

## Mohr-Coulomb 암반에 굴착된 원형 터널의 변형률연화 거동해석

이연규<sup>1)\*</sup>

### Strain-Softening Behavior of Circular Tunnel Excavated in Mohr-Coulomb Rock Mass

Youn-Kyou Lee

**Abstract** Calculating the distribution of stresses and displacements around a circular tunnel excavated in infinite isotropic rock mass subjected to hydrostatic stress condition is one of the basic problems in rock engineering. While closed-form solutions for the distribution are known if rock masses are considered as elastic, perfectly plastic, or brittle-plastic media, a few numerically approximated solutions based on various simplifying assumptions have been reported for strain-softening rock mass. In this study, a simple numerical method is introduced for the analysis of strain-softening behavior of the circular tunnel in Mohr-Coulomb rock mass. The method can also applied to the analysis of the tunnel in brittle-plastic or perfectly plastic media. For the brittle-plastic case where closed-form solution exists, the performance of the present method is verified by showing an excellent agreement between two solutions. In order to demonstrate the strain-softening behaviors predicted by the proposed method, a parameter study for a softening index is given and the construction of ground reaction curves is carried out. The importance of defining the characteristics of dilation in plastic analysis is discussed through analyzing the displacements near the surface of tunnel.

**Key words** Strain-softening, Elasto-plastic analysis, Circular tunnel, Mohr-Coulomb rock mass

**초 록** 정수압 상태의 등방 무한 매질에 원형 터널이 굴착될 때 터널 주변부에서 발생하는 응력 및 변위 분포를 해석하는 것은 암반공학의 가장 기본적인 문제들 중의 하나이다. 암반을 탄성, 완전소성, 취성-소성 거동체로 가정한 경우 응력 및 변위 분포에 대한 정해가 알려져 있다. 그러나 변형률연화를 가정한 경우는 정해가 존재하지 않으며 여러 가지 가정에 기초한 수치해석적 근사해들이 보고되고 있을 뿐이다. 이 연구에서는 Mohr-Coulomb 암반을 대상으로 이러한 원형 터널의 변형률연화 거동을 간단하게 해석할 수 있는 수치해석 방법을 소개하였다. 이 방법은 변형률연화 거동 뿐만 아니라 취성-소성 및 완전소성 거동의 해석에도 적용이 가능하다. 정해가 알려진 취성-소성 거동의 검증을 통하여 제안된 모델의 정확성을 입증하였다. 변형률연화 거동해석 예로서 연화지수에 대한 매개변수 해석을 실시하였고 지반반응곡선을 작성하였다. 탄소성 해석시 터널 주변의 변위 분포 특성은 소성영역의 체적팽창성에 크게 영향을 받음을 알 수 있었다.

**핵심어** 변형률연화, 탄소성해석, 원형터널, Mohr-Coulomb 암반

## 1. 서 론

정수압 상태의 초기지압이 작용하고 있는 무한 등방 암반에 원형 공동을 굴착할 때 공동주변에서 발생하는 변위 및 응력의 분포를 계산하는 것은 오랫동안 암반공

학 분야의 기본 문제로 다루어져 오고 있다. 이는 TBM 굴착단면의 해석, 지반반응곡선(Ground Reaction Curve, GRC)의 도시, 수치해석코드의 검증 등을 포함한 다양한 목적에 응용되고 있다. 평면변형률(plane strain) 조건을 가정하면 이 문제는 공동 중심으로부터의 반경거리를 지배방정식의 변수로 하는 일차원 축대칭(axisymmetric) 문제로 간략화 시킬 수 있으며, 가정한 암반 거동모델에 따라 다양한 해가 얻어진다.

정수압 하의 무한 평면 내에 존재하는 원형공동 주변의

<sup>1)</sup> 군산대학교 해양시스템공학전공 부교수

\* 교신저자 : kyoulee@kunsan.ac.kr

접수일 : 2006년 11월 29일

심사 완료일 : 2006년 12월 18일

변위 및 응력분포에 대한 탄성해는 탄성학 교재들에서 다루어지고 있는 두꺼운 원통(thick wall cylinder) 문제의 해(Timoshenko & Goodier, 1982)를 응용하여 얻을 수 있다(Brady & Brown 1985). 탄소성 해석 시에는 항복함수, 소성유동법칙(plastic flow rule), 파괴 후(post-failure) 거동모델의 선정에 따라 해석 결과에 차이를 보이게 된다. 암반공학에서 흔히 사용되고 있는 항복함수로는 Mohr-Coulomb(M-C) 조건식과 Hoek-Brown(H-B) 조건식(Hoek & Brown, 1980)을 들 수 있다.

항복영역에서 응력 및 변위의 분포, 항복영역의 넓이는 파괴 후 거동모델 모델의 종류에 따라 크게 좌우될 수 있으므로 파괴 후 거동모델의 선정은 암반공학적 설계과정에서 매우 중요하다. Hoek & Brown(1998)은 많은 수치해석 경험을 바탕으로 암질에 따라 항복 이후 거동을 Fig. 1과 같이 3가지 형태로 구분하는 것을 제안하였다. Fig. 1 (a)는 취성-소성(brittle-plastic) 모델로서 암질이 매우 양호한 경암에 적용될 수 있다. Fig. 1 (b)는 변형률연화(strain softening) 모델로서 항복 이후 잔류강도까지 점차적으로 강도의 저하가 발생한다. 변형률연화 모델은 보통 암질의 암반에 적용할 수 있다. 반면에 Fig. 1 (c)는 항복 이후 강도저하가 없이 완전소성(perfectly plastic) 거동을 하는 모델로서 암질이 매우 불량한 연암에 적용될 수 있다.

M-C 매질이나 H-B 매질에 굴착된 원형 공동에 대한 2차원 축대칭 탄소성 문제에서 완전소성 거동이나 취성-소성 거동에 대한 해석적 정해들(closed-form solution) (Florence & Schwer, 1978; Carranza-Torres & Fairhurst, 1999; Carranza-Torres, 2004; Park & Kim, 2006)이나 근사적 해석해들(Wang, 1996; Sharan, 2003)은 알려져 있으나, 변형률연화 모델의 경우는 거동의 복잡성 때문에 수치해석적 방법들(Brown et al., 1983; Alonso et al., 2003; Varas et al., 2005) 만이 매우 제한적으로 사용되고 있다. Brown et al.(1983)의 연구는 소성영역 내 모든 점에서 동일한 탄성변형률을 가정함으로써 예측된 변위가 실제 값보다 작게 나타나는 문제점을 가지고

있다. Alonso et al.(2003)의 자기상사성(self-similarity)을 이용한 수치해석 해는 이론적 측면에서 정교한 점은 있지만 그 복잡성 때문에 실용적 측면에서는 의문이 있다. 한편 Varas et al.(2005)의 연구에서는 변형률연화 거동에 수반될 수 있는 분기(bifurcation) 현상이 암반의 소성거동에 영향을 줄 수 있음을 수치해석적으로 증명하였다.

앞서 언급하였듯이 보통 암질의 암반에서는 변형률연화 거동을 나타내는 경우가 많으므로 수치해석을 통한 항복영역의 범위, 응력 및 변위 분포의 정확한 예측은 암반공학적 설계과정에서 매우 중요하고 또 어려운 작업의 하나이다. 이러한 필요성에 따라 이 연구에서는 Lee & Pietruszak(2006)이 개발한 H-B 암반의 변형률연화 해석개념을 M-C 암반에 적용하여 원형 공동의 축대칭 탄소성 거동을 해석하는 방법을 제시하였다. 제안된 방법에서는 Alonso et al.(2003)의 방법과 같이 복잡한 미분방정식의 수치해석적 근사법을 사용하지 않고도 간단히 원형터널의 변형률연화 거동을 정밀하게 해석할 수 있도록 하였다.

원형 동공 주변을 둘러싸고 있는 항복영역을 유한개의 고리(ring)로 분할한 후 외부 고리부터 차례로 유한차분 근사를 이용하여 항복조건, 응력 평형조건식(equilibrium equation), 변위 적합조건식(compatibility equation)이 만족되도록 응력 및 변위증분을 계산하였다. 변형률연화 거동에서 강도정수인 내부마찰각(internal friction angle,  $\phi$ )과 점착강도(cohesion,  $c$ )는 변형률연화 지수의 증가에 따라 선형적으로 감소하는 것을 가정하였다.

제안된 방법의 검증을 위해 몇 가지 해석 예들을 제시하였다. 먼저 정해가 알려진 취성-소성 모델에 대해 검증을 실시하였다. 소성영역을 분할하는 고리의 수가 많아질수록 해석해가 정해에 가까워짐을 보였다. 변형률연화 거동에 대한 해석을 통하여 터널 주변의 응력 및 변위 분포가 취성-소성 거동의 경우와 다르게 나타남을 보였다. 마지막으로 제안된 모델의 적용성을 보여주는 예제로서 변형률연화 암반에 굴착된 원형터널의 지반반응곡선을 구하

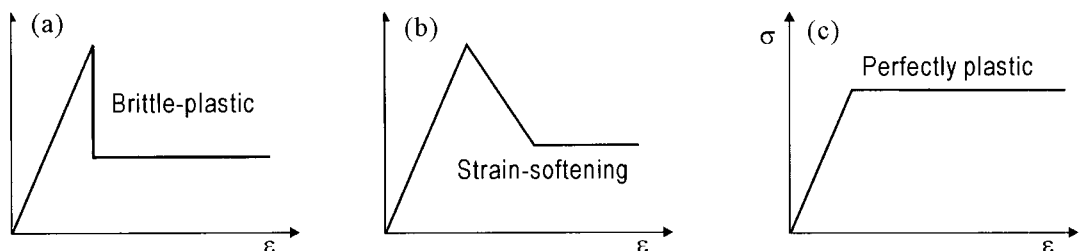


Fig. 1. Post-failure models. (a) Brittle-plastic model for very good quality hard rock mass. (b) Strain-softening model for average quality rock mass. (c) Perfectly plastic model for very poor quality soft rock mass

고, 이 곡선의 형태에 큰 영향을 미치는 소성영역의 체적 팽창 특성에 대해 논의를 하였다.

## 2. 해석모델의 선정

### 2.1 변형률연화 모델

Fig. 2는 이 연구에서 설정한 압반의 탄소성 거동모델을 보여준다. 최고강도에 이르기까지는 탄성거동을 가정하였다. 가정한 모델에서 최고강도 이후에는 어느 정도의 변형률연화 거동이 진행된 후 최대주응력 방향의 소성변형률  $\varepsilon_1^p$ 이 특정값  $\bar{\varepsilon}_1^p$ 에 도달하면 잔류거동을 하게 된다. 따라서 이 연구에서는  $\varepsilon_1^p$ 가 소성연화지수로 사용되었다. 항복상태에서 체적팽창(dilation) 법칙은 Fig. 2 (b)와 같이 변형률연화 구간과 잔류거동 구간에 대해 달리 적용하였다. 각 구간에서 최소주응력 방향의 소성변형률 증분( $d\varepsilon_3^p$ )은 최대주응력 방향의 소성변형률 증분( $d\varepsilon_1^p$ )과 다음과 같은 비례관계에 있다고 가정하였다.

$$d\varepsilon_3^p = -\eta d\varepsilon_1^p \quad (0 < \varepsilon_1^p < \bar{\varepsilon}_1^p) \quad (1)$$

$$d\varepsilon_3^p = -\xi d\varepsilon_1^p \quad (\varepsilon_1^p \geq \bar{\varepsilon}_1^p) \quad (2)$$

식 (1)과 식 (2)에서  $\eta$ ,  $\xi$ ,  $\bar{\varepsilon}_1^p$ 는 실험적으로 결정되어야 할 상수이다. 항복함수와 동일한 형태의 소성포텐셜(plastic potential function) 함수를 사용할 경우

$$\eta(\text{or } \xi) = \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi} \quad (3)$$

으로 표현할 수 있다. 식 (3)의  $\varphi$ 는 팽창각(dilation angle)으로서  $\varphi \neq \phi$ 이면 소성유동법칙은 연상유동법칙(associated flow rule)이 되고,  $\varphi = \phi$ 이면 비연상유동법칙(nonassociated flow rule)이 된다.  $\eta=1$ ,  $\xi=1$ 인 경우에는 체적팽창이 일어나지 않음을 의미하여 이들 값

이 1보다 클 때에는 소성변형에 의한 체적팽창이 발생하게 된다.

M-C 압반에서 초기 항복조건은 Fig. 2 (c)에서 볼 수 있는 바와 같이 최대 주응력  $\sigma_1$ 과 최소 주응력  $\sigma_3$ 의 선형 관계식으로 다음과 같이 표시된다.

$$\sigma_1 = N_p \sigma_3 + Y_p \quad (4)$$

여기서

$$N_p = \frac{1 + \sin\phi_p}{1 - \sin\phi_p}; \quad Y_p = \frac{2c_p \cos\phi_p}{1 - \sin\phi_p}; \quad (5)$$

식 (5)에서  $\phi_p$ 는 최대 내부마찰각이고,  $c_p$ 는 최대 점착강도이다. 반면에 잔류거동은 완전 소성거동으로써 잔류마찰각  $\phi_r$ 과 잔류점착강도  $c_r$ 가 상수 값을 유지하는 것으로 가정하였으며 이를 이용한 항복조건식은 다음과 같이 표시된다.

$$\sigma_1 = N_r \sigma_3 + Y_r \quad (\varepsilon_1^p \geq \bar{\varepsilon}_1^p) \quad (6)$$

여기서

$$N_r = \frac{1 + \sin\phi_r}{1 - \sin\phi_r}; \quad Y_r = \frac{2c_r \cos\phi_r}{1 - \sin\phi_r} \quad (7)$$

변형률연화 거동 시에는 내부마찰각과 점착강도가 소성연화지수  $\varepsilon_1^p$ 의 증가에 따라 선형적으로 감소하는 것으로 가정하였다. 즉,

$$\phi' = \phi_p - (\phi_p - \phi_r) \frac{\varepsilon_1^p}{\bar{\varepsilon}_1^p}; \quad c' = c_p - (c_p - c_r) \frac{\varepsilon_1^p}{\bar{\varepsilon}_1^p} \quad (8)$$

따라서 변형률연화 거동시 항복조건식은 다음과 같이 기술될 수 있다.

$$\sigma_1 = N' \sigma_3 + Y' \quad (0 \leq \varepsilon_1^p \leq \bar{\varepsilon}_1^p) \quad (9)$$

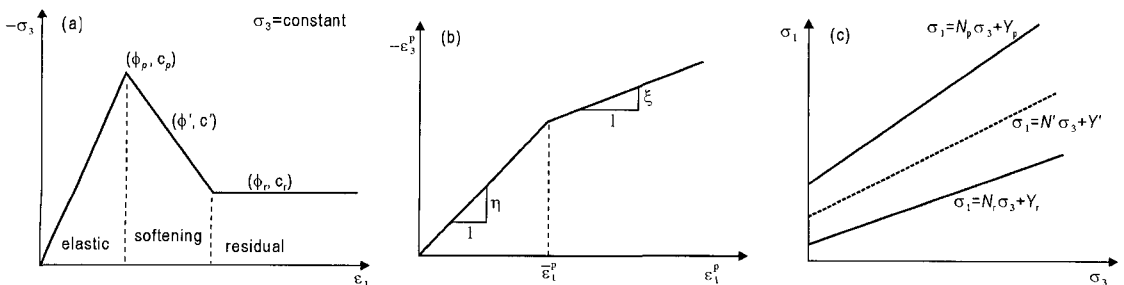


Fig. 2. Strain-softening model for Mohr-Coulomb medium. (a) Stress-strain relation. (b) Dilation. (c) Yield functions

여기서

$$N' = \frac{1 + \sin \phi'}{1 - \sin \phi'}; Y' = \frac{2c' \cos \phi'}{1 - \sin \phi'} \quad (10)$$

한편 설정한 변형률연화 모델에서  $\phi_r = \phi_p$  이고  $c_r = c_p$  이면 완전소성 모델에 해당되며,  $\bar{\epsilon}_r^p = 0$  으로 가정하면 취성-소성 거동모델에 해당됨을 주목할 필요가 있다.

2.2 해석모델

이 해석의 목적은 변형률연화 압반에 원형 공동이 굴착되었을 때 공동 주변에 발생하는 소성영역에서 응력 및 변위의 분포를 수치해석적으로 계산하는 것이다. 정수압 상태의 초기 지압이 작용하고 있는 무한 등방의 M-C 압반에 Fig. 3과 같이 직경  $a$  인 원형 공동이 굴착되는 경우를 가정하면 초기지압( $\sigma_0$ ), 지보압( $p_i$ ), 강도정수( $c, \phi$ )에 따라 공동 주변에는 고리 모양의 항복영역이 형성될 수 있다. 공동 주변에 항복영역이 형성되기 시작하는 한계 지보압  $p_{ic}$  은 다음 식으로부터 계산할 수 있다(Brady & Brown, 1985).

$$p_{ic} = \frac{2\sigma_0 - Y_p}{N_p + 1} \quad (11)$$

변형률연화 모델을 적용할 경우 소성영역은 다시 변형률연화 거동 영역( $R_s \leq r \leq R_p$ )과 잔류거동 영역( $a \leq r \leq R_s$ )으로 구분될 수 있다. Fig. 3에서  $r = R_p$  는 탄성-소성 경계로서 여기에서는 식 (4)의 항복조건이 만

족되어야 한다. 변형률연화 영역과 잔류거동 영역에서는 각각 식 (9)와 식 (6)이 항복조건식을 만족해야 된다.

평면변형률 조건을 가정한 후 설정한 모델의 대칭성을 고려하면 해석모델은 일차원 축대칭 문제로 단순화시킬 수 있다. 이 경우 반경방향 수직응력( $\sigma_r$ )과 원주방향 수직응력( $\sigma_\theta$ )이 각각 최소 및 최대주응력이 되므로 설정한 모델에서는  $\sigma_1 = \sigma_\theta, \sigma_3 = \sigma_r$  이 된다. 그러므로 가정한 모델의 평형조건식은

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (12)$$

이고 변형률-변위 관계식은

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr}; \epsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (13)$$

이 된다. 식 (13)에서  $u$  는 반경방향의 변위이다.

한편 Fig. 3의 탄성-소성 경계부에 작용하는 반경방향 수직응력  $\sigma_R$  은 이론적으로 계산하는 것이 가능하다. 이 지점은 항복의 시작점인 동시에 탄성응력 분포의 경계라는 점을 고려하면  $\sigma_R$  은 다음과 같이 계산할 수 있다 (Brady & Brown, 1985).

$$\sigma_R = \sigma_r(R_p) = \frac{2\sigma_0 - Y_p}{N_p + 1} \quad (14)$$

취성-소성 모델이나 완전소성 모델의 경우 항복영역

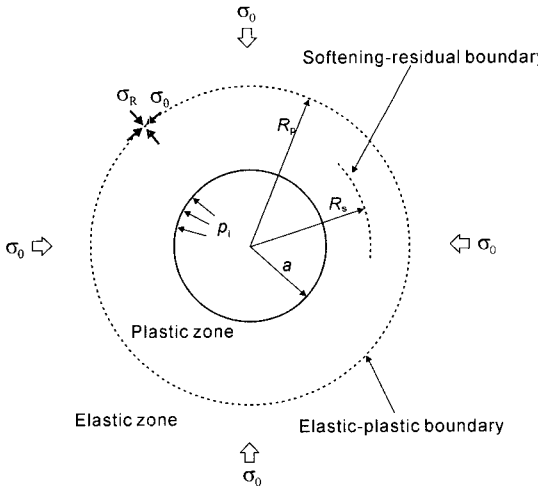


Fig. 3. Plastic zone formed around circular opening.  $R_p$  = the radius of elastic-plastic interface.  $R_s$  = the radius of softening-residual interface

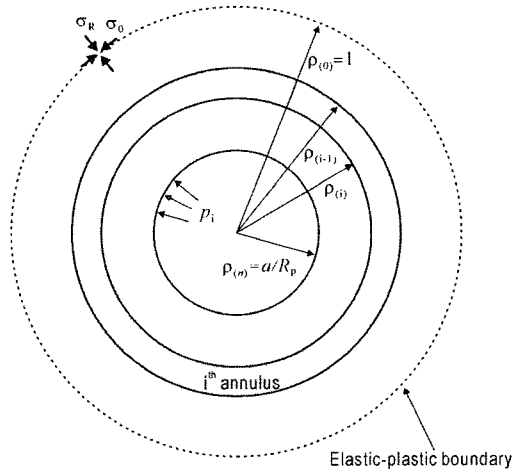


Fig. 4. Definition of  $i$ th annulus in plastic zone

에서 발생하는 응력과 변위분포 그리고  $R_p$  에 대한 해석적 정해가 알려져 있다(Park & Kim, 2006). 그러나 변형률연화 모델에서는 거동의 복잡성 때문에 대응되는 해석해들이 존재하지 않으며 적절한 수치해석적 방법들을 활용한 근사적 계산만이 가능하다. Brown et al.(1983) 과 Alonso et al.(2003)을 대표적인 예로 들 수 있다.

### 3. 수치 근사해

#### 3.1 응력 및 변형률 경계조건

Fig. 4와 같이 소성영역이  $n$ 개의 동심 고리들로 분할되어 있고  $i$ 번째 고리는  $R_p$ 로 정규화된 반경  $\rho_{(i-1)} = r_{(i-1)}/R_p$  과  $\rho_{(i)} = r_{(i)}/R_p$ 의 원들이 각각 외부 및 내부 경계가 된다고 가정하였다. 소성영역의 외부 경계에서는  $\rho_{(0)} = 1$ 이고 여기에 작용하는 탄성 응력 및 변형률 성분은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{r(0)} \\ \sigma_{\theta(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_R \\ 2\sigma_0 - \sigma_R \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{r(0)} \\ \varepsilon_{\theta(0)} \end{Bmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{Bmatrix} -q \\ q \end{Bmatrix} \quad (16)$$

여기서  $\nu$ 는 포아송비이고  $E$ 는 Young's modulus 이며,

$$q = \frac{(N_p - 1)\sigma_0 + Y_p}{N_p + 1} \quad (17)$$

한편 소성영역의 내부 경계인 굴착면에서는  $\rho_{(n)} = a/R_p$  이고 여기에 작용하는 응력성분은

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{r(n)} \\ \sigma_{\theta(n)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_i \\ N \cdot p_i + Y \end{Bmatrix} \quad (18)$$

식 (18)에서  $N$ 과  $Y$ 는 상황에 따라 연화거동 혹은 잔류거동에 해당하는 값이 될 수 있다.

#### 3.2 응력증분 및 탄성 변형률증분

소성영역에서  $\sigma_r$ 은 내부 쪽으로 단조감소하며 또 외부 및 내부 경계에 작용하는  $\sigma_r$ 의 값이 각각  $\sigma_R$ ,  $p_i$ 이므로  $i$ 번째 고리에서의 증분은 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$\Delta\sigma_{r(i)} = \frac{p_i - \sigma_R}{n} \quad (19)$$

그러므로  $i$ 번째 동심원에서 반경방향 수직응력의 크

기는 다음과 같다.

$$\sigma_{r(i)} = \sigma_{r(i-1)} + \Delta\sigma_{r(i)} \quad (20)$$

식 (20)에 의해  $\sigma_{r(i)}$ 가 결정되면  $i$ 번째 동심원에서 원주방향 수직응력  $\sigma_{\theta(i)}$ 는 항복함수를 이용하여 구할 수 있으므로 응력증분은 다음과 같이 계산된다.

$$\Delta\sigma_{\theta(i)} = \sigma_{\theta(i)} - \sigma_{\theta(i-1)} \quad (21)$$

여기서

$$\sigma_{\theta(i)} = N_{(i)}\sigma_{r(i)} + Y_{(i)} \quad (22)$$

$n$ 이 충분히 크다면 식 (22)에서  $N_{(i)} \approx N_{(i-1)}$ ,  $Y_{(i)} \approx Y_{(i-1)}$ 로 가정할 수 있다.

대응되는 탄성변형률 증분은 Hooke의 법칙을 이용하여 응력증분으로부터 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{r(i)} \\ \Delta\varepsilon_{\theta(i)} \end{Bmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu \\ -\nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\sigma_{r(i)} \\ \Delta\sigma_{\theta(i)} \end{Bmatrix} \quad (23)$$

#### 3.3 반경방향 변위의 계산

충분히 큰  $n$ 을 가정하면 평형방정식 식 (12)는 다음과 같은 유한차분식으로 근사시킬 수 있다.

$$\frac{\sigma_{r(i)} - \sigma_{r(i-1)}}{r_{(i)} - r_{(i-1)}} + \frac{(1 - N_{(i-1)})(\sigma_{r(i)} + \sigma_{r(i-1)}) - 2Y_{(i-1)}}{r_{(i)} + r_{(i-1)}} = 0 \quad (24)$$

그러므로  $i$ 번째 정규화반경  $\rho_{(i)}$ 는  $(i-1)$ 번째 정규화반경  $\rho_{(i-1)}$ 과 다음의 관계가 있음을 알 수 있다.

$$\rho_{(i)} = \frac{\sigma_{r(i-1)} - N_{(i-1)}(\sigma_{r(i)} + \sigma_{r(i-1)})/2 - Y_{(i-1)}}{\sigma_{r(i)} - N_{(i-1)}(\sigma_{r(i)} + \sigma_{r(i-1)})/2 - Y_{(i-1)}} \rho_{(i-1)} \quad (25)$$

한편 소성이론에 의하면 소성영역에서 총변형률은 탄성 성분과 소성성분의 합으로 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r^e \\ \varepsilon_{\theta}^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_r^p \\ \varepsilon_{\theta}^p \end{Bmatrix} \quad (26)$$

또 변위 변형률 관계식 (13)에 의해 변위 적합조건식은 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{d\varepsilon_{\theta}}{dr} + \frac{\varepsilon_{\theta} - \varepsilon_r}{r} = 0 \quad (27)$$

식 (23), 식 (25), 식 (26)을 고려하여 식 (27)을 유한 차분식으로 근사시키면 소성변형률 증분  $\Delta \varepsilon_{\theta(i)}^p$ 의 표현식은 다음과 같이 유도될 수 있다.

$$\left( \frac{1}{\Delta \rho_{(i)}} + (1+h) \frac{1}{\rho_{(i)}} \right) \Delta \varepsilon_{\theta(i)}^p = - \frac{\Delta \varepsilon_{\theta(i)}^e}{\Delta \rho_{(i)}} - \frac{(1+\nu)}{E} \frac{(N_{(i-1)} - 1)(\sigma_{r(i)} + \sigma_{r(i-1)})/2 + Y_{(i-1)}}{\rho_{(i)}} - \frac{1}{\rho_{(i)}} (\varepsilon_{\theta(i-1)}^p - \varepsilon_{r(i-1)}^p) \quad (28)$$

여기서  $\bar{\rho}_{(i)} = (\rho_{(i-1)} + \rho_{(i)})/2$ 이다. 또한  $\varepsilon_{\theta}^e < \bar{\varepsilon}_{\theta}^e$ 이면  $h = \eta$ 이고  $\varepsilon_{\theta}^e \geq \bar{\varepsilon}_{\theta}^e$ 이면  $h = \eta$ 이다.  $\Delta \varepsilon_{\theta}^e$ 는 관계식 (1) 또는 관계식 (2)를 이용하여 구할 수 있다. 따라서  $i$  번째 동심원에서 총 변형률이 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{r(i)} \\ \varepsilon_{\theta(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{r(i-1)} \\ \varepsilon_{\theta(i-1)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_{r(i)}^e \\ \Delta \varepsilon_{\theta(i)}^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_{r(i)}^p \\ \Delta \varepsilon_{\theta(i)}^p \end{Bmatrix} \quad (29)$$

변형률-변위 관계식 (13)에서  $\varepsilon_{\theta} = u/r$  이므로 각 동심원에서의 정규화 반경변위  $U_{(i)}$ 를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$U_{(i)} = \varepsilon_{\theta(i)} \rho_{(i)} \quad (30)$$

여기서  $U_{(i)} = u_{(i)}/R_p$ 이다.

$n$  번째 동심원의 반경은 굴착면의 반경  $a$ 에 해당하고 여기에서는  $\sigma_r = p_i$ 이므로 다음의 관계식으로부터 소성 영역의 반경  $R_p$ 를 얻을 수 있다.

$$R_p = \frac{a}{\rho_{(n)}} \quad (31)$$

또한 변형률연화-잔류거동 반경  $R_s$ 는  $\varepsilon_{\theta}^e$ 가  $\bar{\varepsilon}_{\theta}^e$ 에 도달한 지점의 정규화 반경  $\rho$ 와  $R_p$ 를 이용하여 계산할 수 있다.

$R_p$ 가 계산되었으므로 각 동심원에서의 실제 반경방향 변위  $U_{(i)}$ 는 다음의 관계식을 이용하여 구할 수 있다.

$$u_{(i)} = U_{(i)} R_p \quad (32)$$

$n$ 의 값이 커질수록 식 (32)로 예측된 반경방향 변위는 정해에 가까워지게 된다.

### 3.4 탄성영역의 거동

탄성영역의 응력 및 변위 분포는 탄성이론에 의해 구할 수 있으며 그 결과는 다음과 같다.

$$\sigma_r(r) = \sigma_0 - (\sigma_0 - \sigma_R) \left( \frac{R_p}{r} \right)^2 \quad (33)$$

$$\sigma_{\theta}(r) = \sigma_0 + (\sigma_0 - \sigma_R) \left( \frac{R_p}{r} \right)^2 \quad (34)$$

$$u(r) = \frac{R_p^2}{r} \frac{1+\nu}{E} (\sigma_0 - \sigma_R) \quad (35)$$

## 4. 수치 근사해의 검증

### 4.1 취성-소성 거동

정해(closed-form solution)가 알려진 취성-소성 거동에 대해 제안된 수치해석 모델의 신뢰성을 검증하였다. 취성-소성 및 완전소성 거동은 변형률연화 거동의 특수한 형태로 간주할 수 있다. 모델에서  $\bar{\varepsilon}_{\theta}^e = 0$ 이고  $\phi_r \leq \phi_p$ ,  $c_r \leq c_p$ 이면 취성-소성 혹은 완전소성 거동해석 모델이 된다. 정수압 상태의 초기지압이 작용하는 무한 등방 M-C 압반에 굴착된 원형공동의 탄성-취성 거동에 대한 정해는 Park & Kim(2006)의 연구에서 찾아볼 수 있다. 해석에 이용된 입력자료를 Table 1에 나타내었다. 소성 영역을 분할하는 고리의 개수 즉  $n$ 은 각각 20, 50, 100, 200, 500 인 5가지 경우를 가정하여  $n$ 의 증가에 따라 해석해가 정해에 근접하는가를 검토하였다.

Fig. 5는 소성영역에서  $n$ 값 및 팽창각( $\varphi$ )의 변화에 따른 반경방향 변위  $u$ 의 오차인  $(u - u_{exact})/u_{exact}$ 를 백분율로 나타내었다.  $n = 500$ 에서 계산한 소성반경은  $R_p = 11.363m$  ( $r/a = 2.273$ )으로 나타났고, 이는 이론적 계산치와 거의 일치하고 있다. Fig. 5에서 볼 수 있듯이  $n$ 이 커질수록 변위 해석 오차는 급격히 줄어들고 있음을 볼 수 있다.  $\xi = 1$ 의 경우 터널 벽면( $r/a = 2.273$ )에서의 변위 오차는  $n = 20$ 일 때 11.359% 였으나  $n = 500$ 일 때는 0.388%로 현저히 줄어들어 해석 결과가 정해에 매우 가까워졌음을 보여주고 있다. 체적팽창각의 영향을 살펴보면 체적팽창각이 0인 경우( $\xi = 1$ )에 비해 체적팽창각이 30°( $\xi = 3$ )인 경우가 상대적으로 더 큰 오차가 발생됨을 볼 수 있다.  $n = 500$ 인 경우 터널 벽면에서 반경방향 변위 오차는  $\xi = 1$ 일 때 0.388% 인데 비교하여  $\xi = 3$ 일 때는 1.316%로 다소 높은 값을 보이고 있다. 체적팽창각이 커지는 경우 터널 주변에 더 큰 변위가 발생하며 변위의 구배도

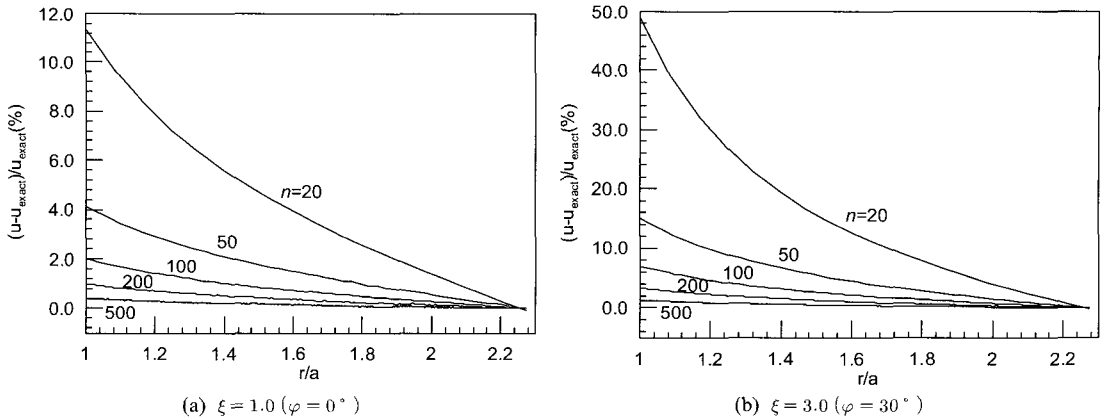


Fig. 5. Approximation errors in radial displacements

Table 1. Input data for the verification of brittle-plastic behavior

Parameter	Value	Parameter	Value
Radius of tunnel ( $a$ )	5.0 m	Internal friction angle ( $\phi$ )	$\phi_p = 30^\circ$ $\phi_r = 26^\circ$
Initial stress ( $\sigma_0$ )	3.0 MPa	Cohesion ( $c$ )	$c_p = 0.5$ MPa
Support pressure ( $p_i$ )	0.0	$\varepsilon_\theta^p$	0.0
Young's modulus ( $E$ )	10.0 GPa	Dilation parameter( $\xi$ )	1.0 ( $\varphi=0^\circ$ ) 3.0 ( $\varphi=30^\circ$ )
Poisson's ratio ( $\nu$ )	0.2	Dilation parameter( $\eta$ )	-

크게 나타나기 때문에 수치해석의 오차가 증가하게 된다. 본 연구에서 제안된 모델로 예측된 반경방향 변위는 전체적으로 정해에 비해 근소하게 큰 값이 얻어지고 있음을 볼 수 있고, 이는  $c$ 와  $\phi$ 를 근사 시키는 과정에서 양함수법(explicit scheme)이 적용되었기 때문이다.

적절한  $n$ 값의 선택을 위해서는  $(\sigma_r - p_i)$ 의 크기, 소성거동 시의 체적팽창성 등이 함께 고려되어야 함을 Fig. 5의 해석 결과로부터 알 수 있다. 그러므로  $n$ 값의 선택에 대한 일반적인 기준은 제시할 수 없지만 개략적으로 500 ~ 1000 범위의 값을 사용할 경우 매우 정확한 결과를 얻을 수 있을 것으로 판단된다. 데스크톱 혹은 랩톱 컴퓨터를 활용할 경우 이러한 범위의  $n$ 값에 대해 제안 모델의 소요 계산시간은 수 초 이내로 나타났다.

Fig. 6은  $n = 500$ 의 경우에 계산된 터널 주변의 응력 및 반경방향 변위를 정해와 함께 도시한 것이다. Fig. 6 (a)의 계산된  $\sigma_r$  및  $\sigma_\theta$ 의 분포는 정해와 구분이 되지 않을 정도로 정확한 결과를 보여주고 있다. 그림에서는  $\phi = 30^\circ$ 인 경우만 도시하였으나  $\phi = 0^\circ$ 인 경우도 정확히 동일한 응력분포를 나타내었다. 지보압  $p_i = 0$ 을 가정하였으므로 터널 벽면에서  $\sigma_r = 0$ 임을 볼 수 있으며,

원주방향 수직응력은  $\sigma_\theta = 0.640$  MPa로 계산되었다. 취성-소성 모델에서는 응력이 항복상태에 도달한 후 바로 잔류항복 거동이 시작되므로 탄성-소성 경계부에서  $\sigma_\theta$ 의 불연속이 발생하게 되며 이러한 현상을 Fig. 6 (a)에서도 잘 보여주고 있다. 그림에서 소성영역의 응력 상태는 모두 잔류항복조건식을 만족시키게 된다.

Fig. 6 (b)는 터널주변의 계산 변위를 정해와 함께 도시한 것이다. 계산된 변위 분포 역시 정해에 매우 근사하여 그림에서는 그 차이를 구분하기 힘들 정도이다. 변위 분포는 항복영역의 체적팽창성에 매우 민감하게 영향을 받는다는 것을 Fig. 6 (b)에서 알 수 있다. 소성 체적팽창이 발생되지 않는  $\varphi = 0^\circ$ 인 경우 터널 벽면에서 반경방향 변위는 8.537 mm인 반면  $\varphi = 30^\circ$ 인 경우는 38.409 mm로 매우 큰 차이를 보인다. 이러한 결과는 탄소성 해석을 통한 터널의 내공변위 예측 시 소성 체적팽창성과 직접 관련이 있는 소성유동법칙 및 체적팽창각의 중요성을 말해준다. 일반적으로 암반거동의 탄소성해석에서 연상유동법칙을 사용할 경우 과도한 체적팽창이 발생된다고 알려져 있다(Pande et al., 1990).

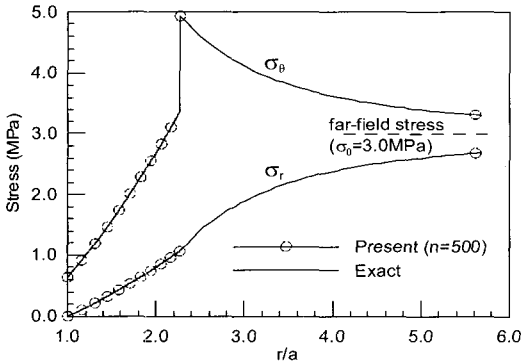
4.2 변형률연화 거동

4.1절의 취성-소성 거동 검증을 통하여 제안된 모델의 신뢰성이 확인되었다. 이 절에서는 제안된 모델을 변형률연화 거동해석에 적용하고 그 결과들을 분석하고자 한다.  $\xi=2, \eta=3$ 을 가정하였으며, 나머지 입력자료들은 Table 1과 동일한 값을 사용하였다. 변형률연화 거동에서 잔류 거동으로 전이를 결정하는 매개변수  $\bar{\epsilon}_b^0$ 는 변형률연화 해석의 경우 0이 아닌 값을 갖는다. 여기에서는  $\bar{\epsilon}_b^0=0.348E-3, \bar{\epsilon}_b^0=0.580E-3$ 의 2가지 경우를 해석하고 그 결과들을 탄성-취성 거동인  $\bar{\epsilon}_b^0=0$ 의 경우와 함께 분석하였다.

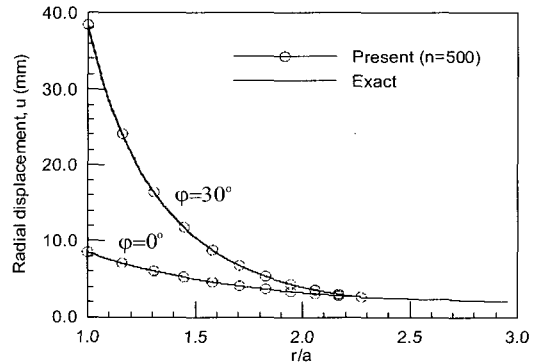
Fig. 7 (a)는 변형률연화 및 취성-소성 거동시 터널 주변의 응력분포를 보여준다. 변형률연화거동의 경우 연화거동 영역의 응력과 잔류거동 영역의 응력이 뚜렷하게 구분되고 있음을 알 수 있다.  $\bar{\epsilon}_b^0$ 가 커짐에 따라 즉

변형률연화 영역의 확대에 따라 탄성-소성 경계에서  $\sigma_r$ 는 증가하지만  $\sigma_\theta$ 의 값은 4.933 MPa으로 변화가 없음을 볼 수 있다. 또한  $\bar{\epsilon}_b^0$ 가 커짐에 따라 소성반경  $R_p$  및  $R_s$ 는 작아지고 있음을 알 수 있다. 이 그림에서  $R_p/a$ 는 각각 2.273, 2.174, 2.075 이고  $R_s/a$ 는 각각 1.922, 1.659 이다. 그렇지만  $\bar{\epsilon}_b^0$ 가 커짐에 따라 소성영역에서 변형률연화 영역의 상대적 넓이가 증가하고 있음을 볼 수 있다.

Fig. 7 (b)는 3가지  $\bar{\epsilon}_b^0$ 에 대한 터널주변의 반경방향 변위분포를 보여준다.  $\bar{\epsilon}_b^0$ 가 0, 0.348E-3, 0.580E-3 일 때 터널 벽면의 변위는 각각 1.806 cm, 1.99 cm, 1.83 cm로 나타났다. 이 해석에서 나타난 변위분포 특징은 소성영역의 넓이와 소성영역의 체적팽창 특성 등이 함께 반영되어 나타난 결과로서 매개변수  $\bar{\epsilon}_b^0$ 와 단순한 상관성을 찾는 것은 적절하지 않다고 판단된다. 이 연구에서 변형률연화 및 잔류 거동 구간에서 체적팽창 특성을 반영하는 매개변수  $\eta, \xi$ 를 각각 3.0, 2.0으로 가정한 것을 주목

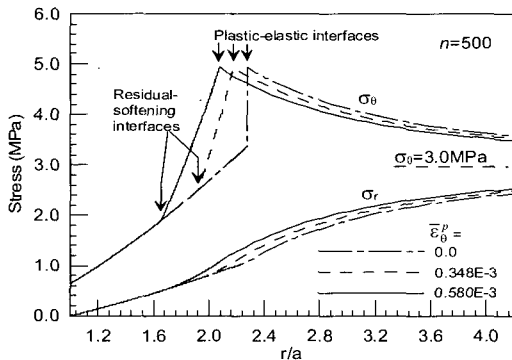


(a) Radial and circumferential stresses ( $\phi=30^\circ$ )

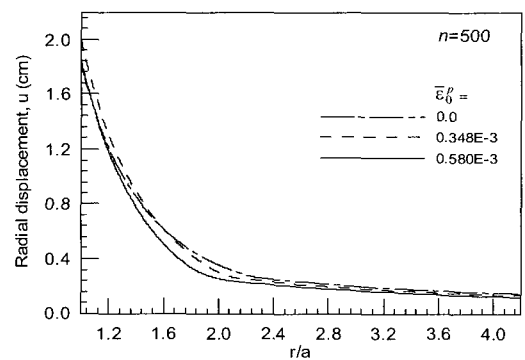


(b) Radial displacements

Fig. 6. Calculated stresses and radial displacements compared with the closed-form solution



(a) Radial and circumferential stresses



(b) Radial displacements

Fig. 7. Influence of  $\bar{\epsilon}_b^0$  on strain-softening behaviors



할 필요가 있다. 소성영역의 축소는 전체적으로 반경방향 변위의 감소로 나타나지만, 이 해석의 가정에 의하면 변형률연화 구간에서 더 큰 체적팽창이 발생하므로 소성영역 중에서 변형률연화 구간의 상대적 크기 또한 변위 분포 특성에 중요한 영향을 미친다.

Fig. 8은  $\bar{\epsilon}_\theta^p = 0.580E - 3$ 인 경우 터널 주변의 응력상태를 주응력 평면에 도시한 것이다. 이 해석에서는 소성영역 내의 500개 점에서 응력 상태가 얻어졌으나 이중 51개만을 그림에 나타내었다. 항복 이후 주응력 상태는 항복조건식을 계속 만족시키고 있어 이 해석이 정확하게 수행되었음을 보여주고 있다. 점 A는 탄성-소성 경계부의 응력상태를 나타내며, 점 B는 변형률연화-잔류 거동 경계부의 응력상태를 나타낸다. 초기 항복조건식과 잔류 항복조건식 사이의 점들은 변형률연화 구간에서 항복조건식을 만족시키는 점들이다. 변형률연화 거동시에는 내부마찰각과 점착강도의 저하로 인해 항복함수의 기울기와 수직절편 값인 일축압축강도가 연속적으로 낮아짐을 주목할 필요가 있다. 잔류거동에서는 항복함수의 변화가 없으므로 응력상태들은 잔류항복함수 상에 놓여져 있음을 잘 보여주고 있다.

4.3 지반반응곡선

제안된 모델의 적용 예로서 원형 공동의 지반반응곡선을 구하여 보았다. 지반반응곡선은 지반과 지보재 사이의 상호작용 특성을 이해하는데 매우 유용한 도구로서 터널 벽면에 가해지는 지보압과 벽면변위의 관계를 도시한 것이다. 해석에서는  $\bar{\epsilon}_\theta^p = 0.580E - 3$ 로 가정하였으며  $\eta = 1.5\xi$ 로 가정하여  $\xi$ 가 1.0, 2.0, 3.0 인 3가지 경우에 대하여 해석을 실시하였다. 또한 비교를 목적으로 취성-소성의 경우도 해석하였다. 지보압을 제외한 그 외의 입력자료는 Table 1에 나타난 값들을 사용하였다.

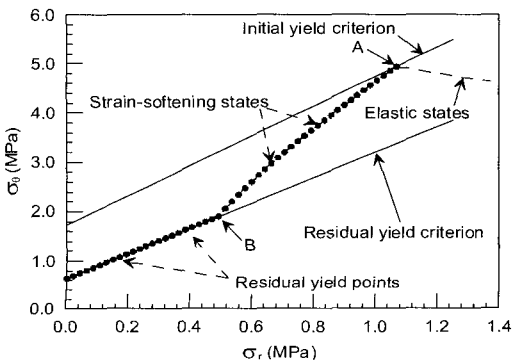


Fig. 8. Stress states around the tunnel ( $n=500$ ,  $\bar{\epsilon}_\theta^p = 0.580E - 3$ )

가정한 입력자료를 사용할 경우 소성영역이 발생되기 시작하는 한계지보압은 식 (11)에 의해  $p_{ic} = 1.067 \text{ MPa}$ 로 계산된다. 이 해석에서는 지보압  $p_i$ 을 0.0 ~ 1.0 MPa 사이에서 변화시킴으로써 터널 주변에 소성영역이 발생된 상황을 유도한 후 터널벽면에서의 반경방향 변위를 계산하였다. Fig. 9는 해석결과 얻어진 지반반응곡선을 보여준다. 그림에서 가로축의 반경방향 변위는  $a(\sigma_0 - p_{ic}) / (2G)$ 로 정규화시켰으며 세로축의 지보압은  $(\sigma_0 - p_{ic})$ 로 정규화시켜 무차원화하였다. 그림에서 실선으로 나타낸 곡선은  $\xi = 3.0$ 이고  $\bar{\epsilon}_\theta^p = 0.0$ 인 취성-소성 해석에서 얻은 곡선이다. 전체적으로 지반반응곡선의 형태는  $\eta$ 와  $\xi$ 의 크기 즉 소성영역에서의 체적팽창 특성에 민감하다는 것을 볼 수 있다. 특히 지보압의 크기가 작은 경우는  $\eta$ 와  $\xi$ 가 내공변위의 크기에 더욱 크게 영향을 미치고 있음을 알 수 있다.  $p_i = 0$ 인 경우를 살펴보면  $\xi = 1$ 일 때 터널 벽면에서  $u$ 값은 8.194 mm이지만  $\xi = 3$ 일 때는 39.425 mm로서 5배 가까이 증가된다. 이러한 해석결과는 터널의 지보재를 설계하는데 있어서 암반의 항복영역에서 체적팽창 특성이 정밀하게 평가되어야 한다는 것을 말해주고 있다. 또한 이러한 결과는 소성해석 입력자료의 개략적인 추정만으로 해석한 암반변위 예측결과들을 바탕으로 지보설계를 하는 것이 얼마나 큰 위험성을 내포하고 있는지 잘 보여준다.

5. 요약 및 결론

변형률연화 거동을 보이는 균질 등방 무한 M-C 암반에 굴착된 원형 터널 주변의 응력 및 변위 분포를 정수압 초기응력 조건에서 해석할 수 있는 매우 간단한 수치해석 방법을 소개하였다. 터널 주변에 고리형태로 형성된 소성영역의 응력 경계조건을 미리 계산할 수 있고 또

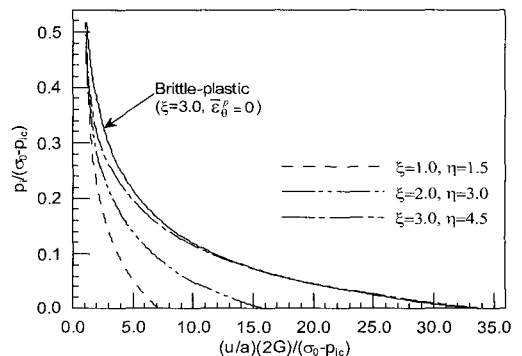


Fig. 9. Ground reaction curves ( $n=500$ ,  $\bar{\epsilon}_\theta^p = 0.580E - 3$ )

소성영역의 외부 경계로부터 내부 경계 쪽으로 응력성분의 크기가 단조감소한다는 사실을 활용하여 소성영역을 유한 개의 고리로 분할한 다음 바깥 쪽 영역에서부터 차례로 항복조건, 응력평형조건, 변위 적합조건식을 만족시키면서 응력증분과 변위증분을 유한차분 근사식에 의해 계산하였다. 소성영역은 변형률연화 영역과 잔류거동 영역으로 분리될 수 있다고 가정하였고, 각 영역에 대해서는 서로 다른 소성 유동법칙이 적용되었다. 제안된 모델은 변형률연화 거동뿐만 아니라 최성-소성 및 완전소성 거동의 해석에도 적용이 가능하다.

예제들을 통하여 제안된 방법의 정확성을 검증하였다. 정해가 알려진 취성-소성 거동에 대해 해석을 실시한 결과 소성영역을 분할하는 고리의 개수  $n$ 이 증가할수록 해석에는 정해에 가까워지고 있음을 보여주었다.  $n$ 이 500~1000 정도이면 충분히 정밀한 해를 얻을 수 있다고 판단되었으며 이에 따른 계산시간도 최신의 공학계산용 데스크톱 혹은 노트북 컴퓨터를 이용할 경우 수 초 이내인 것으로 나타났다.

변형률연화 거동 해석을 실시하여 입력 변수  $\bar{\epsilon}_0^p$ ,  $\eta$ ,  $\xi$ 의 영향을 분석하였다. 또한 변형률연화거동 해석의 응용사례로 지반반응곡선을 구하였다. 항복 후 잔류거동의 시작을 판단하는 지수  $\bar{\epsilon}_0^p$ 의 증가는 변형률연화 구간의 확대를 가져오지만 소성반경  $R_p$ 를 감소시켰다. 이에 따른 변위 분포 특성은 소성영역의 체적팽창 특성을 결정하는  $\eta$ ,  $\xi$ 의 영향을 함께 고려하여 분석되어야 할 것으로 판단되었다. 터널의 내공변위는  $\eta$ 와  $\xi$ 의 증가에 따라 크게 증가되는 것으로 나타났다. 특히 지보압이 낮은 경우에 그 증가는 더욱 크게 나타나고 있음을 지반반응곡선을 구하는 과정에서 보여주었다. 이러한 사실은 또한 소성 체적팽창성 큰 암반에서는 록볼트나 슛크리트 설치로 큰 내공변위 억제효과가 얻어 질 수 있음을 보여준다.

이 논문의 방법에서는 소성체적팽창 특성을  $\eta$ 와  $\xi$ 에 의해 결정되는 이중선형 모델을 채택하였으나 이를 좀더 세분화시키면 실제 실험에서 얻을 수 있는 곡선에 근사시킬 수 있을 것으로 판단된다. 변형률연화지수에 대한 연구도 아직까지 미진한 실정이며 이 논문에서 사용한 변형률 연화지수  $\bar{\epsilon}_0^p$  외에 전단소성변형률 등 다른 변수들을 연화지수로 사용되는 경우도 있다. 앞으로 이에 대한 심도 있는 연구도 요구되며, 이 연구의 해석방법도 이러한 목적에 유용하게 활용될 수 있을 것으로 판단된다.

## 감사의 말

이 논문은 2005년도 군산대학교 교수장기해외연수 경비의 지원에 의하여 연구되었음.

## References

- Alonso, E., L.R. Alejano, F. Varas, G. Fdez-Manin, and C. Carranza-Torres, 2003, Ground response curves for rock masses exhibiting strain-softening behavior. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 27, 1153-1185.
- Brady, B.H.G. and E.T. Brown, 1985, *Rock mechanics for underground mining*. George Allen & Unwin (Publisher) Ltd.
- Brown, E.T., J.W. Bray, B. Ladanyi, and E. Hoek, 1983, Ground response curves for rock tunnels. *J. Geotech. Eng.*, ASCE, 109, 15-39.
- Carranza-Torres, C., 2004, Elasto-plastic solution of tunnel problems using the generalized form of the Hoek-Brown failure criterion. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 41, 480-481.
- Carranza-Torres, C. and C. Fairhurst, 1999, The elasto-plastic response of underground excavations in rock masses that satisfy the Hoek-Brown failure criterion. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 36, 777-809.
- Florence, A.L. and L.E. Schwer, 1978, Axisymmetric compression of a Mohr-Coulomb medium around a circular hole. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 2, 367-379.
- Hoek, E. and E.T. Brown, 1980, *Underground excavation in rock*, London: Institution of Mining and Metallurgy.
- Hoek, E. and E.T. Brown, 1998, Practical estimations of rock mass strength. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* 34.8, 1165-1186.
- Pande, G.N., G. Beer, and J.R. Williams, 1990, *Numerical methods in rock mechanics*. John Wiley & Sons LTD.
- Park, K.-H. and Y.-J. Kim, 2006, Analytical solution for a circular opening in an elasto-brittle-plastic rock. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 43, 616-622.
- Sharan, S.K., 2003, Elasto-brittle-plastic analysis of circular opening in Hoek-Brown media. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 40, 817-824.
- Timoshenko, S.P. and J.N. Goodier, 1982, *Theory of elasticity*, McGraw-Hill Book co.
- Varas, F., E. Alonso, L.R. Alejano, and G. Fdez.-Manin, 2005, Study of bifurcation in the problem of unloading a circular excavation in a strain-softening material. *Tunneling and Underground Space Tech.*, 20, 311-322.
- Lee, Y.K. and S. Pietruszczak, 2006, Analysis of a circular opening excavated in a strain-softening Hoek-Brown rock mass. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* (submitted).
- Wang, Y., 1996, Groundresponse of circular tunnel in poorly consolidated rock. *J. Geotech. Eng.*, ASCE, 122, 703-708.



**이 연 규**

1987년 서울대학교 공과대학 자원공학과  
공학사

1989년 서울대학교 대학원 자원공학과  
공학석사

1994년 서울대학교 대학원 자원공학과  
공학박사

Tel: 063-469-1864

E-mail: [kyoulee@kunsan.ac.kr](mailto:kyoulee@kunsan.ac.kr)

현재 군산대학교 해양과학대학 해양시스템  
공학전공 부교수

---