 학생 '승' 이 ㉣에서 틀린 것을 연장하여 약수의 개수가 틀린 것을 모르고 한 것이다.

(2) 올바른 관련성에 대한 세밀한 분석

초등학교 5학년 수학 영재 학생 13명이 발견한 16과 36 사이의 관련성 내용 중 올바른 것을 여러 가지 형태로 분류할 수 있겠지만, 학생들이 발견한 것들의 개수가 많은 것

을 중심으로 대별하였다. 이하에서는 ① 배수에 관한 것, ② 약수에 관한 것, ③ 짝수에 관한 것, ④ 홀수에 관한 것, ⑤ 계산에 의한 것, ⑥ 수의 분류 및 표현에 관한 것, ⑦ 크기 비교와 측정에 관한 것, ⑧ 선행학습에 의한 것의 8개 종류로 대별하여 분석하기로 한다.

㈎ 배수에 관한 것

초등학교 5학년 수학 영재 학생들이 16과 36 사이의 관련성에 대하여 생각하고 발견한 것의 내용과 각각의 개수는 아래 [표 19]와 같다.

[표 19] 배수에 관한 내용 및 개수 <N=13>

번호	내 용	개수
1	4의 배수이다[4], 둘 다 4의 배수이다[1], 4의 배수다[5], 모두 4의 배수이다[1], 4로 나누어진다[1], 4로 나누어떨어진다[1]	13
8	2의 배수다[3], 모두 2의 배수이다[1], 2로 나누어떨어진다[1]	5
9	각 자리의 수를 곱한 것이 6의 배수이다[1], 일의 자리수와 십의 자리수를 곱한 것이 6의 배수이다[1], 각 자리수의 곱은 6의 배수이다[1], 각 자리수를 곱했을 때 6의 배수가 된다[1]	4
11	최소공배수가 144이다[1], 두 수의 최소공배수가 144이다[2], 16과 36의 최소공배수가 제곱수이다;144=12×12[1]	4
30	16의 배수는 8의 짝수 배수(16=8×2, 32=8×4, …)이고 36의 배수는 9의 배수 중 4의 배수다(36=9×4, 72=9×8, …)[1]	1
31	십의 자리와 일의 자리를 곱한 수도 2의 배수이며 3의 배수이다[1]	1
33	16과 36의 공배수는 144, 288, 432, …이다[1]	1
51	1의 배수이다[1]	1
58	각 자리수의 합의 최소공배수가 63이다[1]	1
	합 계	31

이하의 표들에서 나타나는 내용 중의 [ ] 안의 수는 학생들이 관련지운 개수를 나타낸다. [표 19]에서 보는 바와 같이, 번호 1의 4의 배수에 관한 것이 13개로 가장 많았고, 공배수와 최소공배수에 관한 것이 많음을 알 수 있다.

㈏ 약수에 관한 것

5학년 수학 영재 학생들이 16과 36 사이의 관련성에 대하여 생각하고 발견한 것의 내용과 각각의 개수는 아래 [표 20]과 같다.

[표 20] 약수에 관한 내용 및 개수 <N=13>

번호	내 용	개수
10	둘의 약수의 개수가 홀수이다[1], 모두 약수의 개수가 홀수이다[1], 약수의 개수가 홀수이다[1], 약수의 개수가 홀수 개이다[1]	4
18	십의 자리수가 일의 자리수의 약수이다[1], 일의 자리수가 십의 자리수로 나누어떨어진다[1], 일의 자리수를 십의 자리수로 나머지 없이 나눌 수 있다[1]	3
22	둘 다 약수에 1, 2, 4가 들어간다[1], 16과 36의 공약수는 1, 2, 4이다[1]	2
23	최대공약수가 4이다[2]	2
24	약수에 4가 있다[1], 4를 공약수로 가지고 있다[1]	2
29	36의 약수가 16의 약수보다 많다[1]	1
60	두 수의 모든 약수의 합도 31, 91로 홀수이다[1]	1
50	서로소가 아니다[1]	1
	합 계	16

[표 20]에서 보는 바와 같이, 16의 약수는 {1, 2, 4, 8, 16}의 5개이고, 36의 약수는 {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36}의 9개이므로 이것을 생각하고 두 수의 약수의 개수가 홀수 개인 것을 가장 많이 사용하였다. 공약수와 최대공약수에 관해서도 많이 생각하고 있음을 알 수 있다.

㈐ 짝수에 관한 것

짝수와 관련하여 발견한 내용 및 개수는 아래 [표 21]과 같다.

[표 21] 짝수에 관한 내용 및 개수 <N=13>

번호	내 용	개수
2	짝수이다[4], 둘 다 짝수이다[1], 짝수다[4], 모두 짝수이다[1], 끝자리 수가 짝수다[1]	11
15	4, 6의 제곱이 16, 36인데 4, 6도 짝수이다[1], 제곱을 하는 4, 6 수들도 짝수다, 1+3=4, 6+6=12[1]	2
19	각 자리의 수에서 큰 수÷작은 수=2의 배수이다[1], 일의 자리수를 십의 자리수로 나눠도 짝수다[1]	2
25	두 자리 수는 두 자리 수끼리 한 자리 수는 한 자리 수끼리 더해도 짝수이다[1], 각 자리의 숫자를 더한 것이 짝수이다[1]	2
36	짝수×짝수로 나타낼 수 있다[1]	1
38	짝수÷짝수로 나타낼 수 있다[1]	1
39	두 자리들의 곱은 짝수다[1]	1
	합 계	20

번호 2는 직관적으로 보아 16과 36이 모두 짝수이므로, 학생들이 가장 쉽게 발견하였다고 생각된다. 이 외의 것들은 각 자리수의 계산을 이용하여 짝수의 관련성을 만들어 내는 경우가 많음을 알 수 있다.

㈑ 홀수에 관한 것

홀수와 관련하여 발견한 내용 및 개수는 아래 [표 22]와 같다.

[표 22] 홀수에 관한 내용 및 개수 <N=13>

번호	내 용	개수
5	두 수를 더하면 홀수가 된다[2], 일의 자리와 십의 자리를 더하면 둘 다 홀수가 된다[1], 두 자리들의 합이 홀수다[1], 각 자리의 합이 홀수이다[2]	6
14	십의 자리의 수가 홀수다[1], 십의 자리의 수가 홀수이다[1], 모두 홀수로 시작한다[1]	3
16	일의 자리에서 십의 자리를 빼면 모두 홀수이다[1],두 자리들의 차도 홀수다[1], 십의 자리수와 일의 자리수의 차는 홀수이다[1]	3
21	두 수를 거꾸로 쓰면 둘 다 홀수가 된다[1], 일의 자리수와 십의 자리수를 바꾸면 홀수다[1]	2
	합 계	14

[표 22]에서 보는 바와 같이, 번호 5와 16은 두 자리 수를 계산하여 홀수 관계를 만들어 내고, 번호 21은 자리수를 거꾸로 바꾸었을 때 홀수가 됨을 발견하고 있다.

㈒ 계산에 의한 것

앞에서 분류한 항목의 내용 중에도 계산에 의한 것이 많이 포함되어 있지만, 그것을 제외하고 계산을 사용하여 16과 36 사이의 관련성을 발견한 것의 내용과 개수는 아래 [표 23]과 같다.

[표 23] 계산에 의한 것의 내용 및 개수 <N=13>

번호	내 용	개수
7	5로 나누었을 때 나머지가 1이다[1], 5로 나누면 1이 남는다[1], 둘 다 5로 나누면 나머지가 1이 된다[2], 5의 배수에 1을 더한 수이다[1]	5
13	20이 차이난다[1], 16에 다가 20을 더하면 36이 되고 36에다가 20을 빼면 16이 된다[1], 두 수의 차는 20이다[1], 두 수의 차와 16과 더하면 36이 된다[1]	4
17	더하면 52가 된다[1], 두 수의 합은 52이다[1]	2
26	16하고 36에 10을 나누면 둘 다 6이 남는다[1], 10의 배수에 6을 더한 수가 된다[1]	2
37	네 소수의 곱으로 표현된다[1]	1
41	5를 곱하면 끝이 0이 된다[1]	1
42	7로 나누어떨어지지 않는다[1]	1
43	5를 빼면 소수가 된다[1]	1
44	1을 더하면 소수가 된다[1]	1
45	36은 16의 3배의 3/4이다[1]	1
46	두 제곱수의 곱으로 곱해진다[1]	1
54	16, 36, 56, 76, …되는 수열에서 7로 나누면 나머지가 2, 1, 0, 6, 5, 4, 3, …순으로 계속된다[1]	1
57	16, 36, 56, 76, …의 수열은 8로 16은 나눠지고 36은 안 나누어지는 형식이 계속된다[1]	1
59	두 수의 각 자리 수의 합은 16이다[1]	1
	합 계	23

[표 23]의 번호 7은 16과 36이 모두 직관적으로 5의 배수에서 1이 많은 수들이므로 학생이 많이 발견하였고, 두 수의 차에 대해서도 관련성을 찾아내었다. 번호 37은 $16=2\times2\times2\times2$, $36=2\times2\times3\times3$을 의미한 것이고, 번호 43과 44와 같이 5를 빼거나 1을 더하여 소수가 됨을 발견한 것도 좀 특이하며, 번호 45는 좀 더 복잡한 계산을 하여 발견한 관련성이고, 번호 54와 55는 선행학습에 의한 것인지 모르나 등차수열을 생각하여 계산한 것도 독특하다고 볼 수 있고, 번호 59는 16과 36의 각 수의 자리 수의 합, 즉 $1+6+3+6=16$이 됨을 의미한다.

(바) 수의 분류 및 표현

수의 구성이나 수의 종류에 착안하여 관련 지우려고 한 것, 수의 표현을 생각하여 관련성을 만든 것의 내용과 그 개수는 아래 [표 24]와 같다.

[표 24] 수의 분류 및 표현의 내용 및 개수 <N=13>

번호	내 용	개수
3	끝자리수가 6이다[2], 일의 자리 숫자가 6이다[3], 둘 다 육으로 끝난다[2], 모두 6으로 끝난다[1], 일의 자리에 6이 들어간다[2]	10
4	제곱수다[6], 둘 다 같은 수 곱셈이 가능하다(4×4, 6×6 모두 어떤 수의 제곱수이다)[1]	7
6	두 자리 수다[2], 둘 다 십의 자리다[1], 모두 두 자리 수이다[1], 두 자리 수이다[2]	6
12	모두 자연수이다[2], 자연수이다[1], 모두 양의 정수이다[1]	4
27	소수가 아니다[1]	1
35	홀수 1개와 짝수 1개로 이루어져 있다[1]	1
47	분수로 쓸 수 있다[1]	1
48	소수점 아래 0이 있는 것과 같다[1], 소수점이 없다[1]	2
55	2×□=16, 2×□=36으로 나타낼 때 □의 끝자리엔 항상 8이 붙는다(56, 76, 96, …도 마찬가지)[1]	1
	합 계	33

16과 36의 두 수 모두 끝자리수가 6이므로, 번호 3과 같이 공통적인 성질을 많은 학생들이 언급하고 있으며, 또한 번호4의 4×4와 6×6의 제곱수인 것도 많이 지적하였다. 번호 6과 12의 두 자리 수인 것과 자연수, 양의 정수라는 사실도 언급하였다.

(사) 크기 비교와 측정에 관한 것

16과 36의 두 수의 크기나 각 자리수의 크기를 비교하거나, 반올림이나 미터, 시간의 분등 측정과 관련지운 것의 내용과 개수를 분석한 것이 [표 25]이다.

[표 25] 크기 비교와 측정에 관한 내용 및 개수 <N=13>

번호	내 용	개수
20	일의 자리의 숫자가 더 크다[1], 십의 자리 숫자가 일의 자리 숫자보다 작다[1]	2
49	두 수에서 1과 3을 바꾸면 같은 수가 된다[1]	1
61	16<36[1]	1
32	둘 다 1의 자리에서 반올림하면 수가 올라간다[1]	1
56	두 수에 m를 붙여도 다자란 세퀘이아 나무보다 작다(세퀘이아 나무는 100m－130m)[1]	1
53	몇 시 몇 분으로 말할 때 둘 다 분으로 말할 수 있다[1]	1
	합 계	7

(아) 선행학습에 의한 것

초등학교 5학년 영재 학생들이 16과 36 사이의 관련성을 발견하고 만드는 것 중에는 아래 [표 26]과 같이 선행학습에 의한 것으로 생각되는 내용도 있었다.

[표 26] 선행학습에 의한 내용 및 개수 <N=13>

번호	내 용	개수
28	소인수분해가 된다[1]	1
34	제곱근이 짝수다[1]	1
39	제곱근이 두 개다(16 ; +4, －4, 36 ; +6, －6)[1]	1
52	이진법으로 나타내면 0의 개수가 똑같다[1]	1
	합 계	4

[표 26]과 같이 많은 개수는 아니지만 중학교 과정의 내용을 학습하고 16과 36 두 수 사이의 관련성을 만들고 있었다. 소인수 분해나 제곱근, 진법에 관한 내용을 초등학교 5학년 학생들이 이미 제대로 학습하고 있음을 알 수 있다.

이제까지 16과 36의 두 수 사이의 관련성에 대하여, 내용과 그 개수를 중심으로 조사·분석하고 탐구하였다. 이것 또한 전술한 [4 4 4 4＝0]의 계산식 만들기와 같이 다양한 사고 작용을 촉진하며 두 수 사이의 다양한 관련성을 만들어내고 있으므로 창조성의 평가 또한 거의 똑같이 적용할 수 있을 것이다.

Ⅳ. 결언 및 제언

전술한 바와 같이 우리나라의 초등학교 수학 영재교육은 그 역사가 일천하다고 볼 수 있으므로 지금도 학습 내용 및 자료, 지도 및 평가 방법 등 여러 영역에 대한 많은 연구가 필요하다고 생각한다.

본 연구자는 수학 영재교육에서 주안점을 창조성의 육성에 두고, 초등 영재 학생들에게도 다양하고 확산적인 사고활동을 촉진시키기 위한 자료를 개발하고 도입하려고 노력하고 있다. 이것은 수학교육에서 본 연구자의 연구 및 관심영역과 일치하며, 다양하며 확산적이고 발전적인 사고를 통해 창조성이 육성될 수 있다고 기대하기 때문이다.

이 연구에서는 평범한 과제이지만, 학생들에게 다양하고 확산적인 사고활동이 촉진될 수 있다고 생각되는 「다양한 식 만들기」와 「다양한 관련성 찾기」 과제에 대한 초등학교 5학년 수학 영재 학생들의 산출물을 중심으로 분석하고 평가 방법을 모색하였다.

이와 같은 연구를 통한 결론 및 제언을 정리하면 아래와 같다.

첫째, 초등학교 수학 영재 학생들은 다양하면서도 확산적인 사고활동으로 많은 양의 창조적인 산출물을 발견하고 만들 수 있음을 확인하였다.

둘째, 평범한 수학 내용일지라도 창조성 육성의 관점에서 재구성함으로써, 학생들의 창조성을 촉진할 수 있는 훌륭한 교재 개발이 가능함을 확인할 수 있었다.

셋째, 영재 학생들의 산출물에 대해, 창조성 평가 관점의 주된 속성으로 생각되는 유창성, 유연성, 독창성에 관하여 분석하였다. 통계적 분석 결과, 본 연구자의 창조성 평가 방법이 통계적으로도 적절하다는 것이 입증되었다.

넷째, 문제 만들기 및 오픈엔드 어프로치적인 학습·지도는 수학 영재교육에 적절한 교육 방법 중 하나라고 확신한다. 이와 같은 학습·지도는 영재 학생들의 다양한 사고 활동을 촉진할 수 있고 바람직한 영재교육의 성과를 기대할 수 있다고 생각된다.

다섯째, 초등 수학 영재교육을 위해서는 다양하고 확산적이며 발전적인 사고활동을 촉진하는 교재 개발을 위해 지속적인 노력이 요구된다.

이 연구에서는 영재 학생들의 산출물을 창조성의 관점에서 세밀한 분석을 시도하여 보았는데, 이를 통해, 영재 학생들의 특성과 능력을 더 깊이 파악할 수 있다고 생각되므로, 이러한 실제적인 연구의 집적이 필요하다고 생각된다. 이러한 수학 영재 학생들의 평가 방법에 대한 연구가 집적되면, 평가 기준이 확립될 수 있고, 더 나아가 수학 영재교육을 위한 교재 및 자료 개발과 학습·지도 방법 및 영재 선발 도구 개발 등 수학 영재교육 체계화에 기여할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

나귀수 (1999). 수학 영재교육에 대한 개관. **학교수학, 1**(2), 785-797.

이종재 발행 (2004). **영재교육 백서 2004.** 한국교육개발원 연구자료 RM 2004-64.

임문규 외 2인 (2001). **초등 수학과 교수·학습 모형 및 자료 개발 -초등 수학교육에서 문제 만들기 교수·학습의 체계화 및 자료 개발 .** 1999년도 교육부 지원 교과 교육 공동 연구 결과보고서.

최문경, 박정옥 (2004). 영재교육에 대한 초등학교 교사들의 인식. **영재교육연구, 14**(4), 125-149.

林文圭 (1989, a). 數學教育における問題解決學習の研究一創造性育成の觀點から一、西日本數學教育學會, *「數學教育研究紀要」*, 第15號, 131-136.

林文圭 (1989, b). *「數學教育における問題解決學習の研究-問題設定の教授=學習について-」*. 廣島大學大學院 教育學 研究科 修士論文.

平林一榮 (1975). 算數・數學教育のシツエーション、*廣島大學出版研究會.* 133.

島田 茂 (1977). *「算數 數學のオープンエンド アプローチ」*. 圖書出版.

竹内芳男,澤田利夫編著 (1984). *「問題から問題へ」*. 東洋館出版社.

齊藤 昇,秋田美代 (2001). 算數教育における兒童の創造性の發達に關する研究一小學3・4・5・6年生を對象として一、*日本全國數學教育學會誌數學教育研究, 第7卷,* 19-30.

Brown, S. I. & Walter, M. I. (1983). *The art of problem posing.* The Franklin Institute Press.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating-where do good problems come from? In A. H. schoenfeld(Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education*(123-147), Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Haylock. Derek W. (1987). "A framework for assessing mathematical creativity in schoolchildren". *Educational Studies in Mathematics, 18*(1), 59-74.

<Abstract>

A Study on Analyzing and Assessing the Divergent Products of the Mathematically Gifted 5th Grade Students in Elementary Schools

Lim, Mun-Kyu[2)]

As it is not long since the gifted education was implemented in elementary school, it is necessary to accumulate the practical studies on the mathematically gifted education.

This paper focused on enhancing creativity by providing the various and divergent thinking activities for mathematically gifted students.

For this purpose, I prepared two mathematics problems, <posing the various calculating equations> and <finding the relations between two numbers>, and let the mathematically gifted 5th grade students solve them. After that, I investigated to analyse their reactions in detail and tried to find the methods for assessing their divergent products.

Finally, I found that they could pose various and meaningful calculating equations and also identify the various relations between two numbers.

I expect that accumulating these kinds of practical studies will contribute to the developments of gifted education, in particular, instructions, assessments, and curriculum developments for the mathematically gifted students in elementary schools.

Keywords: mathematically gifted children in elementary schools, mathematical gifted education in elementary schools, products of gifted children, various and divergent thinking, creativity, analysis and assessment

2) lmk@gjue.ac.kr