

## 수정완경사방정식을 위한 반복기법의 효율성 비교

윤종태\* · 박승민\*

\*경성대학교 토목공학과

### Efficient Iterative Solvers for Modified Mild Slope Equation

JONG-TAE YOON\* AND SEUNG-MIN PARK\*

\*Department of Civil Engineering, Kyungshung University, Busan, Korea

**KEY WORDS:** Modified mild slope equation 수정완경사방정식, Generalized conjugate gradient method 일반공액경사법, Bi-conjugate gradient method 양공액경사안정법, Preconditioning 전처리, Wave transformation 파랑변형

**ABSTRACT:** Two iterative solvers are applied to solve the modified mild slope equation. The elliptic formulation of the governing equation is selected for numerical treatment because it is partly suited for complex wave fields, like those encountered inside harbors. The requirement that the computational model should be capable of dealing with a large problem domain is addressed by implementing and testing two iterative solvers, which are based on the Stabilized Bi-Conjugate Gradient Method (BiCGSTAB) and Generalized Conjugate Gradient Method (GCGM). The characteristics of the solvers are compared, using the results for Berkhoff's shoal test, used widely as a benchmark in coastal modeling. It is shown that the GCGM algorithm has a better convergence rate than BiCGSTAB, and preconditioning of these algorithms gives more than half a reduction of computational cost.

#### 1. 서 론

해안구조물의 올바른 설계, 시공 그리고 유지관리를 위해서는 불규칙한 지형으로 인한 해안에서의 파랑변형을 정확히 예측할 수 있어야 한다. Berkhoff(1972)의 완경사방정식은 선형분산계에서 이러한 파랑변형을 수심에 대한 제약이 없이 잘 모의할 수 있어 연안역에서의 파랑변형 해석에 광범위하게 적용되어 왔다. Berkhoff는 식의 유도 과정에서 완경사 가정, 즉  $|\nabla h|/kh \ll 1$  ( $\nabla$ =수평미분연산자,  $k$ =파수,  $h$ =수심)을 도입하였고 따라서  $(\nabla h)^2$ 과  $\nabla^2 h$ 에 비례하는 이차 저면 효과는 무시되었다. Booij(1983)는 단일경사 지형에서의 파향 전파에 따른 반사계수를 계산하여 완경사방정식의 한계를 검토하였는데, 약 1.3의 저면경사에서도 충분히 정확한 것으로 판단하였다.

이후 유도과정에서 무시되었던 이차 저면효과를 고려함으로써 급한 경사나 물결 형상의 지형과 같은 급변 지형에서도 정확도를 유지할 수 있는 수정완경사방정식에 대한 연구가 시작되었고 Massel(1993)과 Chamberlain and Porter(1995)는 Galerkin-eigenfunction 기법을 사용하여 타원형의 수정완경사방정식을 발표하였다. 그리고 Suh et al.(1997)은 Green의 둘째 등식과 Lagrange 공식을 사용하여 불규칙파에 대한 두 개의 쌍곡형의 식을 제안하였다. 이상의 식들은 서로 다른 과정을 거쳐 유도되었지만 결국은 동일한 형태의 식, 즉 수정완경사방정식으로 표현된다.

타원형 편미분방정식으로 표현되는 완경사방정식을 해석하기 위해, 유한요소법 또는 유한차분법을 사용하는 여러 가지 수치모형이 개발되었다. 유한요소법을 사용할 경우 요소의 크기 및 배열이 비교적 자유로워 국부적으로 보다 정교한 해를 얻을 수 있는데 비해 유한차분기법의 경우 그 적용이 단순하여 운용의 편리함이 장점이다(Houston, 1981). 하지만 이들 모형을 사용하여 어느 정도 합리적인 결과를 얻기 위해서는 한 파장당 최소 10개 정도의 격자 분할이 필요하므로, 해석 대상 해역이 광역이면 기억용량과 연산시간이 과도하게 커지는 단점이 있었다.

Radder(1979)는 포물형 근사를 도입함으로써 이러한 문제를 해결하였고, 포물형 모형은 현재도 광역 파랑모형으로 널리 쓰이고 있다. 하지만 파랑 진행 방향으로의 반사와 회절을 고려할 수 없고 파랑의 주 진행 방향이 고정되어야 하는 단점이 있어 항내에서의 파랑 등을 제대로 모의할 수 없는 제한이 있다.

또 다른 시도는 완경사방정식을 시간의존 형태의 쌍곡형 방정식으로 변환하여 해석하는 것으로서(Copeland, 1985) 지배방정식은 한 쌍의 일계 편미분방정식으로 표현된다. Dong and Al-Mashouk(1989)은 타원형 모형과 쌍곡형 모형의 비교 연구를 행하였는데 두 모형의 효율성은 거의 비슷한 것으로 나타났다. 두 모형의 파장당 최소 격자 분할은 비슷하게 요구되었고, 쌍곡형 모형의 경우 정상상태에 도달하기 위한 시간이 과도하게 커지는 경우가 가끔 발생하였다.

Panchang et al.(1991)과 Zhao and Anastasiou(1996)는 원래의 타원형방정식을 사용함으로써 식에 내재된 물리적 성질을 그대로 보존하면서 광역에도 적용 가능한 수치모형들을

교신저자 윤종태: 부산광역시 남구 대연3동 110-1  
051-620-4752 gtyun@ks.ac.kr

발표하였다. 이들 모형의 특성은 환경사방정식을 차별화하여 생성되는 연립방정식을 푸는 과정에서 수학자들에 의해 최근 개발된 강력한 반복기법들을 적용함으로써 기억용량의 제약을 피하고 아울러 연산의 효율성을 제고한 것이다. Oliveira and Anastasiou(1998)는 BiCGSTAB와 GMRES 기법을 활용하여 환경사방정식을 해석하였고 윤종태(2004)는 GCGM을 이용하여 타원형 수정환경사방정식의 해를 구하였다.

본 연구에서는 파랑변형 모형에 가장 성공적으로 적용된 기법 중의 하나인 GCGM과 BiCGSTAB 기법을 타원형 수정환경사방정식에 적용하여 두 기법의 적용성을 확인하고 기법의 효율성을 비교하였다. 또한 전처리(Preconditioning)과정을 각 알고리즘에 도입함으로써 전처리 과정의 효과를 확인하고 이로 인한 연산효율을 상호 비교하였다.

## 2. 지배방정식

Massel(1993)의 수정환경사방정식은 다음 식으로 표시된다.

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla \Phi) + \sigma^2 \left\{ \frac{C_g}{C} - R_1 (\nabla h)^2 - R_2 \nabla^2 h \right\} \Phi = 0 \quad (1)$$

여기서  $\Phi$ 는 정상상태의 평균해수면상의 속도포텐셜,  $\sigma$ 는 각주파수,  $C$ 는 파속 그리고  $C_g$ 는 군속도이다. 2차 저면효과를 결정하는 계수  $R_1$ 과  $R_2$ 는 다음과 같다.

$$R_1 = \frac{1}{\cosh^2 kh} (W_1 I_1 + W_2 I_2 + W_3 I_3 + W_4 I_4 + W_5 I_5 + W_6) \quad (2)$$

$$R_2 = \frac{1}{\cosh^2 kh} (U_1 I_1 + U_2 I_2 + U_3 I_3) \quad (3)$$

$W_i$ ,  $U_i$  그리고  $I_i$ 에 대한 정확한 표현은 Massel의 논문에서 나타난  $W_1$ 과  $W_2$ 에 대한 결함을 수정한 Suh et al. (1997)의 논문에 정리되어 있다. 파수  $k$ 는 분산관계식에서 결정된다.

$$\sigma^2 = gk \tanh kh \quad (4)$$

식 (1)은 Chamberlain and Porter(1995)의 식과 동일하고 저면 경사의 자승( $\nabla h$ )<sup>2</sup>과 저면곡률  $\nabla^2 h$ 에 비례하는 수심 변화의 이차효과들을 무시하면 Berkhoff(1972)의 환경사방정식이 된다.

식 (1)을 Helmholtz 형태로 변환하면 다음과 같다.

$$\nabla^2 \phi + K^2 \phi = 0 \quad (5)$$

여기서

$$\phi = (CC_g)^{1/2} \Phi \quad (6)$$

$$K^2 = k^2 \left\{ 1 - \frac{C}{C_g} (R_1 (\nabla h)^2 + R_2 \nabla^2 h) \right\} - \frac{\nabla^2 (CC_g)^{1/2}}{(CC_g)^{1/2}} \quad (7)$$

## 3. 경계조건

경계치 문제는 경계조건에 따라 그 해가 특히 민감하게 변하므로 적절한 경계조건을 사용하여야 한다. 외해 경계에서는 방사경계조건을 활용하는데, 경계에서 해석 영역내로의 부적합한 반사파가 발생하지 않도록 주의해야 한다. 반사경계에서는 방사경계조건에 반사계수를 도입한다.

입사경계에서의 입사파를  $\phi_m = A \exp(iKx)$ , 반사파를  $\phi_n = B \exp(-iKx)$ 로 두면 입사경계조건은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = iK(2\phi_m - \phi) \quad (8)$$

반사경계조건은 반사율을 고려한 다음 조건을 사용할 수 있다(Tsay and Liu, 1983).

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \alpha iK \phi \quad (9)$$

하단경계(Downwave boundary)에서 파의 반사를 억제시키는 스폰지 경계층을 사용할 경우, 스폰지층 내에서 식 (10)과  $K$ 는 다음과 같다.

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla \Phi) + \sigma^2 \left\{ \frac{C_g}{C} - R_1 (\nabla h)^2 - R_2 \nabla^2 h \right\} \Phi + i\sigma W \Phi = 0 \quad (10)$$

$$K^2 = \kappa^2 \left\{ 1 - \frac{C}{C_g} (R_1 (\nabla h)^2 + R_2 \nabla^2 h) \right\} - \frac{\nabla^2 (CC_g)^{1/2}}{(CC_g)^{1/2}} + \frac{i\sigma W}{CC_g} \quad (11)$$

여기서  $W$ 는 감쇠계수로서 다음과 같다.

$$W = \begin{cases} 0 & ; \text{ sponge layer outside} \\ e^{\delta/s} - 1 & ; \text{ sponge layer inside} \end{cases} \quad (12)$$

여기서  $s$ 는 스폰지 경계층의 폭,  $\delta$ 은 경계층 시작점으로부터의 거리이다.

본 연구에서의 수치실험은 스폰지 경계층을 사용하여 수행되었다.

#### 4. 수치기법

##### 4.1 GCGM

격자점  $(i, j)$ 에서의 포텐셜을  $\phi_{i,j}$ 로 두고 식 (5)를 2차의 기법으로 차별화하면( $\Delta x = \Delta y$ ) 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} + \phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} \\ &+ [(K\Delta x)^2 - 4]\phi_{i,j} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

대상해역의 격자망에 대해 위와 같은 차별식을 적용하면 다음과 같은 연립방정식이 얻어진다.

$$[A]\{\phi\} = \{f\} \quad (14)$$

여기서  $[A]$ 는 계수행렬,  $\{\phi\}$ 는 미지벡터 그리고  $\{f\}$ 는 경계 조건의 차별화로 부터 생기는 계수벡터이다.

Panchang et al.(1991)은 식 (14)를 풀기위해 PCG (Pre-conditioned conjugate gradient) 기법을 사용하였다. 반복기법이 수렴하기 위해서는 계수행렬  $[A]$ 의 대각요소가 지배적 (Diagonally dominant)이거나 혹은 대칭에 양의정수(Positive definite)이어야 한다. CG기법이 수렴하기 위해서는  $[A]$ 가 대칭에 양의 정수이어야 하므로 식 (13)에  $[A]$ 의 공액전치행렬을 곱하는 Gauss 변환을 사용하였다. 하지만 이 경우 스펙트럼 반경이 커져 수렴속도가 느려지므로 전처리(Pre-conditioning) 과정을 사용하여 수렴속도를 향상시켰다.

이에비해 Li(1994)는 GCG(Generalized conjugate gradient) 기법을 사용하였는데 일반적인 CG기법이  $f(x) = xAx/2 - fx$ 를 최소화 하는데 비해 GCG기법은  $f(x) = |Ax - f|^2/2$ 를 최소화하므로 계수행렬이 대칭이기만하면 적용가능하다. PCG 기법에 비해 반복횟수는 늘어나지만 횟수당 연산량이 적어지므로 PCG기법과 비슷한 정도의 연산 효율을 보여 주었다. 또한 필요한 기억용량이 적고 전처리과정 등이 불필요하므로 본 연구에선 GCG기법을 적용하였다. 계산과정은 다음과 같다.

1. Compute  $r_0 = f - A\phi_0$ ,  $p_0 = r_0$
2. For  $j = 0, 1, 2, \dots$  until convergence do
3.  $\alpha_j = (r_j, Ar_j) / (Ap_j, Ap_j)$
4.  $\phi_{j+1} = \phi_j + \alpha_j p_j$
5.  $r_{j+1} = r_j - \alpha_j Ap_j$
6.  $\beta_j = (r_{j+1}, Ar_{j+1}) / (r_j, Ar_j)$
7.  $p_{j+1} = r_{j+1} + \beta_j p_j$
8. Compute  $Ap_{j+1} = Ar_{j+1} + \beta_j Ap_j$
9. End do

공액경사법은 연립방정식  $A\phi = f$ 에 적절한 양의 정수(Po-

sitive definite)인 대칭행렬  $M$ 을 곱해줌으로써 알고리즘의 수렴속도를 향상시킬 수 있는데 이러한 과정을 전처리 과정이라 한다(윤종태, 1993). 전처리과정을 사용한 GCGM의 알고리즘은 다음과 같다.

1. Compute  $r_0 = f - A\phi_0$ ,  $p_0 = M^{-1}r_0$ ,  $z_0 = p_0$ ,  
 $u_0 = Ap_0$
2. For  $j = 0, 1, 2, \dots$  until convergence do
3.  $w_j = M^{-1}u_j$
4.  $\alpha_j = (z_j, Az_j) / (u_j, w_j)$
5.  $x_{j+1} = x_j + \alpha_j p_j$
6.  $r_{j+1} = r_j - \alpha_j u_j$
7.  $z_{j+1} = M^{-1}r_{j+1}$
8.  $\beta_j = (z_{j+1}, Az_{j+1}) / (z_j, Az_j)$
9.  $p_{j+1} = z_{j+1} + \beta_j p_j$
10.  $u_{j+1} = Az_{j+1} + \beta_j u_j$
11. End do

##### 4.2 BiCGSTAB

BiCGSTAB 기법은 Non Hermitian 계를 풀기위해 Fletcher (1976)가 제안한 Bi-conjugate gradient(BiCG) 기법의 일종이다. BiCG 기법은 알고리즘에 내재하는 해석과정의 비대칭성으로 인해 수치적 불안정이 심하여 이를 극복하기위한 여러 알고리즘이 개발되는데 대표적인 것이 Conjugate gradient squared(CGS) 기법이다. CGS기법은 방향벡터를 해를 향해 조정해 줌으로써 수렴속도를 크게 향상시켰지만 수렴거동의 불규칙성이 심한 단점이 있다. van der Vorst(1992)는 이러한 단점을 개량하여 보다 평탄한 수렴성을 보이는 BiCGSTAB기법을 발표하였고 이후 BiCGSTAB 기법은 타원형 편미분방정식을 해석하는 공학 전반의 문제에 널리 적용되었다. Oliveira and Anastasiou(1998)는 완경사방정식에 BiCGSTAB와 GMRES 기법을 적용하여 해를 구하고, GMRES에 비해 BiCGSTAB 기법이 보다 효율적임을 보였다. BiCGSTAB 기법의 알고리즘은 다음과 같다.

1. Compute  $r_0 = f - A\phi_0$  and  $h_0 = r_0$ ,  
 $\rho_0 = \alpha = w_0 = 1$ ,  $v_0 = p_0 = 0$
2. For  $j = 1, 2, 3, \dots$
3.  $\rho_j = (h_0, r_{j-1})$ ,  $\beta = (\rho_j / \rho_{j-1})(\alpha / w_{j-1})$
4.  $p_j = r_{j-1} + \beta(p_{j-1} - w_{j-1}v_{j-1})$
5.  $v_j = Ap_j$
6.  $\alpha = \rho_j / (h_0, v_j)$
7.  $s = r_{j-1} - \alpha v_j$
8.  $t = As$
9.  $w_j = (t, s) / (t, t)$

10.  $\phi_j = \phi_{j-1} + \alpha p_j + w_j s$
11.  $r_j = s - w_j t$
12. End do

전처리과정을 적용한 BiCGSTAB 알고리즘은 전처리행렬  $M = M_1 M_2$  (윤종태, 1993)에 대해 다음과 같다.

1. Compute  $r_0 = f - A\phi_0$  and  $h_0 = r_0$ ,  
 $\rho_0 = \alpha = w_0 = 1$ ,  $v_0 = p_0 = 0$
2. For  $j = 1, 2, 3, \dots$
3.  $\rho_j = (h_0, r_{j-1})$ ,  $\beta = (\rho_j / \rho_{j-1})(\alpha / w_{j-1})$
4.  $p_j = r_{j-1} + \beta(p_{j-1} - w_{j-1}v_{j-1})$
5.  $y = M^{-1}p_j$
6.  $v_j = Ay$
7.  $\alpha = \rho_j / (h_0, v_j)$
8.  $s = r_{j-1} - \alpha v_j$
9.  $z = M^{-1}s$
10.  $t = Az$
11.  $w_j = (M_1^{-1}t, M_1^{-1}s) / (M_1^{-1}t, M_1^{-1}t)$
12.  $\phi_j = \phi_{j-1} + \alpha y + w_j z$
13.  $r_j = s - w_j t$
14. End do

## 5. 모형의 검증

반복기법의 검증을 위해 Berkhoff의 수중천퇴에 대한 파랑 변형 실험에 수정완경사방정식을 적용하였다.

실험대상의 지형 및 관측구간은 Fig. 1과 같다. 주기 1초, 진폭 2.32cm의 단순진행파가 입사된다. 해저지형은 1:50의 경사를 가진 해저에 타원형 천퇴가 있고 등심선은 x축과 20°의 각을 가진다. 바닥경사는  $y' < -5.82$ 이면  $h = 0.45$ ,  $y' \geq -5.82$ 이면  $h = 0.45 - 0.02(5.82 + y')$ 으로 주어진다. 천퇴의 경계는  $(x'/4)^2 + (y'/3)^2 = 1$ , 천퇴의 두께는  $d = -0.3 + 0.5\sqrt{1 - (x'/5)^2 - (y'/3.75)^2}$ 이다.

천퇴근처에 위치한 여덟 관측구간을 따라 파고를 비교하였다(Fig. 2). 본 실험의 주안점은 천퇴 직후방에서 볼 수 있는 굴절로 인한 에너지의 집중과, 천퇴에서 떨어진 후방에서 이러한 에너지의 집중이 회절효과로 인해 완화되는 과정이다. 계산결과는 전체적으로 계측치와 양호한 일치율을 보여주고 있지만 계측치에 비해 에너지의 집중구간에서 약간의 큰 값을 보여주고 있다. 이는 진폭 분산과 주파수 분산을 설명할 수 없는 선형 모형의 한계로 인한 것으로 판단된다. 윤종태(2001)는 비선형모형인 Boussinesq 모형을 이용함으로써 이러한 계측치와의 편차를 줄일 수 있음을 보여주었다. 천퇴 후반부에서의 결과를 보면 회절로 인한 완화효과가 계측치에 비해 비교적 신속히 이루어지고 있음을 볼 수 있다. 이는 회절 우세

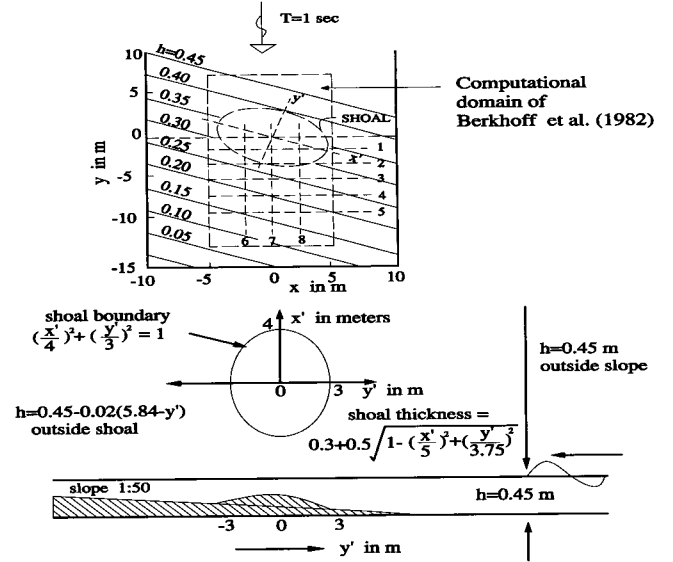


Fig. 1 Experiment layout for wave focusing experiment of Berkhoff et al. (1972).

지역에서의 파랑 재군집(Wave regrouping) 효과를 재현할 수 없는 완경사방정식의 한계로 인한 것으로 사료된다.

## 6. 알고리즘의 효율성

각 알고리즘이 반복횟수당의 연산량이 다르므로 반복횟수로 알고리즘의 효율성을 비교할 수는 없다. 대신 연산량을 기준으로 비교하여야 하는데 각 기법의 한 격자점에서의 반복횟수당 연산량은 다음 표. 1과 같다.

Table 1 Average computational cost

Algorithm	Ax	Dot	Vector update	Operation
GCGM	2	4	3	32
PGCGM	3	4	4	43
BiCGSTAB	2	4	4	38
PBiCGSTAB	6	4	4	74

Table 2 Computational cost

Algorithm	Iterations	Total operations
GCGM	7129	228128
PGCGM	2737	117691
BiCGSTAB	8637	328206
PBiCGSTAB	2343	173382

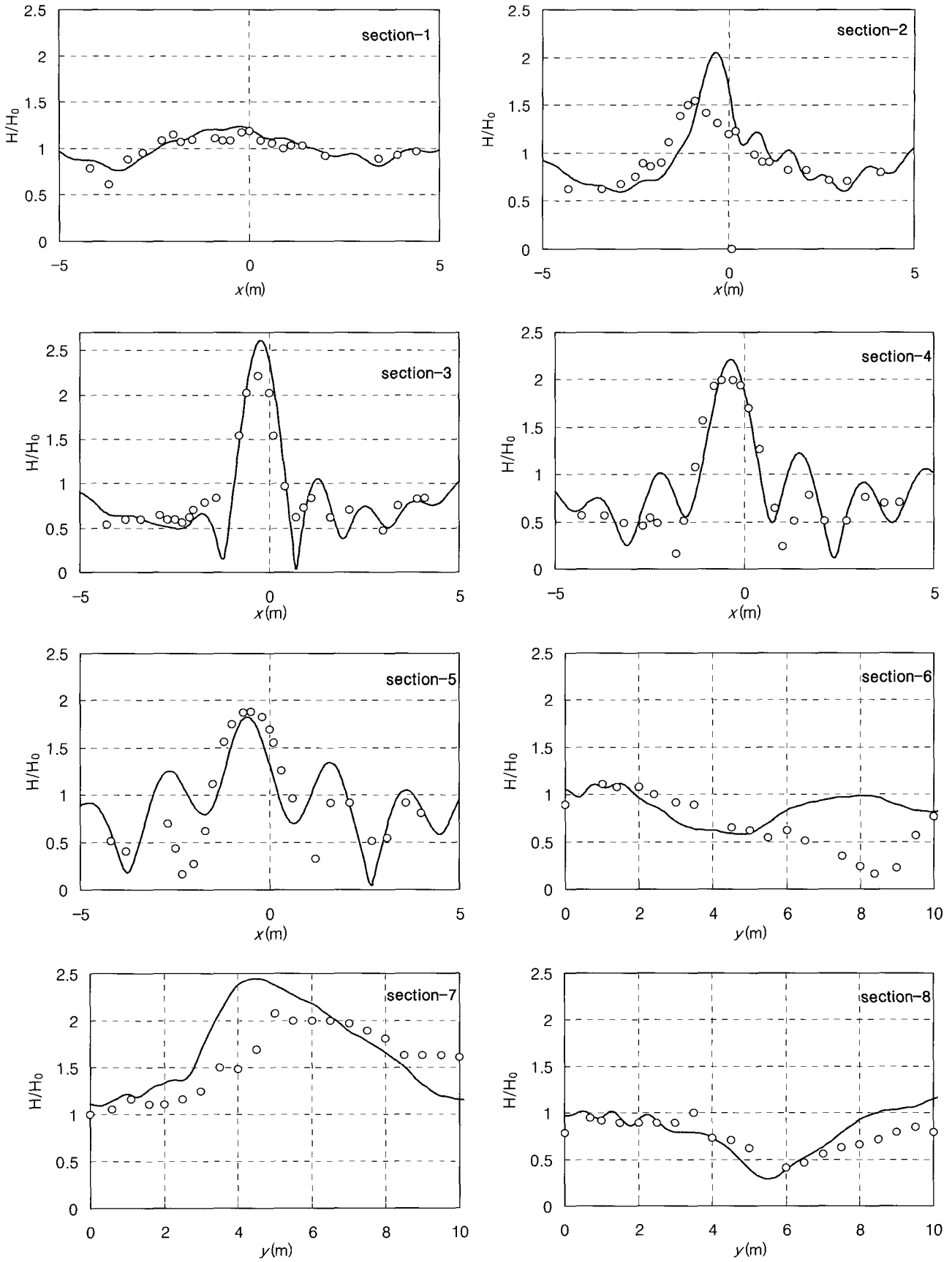


Fig. 2 Computations of amplitude along specified section; modified mild slope equation(—), experiment data(○)

허용오차  $10^{-8}$ 에 대해 각 기법의 최종 반복횟수 및 총연산량은 다음과 같다.

결과를 보면 GCGM이 BiCGSTAB 기법보다 약 1.4배 정도 빠르고 전처리과정을 취했을 때는 약 1.5배 연산효율을 보여 주고 있다. 또한 각 기법은 전처리과정을 사용함으로써 전처리 사용전에 비해 약 1.9배의 연산효율을 나타내고 있다.

## 6. 결 론

타원형 수정완경사방정식을 해석하는 수치 반복기법을 구성하였고 해석 알고리즘은 GCGM과 BiCGSTAB 기법을 적용하였다. 수치모형의 적용성을 확인하기 위해 Berkhoff의 타원형 천퇴에 대한 파랑변형 실험에 적용하였고 실험결과는 계측치와 양호한 일치를 보여주었다. 굴절로 인한 에너지의 집중이 조금 과다하고 후면부에서의 회절로 인한 파고 평탄화가 비교적 빠르게 나타났지만 이는 선형모형이 가지는 한계에 기인한 것으로 판단된다. 수치적 효율성을 보면 GCGM이 BiCGSTAB 기법보다 약 1.4배 빠른 것으로 나타났고 전처리과정을 취했을 때는 1.5배의 연산효율을 보여주었다. 또한 각 기법은 전처리과정을 적용했을 때 전처리 사용전에 비해 약 1.9배의 연산효율을 보여 전처리 과정의 효율성 및 경제성을 확인할 수 있었다. 이상으로 타원형 수정완경사방정식의 반복 수치기법으로서 GCGM의 효율성을 확인하였고 특히 전처리과정을 도입할 때 그 효과가 배가 됨을 확인할 수 있었다.

## 후 기

이 논문은 2004학년도 경성대학교 학술지원 연구비에 의하여 연구되었음.

## 참 고 문 헌

윤종태 (1993). "CGM을 이용한 완경사방정식의 수치해석", 한국해안·해양공학회지, 제5권, 제2호, pp 84-90.  
 윤종태 (2001). "완전비선형 Boussinesq 방정식을 이용한 쇄파대의 파랑변형 모의", 한국해안·해양공학회지 제13권, 제4호, pp 296-308.  
 윤종태 (2004). "수정완경사방정식의 타원형 수치모형", 한국해양공학회지, 제18권, 제4호, pp 40-45.  
 Berkhoff, J.C.W. (1972). "Computation of Combined Refraction-Diffraction", Proc. 13th Coastal Eng. Conf., Vancouver, Vol 1, pp 471-490.  
 Booi, N. (1983). "A Note on the Accuracy of the Mild-slope Equation", Coastal Eng., Vol 7, pp 191-203.  
 Chamberlain, P.G. and Porter, D. (1995), "The Modified Mild-slope Equation", J. Fluid Mech., Vol 291, pp 393- 407.

Copeland, G.J.M. (1985). "A Practical Alternative to the Mild-slope Wave Equation", Coastal Eng., Vol (9), pp 125-149.  
 Dong, P. and Al-Mashouk, M. (1989). "Comparison of Transient and Steady State Wave Models for Harbour Resonance", Proc. Conf. on Hydraulic and Environmental Modeling of Coastal, Estuarine and River waters, Bradford, pp 233-244.  
 Fletcher R. (1976). "Conjugate Gradient Methods for Indefinite Systems", Lecture Notes in Math, Vol 506, pp 73-89.  
 Houston, J.R. (1981). "Combined Refraction and Diffraction of Short Waves Using the Finite Element Method", Applied Ocean Res., Vol 3, pp 163-170.  
 Li, B. (1994). "A Generalized Conjugate Gradient Models for the Mild Slope Equation", Coastal Eng., Vol 23, pp 215-225.  
 Massel, S.R. (1993). "Extended Refraction-diffraction Equation for Surface Waves", Coastal Eng., Vol 19, pp 97-126.  
 Oliveira, F.S.B.F and Anastasion K. (1998). "An Efficient Computational Model for Water Wave Propagation in Coastal Regions", Applied Ocean Research, Vol 20, pp 263-271.  
 Panchang, V.G., Pearce, B.R., Wei, G. and Cushma-Roisin, B. (1991). "Solution of the Mild-slope Wave Problem by Iteration", Applied Ocean Res., Vol 13, pp 187-199.  
 Radder, A.C. (1979). "On the Parabolic Equation Method for Water Wave Propagation", J. Fluid Mech., Vol 95, pp 159-176.  
 Suh, K.D., Lee, C. and Park, W.S. (1997). "Time-dependent Equation for Wave Propagation on Rapidly Varying Topography", Coastal Eng., Vol 32, pp 91-117.  
 Suh, K.D., Lee, C., Park, Y.H. and Lee, T.H. (2001). "Experimental Verification of Horizontal Two-dimensional Modified Mild-slope Equation Model", Coastal Eng., Vol 44, pp 1-12.  
 Tsay, T.K. and Liu, P.L.-F. (1983). "A Finite Element Model for Wave Refraction and Diffraction", Applied Ocean Research, Vol 5, No. 1, pp 30-37.  
 Van der Vorst H.A. (1992). "Bi-CGSTAB : A Fast and Smoothly Converging Variant of Bi-CG for the Solution of Nonsymmetrical Linear Systems". SIAM J. Sci. Stat. Comput. Vol 13, pp 631-644.  
 Zhao, Y. and Anastasion, K. (1996), "Modelling of Wave Propagation in the Nearshore Region Using the Mild-Slope Equation with GMRES-based Iterative Solvers", International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol 23, pp 397-411.

2006년 8월 23일 원고 접수

2006년 12월 5일 최종 수정본 채택